Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Клепцына, Принцип усреднения и диффузионная аппроксимация для уравнений Вольтерра, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 429–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2956>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:00:36

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабчук В. Г.* Инвариантные множества системы линейных стохастических диффузионных уравнений с постоянными коэффициентами. Препринт. Киев: ИК АН УССР, 1980, 43 с.
2. *Денисова И. Ю.* О достижимости и устойчивости инвариантного множества системы стохастических дифференциальных уравнений. — Укр. матем. журн., 1992, т. 44, № 4, с. 570–574.
3. *Гилман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 354 с.
4. *Кулинич Г. Л.* Асимптотическое поведение неустойчивого решения стохастического однородного дифференциального уравнения. — Теория вероятн. и матем. статист., 1971, № 5, с. 81–87.

Поступила в редакцию
31.I.1994

© 1996 г.

КЛЕПЦЫНА М. Л.*

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ И ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА¹⁾

Рассматривается семейство случайных процессов $x^\epsilon = (x_t^\epsilon)_{t \geq 0}$, $\epsilon \geq 0$, причём x_t^ϵ — решение уравнения Вольтерра со случайными коэффициентами вида

$$x_t^\epsilon = x_0 + \int_0^t b(t, x_s^\epsilon, \xi_s/\epsilon) ds$$

и с неслучайным начальным условием x_0 , где $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ — стационарный эргодический процесс. В работе находятся аппроксимации первого и второго порядков для x^ϵ при $\epsilon \rightarrow 0$ (в смысле слабой сходимости). Аппроксимацией второго порядка является решение уравнения Ито–Вольтерра.

Ключевые слова и фразы: принцип усреднения, диффузионная аппроксимация, сходимость по распределению, уравнение Вольтерра.

Основной целью этой работы является изучение предельного поведения семейства случайных процессов $x^\epsilon = (x_t^\epsilon)_{t \geq 0}$, зависящих от малого параметра $\epsilon > 0$, при $\epsilon \rightarrow 0$. В работе изучается случай, когда x_t^ϵ — решение уравнения Вольтерра со случайными коэффициентами, возмущенными строго стационарным эргодическим процессом. В первой части работы устанавливается принцип усреднения, аналогичный классическому принципу усреднения Боголюбова [1]. Затем находится аппроксимация второго порядка для исходного семейства процессов, точнее, устанавливается, что аппроксимацией второго порядка (диффузионной аппроксимацией) является решение стохастического уравнения Ито–Вольтерра. Следует заметить, что различными вариантами принципа усреднения и диффузионной аппроксимации занимались многие авторы (см., например, [2], [3], [4] и имеющуюся там библиографию). В отличие

*Московский государственный университет путей сообщения, кафедра прикладной математики, ул. Образцова, 15, 101475 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-1450).

от ранее полученных результатов теорема 1 относится к уравнениям, которые не переписываются в дифференциальной форме (см. условие I) и к которым не применимы результаты [5] (см. также имеющуюся там библиографию). Основным результатом работы содержится в теореме 2, которая устанавливает аппроксимацию второго порядка для исходного семейства процессов. Причем, в отличие от результатов [4] и [5], в данном случае такой аппроксимацией также является решение уравнения Ито–Вольтерра, которое не переписывается в дифференциальной форме. Результаты работы несложно обобщаются на случай процессов $x^\varepsilon = (x_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$, $\varepsilon > 0$, представляющих собой решение стохастических уравнений Ито–Вольтерра, рассмотренных, в частности, в [6]. Полученные результаты без доказательства опубликованы в [8].

Автор искренне благодарен Р. Ш. Липцеру за постановку задачи и очень полезные обсуждения.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{R}}, \mathbf{P})$ — стохастический базис, на котором определен измеримый строго стационарный эргодический процесс $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbf{R}}$. Рассмотрим следующее уравнение Вольтерра:

$$x_t^\varepsilon = x_0 + \int_0^t b(t, x_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) ds \quad (1)$$

с неслучайным начальным условием $x_0^\varepsilon = x_0$. Пусть $\bar{x}_t$ — единственное решение уравнения

$$\bar{x}_t = x_0 + \int_0^t \overline{b(t, \bar{x}_s)} ds, \quad (2)$$

где $\overline{b(t, x)} = \mathbf{E}b(t, x, \xi_0)$.

