Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Денисова, Асимптотическое поведение решения системы стохастических дифференциальных уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 425–429

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2955>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:48:55

5. Горяйнов В. В. Дробное итерирование вероятностных производящих функций и вложение дискретных ветвящихся процессов в непрерывные. — Матем. сб., 1993, т. 184, № 5, с. 55–74.

Поступила в редакцию
9.VII.1993

© 1996 г.

ДЕНИСОВА И. Ю.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе изучается асимптотическое поведение угловой компоненты решения двумерной системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений специального вида в некоторой области. Эта область представляет собой кольцо, внешняя и внутренняя окружности которого являются инвариантными множествами соответствующей линеаризованной системы.

Ключевые слова и фразы: стохастическое дифференциальное уравнение Ито, инвариантное множество, стационарное множество, предел с вероятностью единица.

Пусть существует решение $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_n(t))$ системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\zeta(t) = a(\zeta(t)) dt + b(\zeta(t)) dw(t), \quad (1)$$

где $t \geq 0$, $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$, $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$ — действительные измеримые функции, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка из $\mathbb{R}^n$, $w(t)$ — одномерный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть решение $\zeta(t)$ при $t = 0$ принимает значение $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, x^0 — неслучайное, а коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ допускают разложения

$$a(x) = Ax + \tilde{a}(x), \quad b(x) = Bx + \tilde{b}(x).$$

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений, соответствующую данной нелинейной системе (1):

$$d\xi(t) = A\xi(t) dt + B\xi(t) dw(t). \quad (2)$$

Пусть D — открытая область в $\mathbb{R}^n$ и τ_D — момент первого выхода процесса $\xi(t)$ из области D .

О п р е д е л е н и е 1. Непустое множество $\Gamma \subseteq D$ называется инвариантным множеством системы (2) до момента первого выхода τ_D , если

$$P\{\xi(t) \in \Gamma \forall t < \tau_D \mid \xi(0) \in \Gamma\} = 1.$$

Пусть уравнение инвариантного множества системы (2) имеет вид $G(x) = C$, где C — некоторая постоянная, функция $G(x) \in C^2(D)$ [1].

*Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, просп. Вернадского, 78, Москва, Россия.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $\{x: G(x) = C\}$ называется стационарным для системы уравнений (1), если оно является инвариантным множеством соответствующей линеаризованной системы (2) и

$$\tilde{a}(x)|_{G(x)=C} = 0, \quad \tilde{b}(x)|_{G(x)=C} = 0.$$

Заметим, что если x^0 находится на стационарном множестве, то $\zeta(t) = C$ для всех $t > 0$, а если $x^0 \in \{G(x) > C\}$, то выполняется $\zeta(t) > C$ для всех $t > 0$ [2].

Пусть размерность пространства $n = 2$, и матрицы A и B имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{\mu^2}{2} & m\mu \\ -m\mu & -\frac{\mu^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\mu = \text{const} > 0$, m — произвольная постоянная.

Тогда уравнения инвариантных множеств системы (2) имеют вид $x_1^2 + x_2^2 = C$, где C — произвольная неотрицательная постоянная [1]. Перейдем от декартовых координат x_1, x_2 к полярным r, φ : $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$. Разобьем процесс $\zeta(t)$ на две составляющие: радиальную $r(t)$ и угловую $\varphi(t)$. Обозначим

$$\lambda = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \lambda^\perp = (-\sin \varphi, \cos \varphi),$$

$$x = (x_1, x_2), \quad x^\perp = (-x_2, x_1), \quad b(r, \varphi) = \tilde{b}(r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

$$\tilde{a}(r, \varphi) = \tilde{a}(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad \sigma(r, \varphi) = \frac{1}{r} (\tilde{b}(r, \varphi), \lambda^\perp).$$

Теорема 1. Пусть матрицы A и B системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (2) имеют вид (3) и множества $\{x: x_1^2 + x_2^2 = C_i, i = 1, 2\}$ являются стационарными для системы (1).