Теорема 1. Пусть $b(t, x, z)$ — измеримая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

I. $|b(t, x, z)| \leq L$,

II. $|b(t_1, x_1, z) - b(t_2, x_2, z)| \leq L(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^\alpha)$, $\alpha > 0$.

Тогда

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{t \leq 1} |x_t^\varepsilon - \bar{x}_t| \right) = 0.$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим разность $|x_t^\varepsilon - \bar{x}_t|$. Положим $\Delta_t^\varepsilon = \sup_{s \leq t} |x_s^\varepsilon - \bar{x}_s|$. Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \Delta_t^\varepsilon &\leq \sup_{r \leq t} \left| \int_0^r \left(b(r, x_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) - \overline{b(r, \bar{x}_s)} \right) ds \right| \\ &\leq \sup_{r \leq t} \left| \int_0^r \left(b(r, x_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) - b(r, \bar{x}_s, \xi_{s/\varepsilon}) \right) ds \right| \\ &\quad + \sup_{r \leq t} \left| \int_0^r \left(b(r, \bar{x}_s, \xi_{s/\varepsilon}) - \overline{b(r, \bar{x}_s)} \right) ds \right| \\ &\leq C \int_0^t \Delta_s^\varepsilon ds + \sup_{r \leq t} \left| \int_0^r \left(b(r, \bar{x}_s, \xi_{s/\varepsilon}) - \overline{b(r, \bar{x}_s)} \right) ds \right|. \end{aligned}$$

Введем функцию $\varphi_t^\varepsilon(\tau)$ следующим образом:

$$\varphi_t^\varepsilon(\tau) = \sup_{r \leq t} \left| \int_0^r \left(b(r, \bar{x}_s, \xi_{s/\varepsilon}) - \overline{b(r, \bar{x}_s)} \right) ds \right|.$$

По теореме 9.6.1 [7] при всех $\tau \geq 0$

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varphi_t^\varepsilon(\tau)| = 0.$$

В силу условия II функция $\varphi_\varepsilon(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера по τ и, стало быть,

$$P\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\tau \leq 1} |\varphi_i^\varepsilon(\tau)| = 0.$$

Значит,

$$P\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\tau \leq t} |\varphi_r^\varepsilon(\tau)| = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\Delta_i^\varepsilon \leq C \int_0^t \Delta_s^\varepsilon ds + \sup_{\tau \leq t} |\varphi_i^\varepsilon(t)|.$$

Доказательство теоремы 1 следует из леммы Гронуолла–Беллмана.

На втором этапе будет построена диффузионная аппроксимация для семейства $Y^\varepsilon = (Y_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$, где $Y_i^\varepsilon = (x_i^\varepsilon - \bar{x}_i)/\sqrt{\varepsilon}$.

Пусть « $\xrightarrow{d}$ » обозначает слабую сходимость распределений в пространстве Скорохода $D[0, 1]$ (см., например, [7]).

Обозначим $\mathcal{G}_t^\varepsilon = \sigma\{\xi_s: -\infty < s \leq t\}$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия (функция $g(t, s, x)$ обозначает любую из функций $b(t, s, x)$ или $b'_x(t, s, x)$):

III. Для всех z функция $b(t, x, z)$ дифференцируема по x и t и выполняются следующие неравенства:

$$\sup_{t, x, z} \left(|b'_x(t, x, z)| + |b'_t(t, x, z)| \right) \leq L,$$

$$\text{IV.} \quad \left| b'_x(t_1, x_1, z) - b'_x(t_2, x_2, z) \right| + \left| b'_t(t_1, x_1, z) - b'_t(t_2, x_2, z) \right| \leq L(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^\beta), \quad \beta > 0,$$

$$\text{V.} \quad \int_0^\infty \sup_{t, x} \left(\mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(g(t, x, \xi_s) - \overline{g(t, x)} \middle| \mathcal{G}_0^\varepsilon \right) \right)^2 \right)^{1/2} ds < \infty,$$

$$\text{VI.} \quad \int_0^\infty \mathbb{E} \left(b(t, u, \xi_s) - \overline{b(t, u)} \right) \left(b(t, u, \xi_0) - \overline{b(t, u)} \right) ds \geq \delta > 0.$$