1. Если $(\tilde{b}(r, \varphi), \lambda^\perp) = 0$, $(\tilde{a}(r, \varphi), \lambda^\perp) + \mu(\tilde{b}(r, \varphi), \lambda^\perp) = 0$, то при $m \neq 0$ с вероятностью единица $\varphi(t)/t \rightarrow -m\mu$ при $t \rightarrow \infty$. При $m = 0$

$$P\left\{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} < y\right\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\mu|} \int_{-\infty}^y \exp\left\{-\frac{u^2}{2\mu^2}\right\} du.$$

2. Если $m\mu \neq 0$, $0 < -\mu + (1/r)(\tilde{b}(r, \varphi), \lambda^\perp) \leq c$,

$$(\tilde{a}(r, \varphi), \lambda^\perp) + \mu(\tilde{b}(r, \varphi), \lambda) - \frac{1}{r}(\tilde{b}(r, \varphi), \lambda)(\tilde{b}(r, \varphi), \lambda^\perp) = 0,$$

то

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = -m\mu\right\} = 1.$$

3. Если

$$-m\mu + \frac{1}{r} \left((\tilde{a}(r, \varphi), \lambda^\perp) + \mu(\tilde{b}(r, \varphi), \lambda) \right) - \frac{1}{r}(\tilde{b}(r, \varphi), \lambda)(\tilde{b}(r, \varphi), \lambda^\perp) = \hat{a}(\varphi),$$

$$0 < -\mu + \sigma(r, \varphi) = \hat{\sigma}(\varphi), \quad \left| \int_0^u \frac{\hat{a}(v)}{\hat{\sigma}^2(v)} dv \right| < c_1$$

и

$$\frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \exp\left\{\frac{\hat{a}(v)}{\hat{\sigma}^2(v)} dv\right\} du \rightarrow k_1, \quad |\varphi| \rightarrow \infty,$$

$$\frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \exp\left\{2 \int_0^u \frac{\hat{a}(v)}{\hat{\sigma}^2(v)} dv\right\} \frac{1}{\hat{\sigma}^2(u)} du \rightarrow k_2, \quad |\varphi| \rightarrow \infty,$$

$0 < k_i < \infty, i = 1, 2$, то

$$P \left\{ \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} < y \right\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp \left\{ -\frac{u^2 k_1 k_2}{2} \right\} du.$$

Доказательство. Возьмем функцию $f(x_1, x_2) = x_1 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Поскольку в полярных координатах $\zeta_1(t) = r(t) \cos \varphi(t)$, $\zeta_2(t) = r(t) \sin \varphi(t)$, то $\cos \varphi(t) = \zeta_1(t) / \sqrt{\zeta_1^2(t) + \zeta_2^2(t)}$. Построим для процесса $\varphi(t)$ уравнение следующим образом. Пусть искомое уравнение имеет вид $d\varphi(t) = \alpha(t) dt + \beta(t) dw(t)$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — некоторые функции. Тогда процесс $\cos \varphi(t)$ имеет дифференциал

$$d \cos \varphi(t) = \left(-\sin \varphi(t) \alpha(t) - \frac{1}{2} \cos \varphi(t) \beta^2(t) \right) dt - \sin \varphi(t) \beta(t) dw(t).$$