Тогда

$$Y^\varepsilon \xrightarrow{d} Y,$$

где Y_i — решение уравнения Ито–Вольтерра

$$Y_t = \int_0^t \overline{b'_x(t, \bar{x}_s)} Y_s ds + \int_0^t G(t, s) dW_s, \quad (3)$$

$W = (W_t)_{t \geq 0}$ есть винеровский процесс, $\bar{x}_t$ — решение уравнения (2), а функция $G(t, s)$ — решение уравнения Вольтерра

$$\int_0^{t \wedge s} G(t, l) G(s, l) dl = \int_0^{t \wedge s} H(t, s, \bar{x}_l) dl \quad (4)$$

и

$$H(t, s, x) = \int_0^\infty \left(\mathbb{E} \left(b(t, x, \xi_r) - \overline{b(t, x)} \right) b(s, x, \xi_0) - \overline{b(s, x)} \right) + \mathbb{E} \left(b(s, x, \xi_r) - \overline{b(s, x)} \right) \left(b(t, x, \xi_0) - \overline{b(t, x)} \right) dr.$$

Следствие 1. При предположениях III–VI уравнение (4) имеет единственное решение в классе интегрируемых с квадратом функций $G(t, s)$.

Доказательство. В силу уравнений (1)–(2), имеем:

$$\begin{aligned} Y_t^\varepsilon &= \frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}_t}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left(b(t, x_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) - \overline{b(t, \bar{x}_s)} \right) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left(b(t, x_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) - b(t, \bar{x}_s, \xi_{s/\varepsilon}) \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left(b(t, \bar{x}_s, \xi_{s/\varepsilon}) - \overline{b(t, \bar{x}_s)} \right) ds \\ &= \int_0^t b'_x(t, \bar{x}_s, \xi_{s/\varepsilon}) Y_s^\varepsilon ds + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left(b(t, \bar{x}_s, \xi_{s/\varepsilon}) - \overline{b(t, \bar{x}_s)} \right) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sup_{t \leq 1} |\bar{x}_t^\varepsilon - \bar{x}_t|) = 0$ в силу теоремы 1.

Рассмотрим отдельно второе слагаемое в (5) и найдем его предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого предварительно решим вопрос о слабой сходимости следующего выражения:

$$y_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t f(t, g(s), \xi_{s/\varepsilon}) ds,$$

где $g(s)$ — непрерывная функция, а $f(t, g(s), y)$ — гладкая по t функция, $\mathbf{E}f(t, g(s), \xi_0) = 0$. Зафиксируем набор $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ и рассмотрим n -мерный вектор z_t^ε с координатами

$$z_t^{\varepsilon, i} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t f_i(s, \xi_{s/\varepsilon}) ds, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $f(s, \xi_{s/\varepsilon})$ есть n -мерный вектор с координатами $f_i(s, \xi_{s/\varepsilon}) = I(s \leq t_i) f(t_i, g(s), \xi_{s/\varepsilon})$, $i = 1, \dots, n$, $I(A)$ — индикатор множества A . Нетрудно видеть, что $y_{t_i}^\varepsilon = z_{t_i}^{\varepsilon, i}$. По задаче 9.2.4 [7]

$$z_t^\varepsilon \xrightarrow{d} \int_0^t \lambda^{1/2}(s) dW_s,$$

где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ есть n -мерный винеровский процесс, не зависящий от ξ , а элементы матрицы $\lambda(s)$ имеют вид

$$\lambda_{i,j}(s) = \int_0^\infty \left(\mathbf{E} \left(f_i(s, \xi_r) f_j(s, \xi_0)^* + f_j(s, \xi_0) f_i(s, \xi_r)^* \right) \right)_{i,j} dr.$$

Таким образом, справедливо следующее равенство:

$$\lambda_{i,j}(s) = \int_0^\infty \mathbf{E} \left(f_i(s, \xi_r) f_j(s, \xi_0) + f_i(s, \xi_0) f_j(s, \xi_r) \right) dr.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ есть произвольный набор действительных чисел. Вычислим предельную характеристическую функцию вектора $(y_{t_1}^\varepsilon, y_{t_2}^\varepsilon, \dots, y_{t_n}^\varepsilon)$. В силу соотношения

$$z_t^\varepsilon \xrightarrow{d} z_t, \quad \text{где } z_t = \int_0^t \lambda^{1/2}(s) dW_s,$$

и гауссовости вектора z_t , справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{l=1}^n \alpha_l y_{t_l}^\varepsilon \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{l=1}^n \alpha_l z_{t_l}^{\varepsilon, l} \right\} \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{l=1}^n \alpha_l z_{t_l}^l \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\sum_{l=1}^n \alpha_l \int_0^{t_l} \sum_{k=1}^n \lambda_{l,k}^{1/2}(s) dW_s^k \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_l \alpha_m \int_0^{t_l \wedge t_m} \sum_{k=1}^n \lambda_{l,k}^{1/2}(s) \lambda_{k,m}^{1/2}(s) ds \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_l \alpha_m \int_0^{t_l \wedge t_m} \lambda_{l,m}(s) ds \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\alpha R \alpha^*) \right\},
 \end{aligned}$$

где матрица $(R_{l,j})$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 R_{l,m} &= \int_0^{t_l \wedge t_m} \lambda_{l,m}(s) ds \\
 &= \int_0^{t_l \wedge t_m} \int_0^\infty \mathbb{E} \left(f_l(s, \xi_r) f_m(s, \xi_0) + f_l(s, \xi_0) f_m(s, \xi_r) \right) dr ds \\
 &= \int_0^{t_l \wedge t_m} \int_0^\infty \mathbb{E} \left(f(t_l, g(s), \xi_r) f(t_m, g(s), \xi_0) \right. \\
 &\quad \left. + f(t_l, g(s), \xi_0) f(t_m, g(s), \xi_r) \right) dr ds.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для любого набора $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ вектор

$$y_{t_i}^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{t_i} f(t_i, g(u), \xi_{u/\varepsilon}) du \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, R(t_i, t_j)), \quad (6)$$

где $R(t_i, t_j) = \int_0^{t_i \wedge t_j} H(t_i, t_j, u) du$, а

$$\begin{aligned}
 H(t_i, t_j, u) &= I(u \leq t_i \wedge t_j) \int_0^\infty \mathbb{E} \left(f(t_i, g(u), \xi_r) f(t_j, g(u), \xi_0) \right. \\
 &\quad \left. + f(t_j, g(u), \xi_0) f(t_i, g(u), \xi_r) \right) dr.
 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в слабой компактности семейства процессов y^ε в $D[0, 1]$. Действительно, в силу условия III процесс y_t^ε может быть переписан в виде

$$y_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t f(s, g(s), \xi_{s/\varepsilon}) ds + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^s f'_s(s, g(r), \xi_{r/\varepsilon}) dr ds.$$

Значит, в соответствии с соотношением 9.2.5 [7] и в силу условия V справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left(\sup_{t \leq 1} \left| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^s f'_s(s, g(r), \xi_{r/\varepsilon}) dr ds \right| \right) \\
 &\leq \int_0^1 \mathbb{E} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left| \int_0^s f'_s(s, g(r), \xi_{r/\varepsilon}) dr ds \right| \\
 &\leq 2 \int_0^1 \sup_{s \leq 1} \int_0^\infty \left(\mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(f'_s(s, g(r), \xi_r) \mid \mathcal{G}_0^\varepsilon \right) \right)^2 \right)^{1/2} dr ds < \infty.
 \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 9.6.2 [7] выполнены соотношения

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \leq 1} |y_t^\varepsilon| \geq C \right\} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1-h} |y_{t+h}^\varepsilon - y_t^\varepsilon| \geq \eta \right\} = 0,$$