Используя формулу Ито для процесса $f(\zeta_1(t), \zeta_2(t))$ и сравнивая члены, стоящие при dt и $dw(t)$, получим

$$\alpha(t) = \frac{(a^*(r(t), \varphi(t)), \lambda^\perp)}{r(t)} - \frac{(b^*(r(t), \varphi(t)), \lambda)(b^*(r(t), \varphi(t)), \lambda^\perp)}{r^2(t)},$$

$$\beta(t) = \frac{(b^*(r(t), \varphi(t)), \lambda^\perp)}{r(t)},$$

где $a^*(r, \varphi) = a(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $b^*(r, \varphi) = b(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Учитывая вид матриц A и B , получаем уравнение для процесса $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \left\{ -m\mu + \frac{1}{r(s)} \left[(\bar{a}(r(s), \varphi(s)), \lambda^\perp) + \mu(\bar{b}(r(s), \varphi(s)), \lambda) \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{r(s)} (\bar{b}(r(s), \varphi(s)), \lambda) (\bar{b}(r(s), \varphi(s)), \lambda^\perp) \right\} ds \\ + \int_0^t \left(-\mu + \frac{1}{r} (\bar{b}(r(s), \varphi(s)), \lambda^\perp) \right) dw(s). \end{aligned}$$

Обозначим

$$f_1(r, \varphi) = \frac{1}{r} \left[(\bar{a}(r, \varphi), \lambda^\perp) + \mu(\bar{b}(r, \varphi), \lambda) \right] - \frac{1}{r} (\bar{b}(r, \varphi), \lambda) (\bar{b}(r, \varphi), \lambda^\perp).$$

Если $(\bar{b}(r, \varphi), \lambda^\perp) = 0$, $(\bar{a}(r, \varphi), \lambda) + \mu(\bar{b}(r, \varphi), \lambda) = 0$, то уравнение для $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = \varphi(0) - m\mu t - \mu w(t)$. Так как с вероятностью единица $w(t)/\sqrt{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то с вероятностью единица $\varphi(t)/t \rightarrow -m\mu$ при $t \rightarrow \infty$. При $m = 0$, поскольку $w(t)/\sqrt{t}$ имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} < y \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\mu|}} \int_{-\infty}^y \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\mu^2} \right\} du.$$

Если $m\mu \neq 0$, $0 < -\mu + \sigma(r, \varphi) < c$,

$$(\bar{a}(r, \varphi), \lambda^\perp) + \mu(\bar{b}(r, \varphi), \lambda) - \frac{1}{r} (\bar{b}(r, \varphi), \lambda) (\bar{b}(r, \varphi), \lambda^\perp) = 0,$$

то уравнение для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi(0) - m\mu t + \int_0^t \left[-\mu + \sigma(r(s), \varphi(s)) \right] dw(s).$$

Поскольку (см. [3])

$$P\left\{\sup_{A \leq t \leq A_1} \frac{1}{t} \left| \int_0^t (-\mu + \sigma(r(s), \varphi(s))) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{cA_1}{\varepsilon^2 A^2},$$

то

$$\begin{aligned} & P\left\{\sup_{A \leq t} \frac{1}{t} \left| \int_0^t (-\mu + \sigma(r(s), \varphi(s))) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\sup_{A2^k \leq t \leq A2^{k+1}} \frac{1}{t} \left| \int_0^t (-\mu + \sigma(r(s), \varphi(s))) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{cA2^{k+1}}{\varepsilon^2 A^2 2^{2k}} = \frac{4c}{\varepsilon^2 A}. \end{aligned}$$

Величина

$$\alpha(A) = \sup_{t \geq A} \left(\frac{1}{t} \right) \left| \int_0^t (-\mu + \sigma(r(s), \varphi(s))) dw(s) \right|$$

монотонно убывает при $A \rightarrow \infty$, и, значит, существует предел $\alpha = \lim_{A \rightarrow \infty} \alpha(A)$. Тогда

$$P\{\alpha > \varepsilon\} = \lim_{A \rightarrow \infty} P\{\alpha(A) > \varepsilon\} = 0.$$

Поскольку $\alpha(A)$ монотонно зависит от A , то

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (-\mu + \sigma(r(s), \varphi(s))) dw(s) = 0\right\} = 1.$$

Таким образом,

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi(t)}{t} \right) = -m\mu\right\} = 1.$$

А если

$$-m\mu + \frac{1}{r} \left((\bar{a}(r, \varphi), \lambda^\perp) + \mu(\bar{b}(r, \varphi), \lambda) \right) - \frac{1}{r} (\bar{b}(r, \varphi), \lambda) (\bar{b}(r, \varphi), \lambda^\perp) = \bar{a}(\varphi),$$

$$0 < -\mu + \frac{1}{r} (\bar{b}(r, \varphi), \lambda^\perp) = \bar{\sigma}(\varphi),$$

причем

$$\left| \int_0^u \frac{\bar{a}(v)}{\bar{\sigma}^2(v)} dv \right| \leq c_1,$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \exp \left\{ -2 \int_0^u \frac{\bar{a}(v)}{\bar{\sigma}^2(v)} dv \right\} du \longrightarrow k_1, \quad |\varphi| \rightarrow \infty, \\ & \frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \exp \left\{ 2 \int_0^u \frac{\bar{a}(v)}{\bar{\sigma}^2(v)} dv \right\} \frac{1}{\bar{\sigma}^2(u)} du \longrightarrow k_2, \quad |\varphi| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$0 < k_i < \infty$, $i = 1, 2$, то (см. [4])

$$P\left\{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} < y\right\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp \left\{ -\frac{u^2 k_1 k_2}{2} \right\} du.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабчук В. Г.* Инвариантные множества системы линейных стохастических диффузионных уравнений с постоянными коэффициентами. Препринт. Киев: ИК АН УССР, 1980, 43 с.
2. *Денисова И. Ю.* О достижимости и устойчивости инвариантного множества системы стохастических дифференциальных уравнений. — Укр. матем. журн., 1992, т. 44, № 4, с. 570–574.
3. *Гилман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 354 с.
4. *Кулинич Г. Л.* Асимптотическое поведение неустойчивого решения стохастического однородного дифференциального уравнения. — Теория вероятн. и матем. статист., 1971, № 5, с. 81–87.

Поступила в редакцию
31.I.1994

© 1996 г.

КЛЕПЦЫНА М. Л.*

**ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ И ДИФФУЗИОННАЯ
АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА¹⁾**

Рассматривается семейство случайных процессов $x^\epsilon = (x_t^\epsilon)_{t \geq 0}$, $\epsilon \geq 0$, причём x_t^ϵ — решение уравнения Вольтерра со случайными коэффициентами вида

$$x_t^\epsilon = x_0 + \int_0^t b(t, x_s^\epsilon, \xi_s/\epsilon) ds$$

и с неслучайным начальным условием x_0 , где $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ — стационарный эргодический процесс. В работе находятся аппроксимации первого и второго порядков для x^ϵ при $\epsilon \rightarrow 0$ (в смысле слабой сходимости). Аппроксимацией второго порядка является решение уравнения Ито–Вольтерра.

Ключевые слова и фразы: принцип усреднения, диффузионная аппроксимация, сходимость по распределению, уравнение Вольтерра.

Основной целью этой работы является изучение предельного поведения семейства случайных процессов $x^\epsilon = (x_t^\epsilon)_{t \geq 0}$, зависящих от малого параметра $\epsilon > 0$, при $\epsilon \rightarrow 0$. В работе изучается случай, когда x_t^ϵ — решение уравнения Вольтерра со случайными коэффициентами, возмущёнными строго стационарным эргодическим процессом. В первой части работы устанавливается принцип усреднения, аналогичный классическому принципу усреднения Боголюбова [1]. Затем находится аппроксимация второго порядка для исходного семейства процессов, точнее, устанавливается, что аппроксимацией второго порядка (диффузионной аппроксимацией) является решение стохастического уравнения Ито–Вольтерра. Следует заметить, что различными вариантами принципа усреднения и диффузионной аппроксимации занимались многие авторы (см., например, [2], [3], [4] и имеющуюся там библиографию). В отличие

*Московский государственный университет путей сообщения, кафедра прикладной математики, ул. Образцова, 15, 101475 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-1450).