что доказывает слабую компактность семейства процессов y^ε в $D[0, 1]$. Стало быть, в силу соотношения (6)

$$y^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\cdot f(t, g(s), \xi_{s/\varepsilon}) ds \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, R(t, s)),$$

где $R(t, s) = \int_0^{t \wedge s} H(t, s, u) du$, а

$$H(t, s, u) = I(u \leq t \wedge s) \int_0^\infty \mathbb{E} \left(f(t, g(u), \xi_r) f(s, g(u), \xi_0) + f(t, g(u), \xi_0) f(s, g(u), \xi_r) \right) dr.$$

Изучим функцию $R(t, s)$ более подробно, точнее говоря, докажем, что гауссовский процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с такими характеристиками является семимартингалом. Для этого воспользуемся теоремой 4.9.2 [7] и докажем, что справедливо неравенство

$$\frac{|\mathbb{E}(X_t - X_s) \int_0^s f_s(v) dX_v|}{\sqrt{\mathbb{E}(\int_0^s f_s(v) dX_v)^2}} \leq C|t - s| \quad (7)$$

для любой простой функции $f_s(v)$, т.е. $f_s(v) = \sum_{i=1}^n f_i I(t_i < v \leq t_{i+1})$.

Докажем некоторые вспомогательные неравенства относительно процесса X_t . Пусть $t_i \leq t_{i+1} \leq t_j \leq t_{j+1}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) &= R(t_{i+1}, t_{j+1}) - R(t_{i+1}, t_j) - R(t_i, t_{j+1}) + R(t_i, t_j) \\ &= \int_0^{t_{i+1}} (H(t_{i+1}, t_{j+1}, u) - H(t_{i+1}, t_j, u)) du \\ &\quad - \int_0^{t_i} (H(t_i, t_{j+1}, u) - H(t_i, t_j, u)) du \\ &= \int_0^{t_{i+1}} (t_{j+1} - t_j) \int_0^1 H'_s(t_{i+1}, \alpha t_j + (1 - \alpha)t_{j+1}, u) d\alpha du \\ &\quad - \int_0^{t_i} (t_{j+1} - t_j) \int_0^1 H'_s(t_i, \alpha t_j + (1 - \alpha)t_{j+1}, u) d\alpha du \\ &= (t_{j+1} - t_j) \int_{t_i}^{t_{i+1}} du \left(\int_0^1 H'_s(t_i, \alpha t_j + (1 - \alpha)t_{j+1}, u) d\alpha \right) \\ &\quad + (t_{j+1} - t_j)(t_{i+1} - t_i) \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 d\beta d\alpha \int_0^{t_i} H''_{st}(\beta t_i + (1 - \beta)t_{i+1}, \alpha t_j + (1 - \alpha)t_{j+1}, u) du \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 &= \int_0^{t_{i+1}} H(t_{i+1}, t_{i+1}, u) du - 2 \int_0^{t_i} H(t_{i+1}, t_i, u) du \\ &\quad + \int_0^{t_i} H(t_i, t_i, u) du = \int_0^{t_{i+1}} H(t_{i+1}, t_{i+1}, u) du - \int_0^{t_i} H(t_{i+1}, t_i, u) du \\ &\quad - \int_0^{t_i} (H(t_{i+1}, t_i, u) - H(t_i, t_i, u)) du \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} H(t_{i+1}, t_{i+1}, u) du + (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{t_i} du (H''_{st}(\beta t_i + (1 - \beta)t_{i+1}, \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i+1}, u) d\beta d\alpha). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\zeta_{i,j} = \int_0^1 \int_0^1 d\beta d\alpha \int_0^{t_i} H''_{st}(\beta t_i + (1 - \beta)t_{i+1}, \alpha t_j + (1 - \alpha)t_{j+1}, u) du,$$

$$i, j = 1, \dots, n,$$

$$\gamma_{i,j}^u = \int_0^1 H'_s(t_i, \alpha t_j + (1-\alpha)t_{j+1}, u) d\alpha, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad t_i \leq u \leq t_{i+1}.$$

По задаче 9.2.4 [7] $\zeta_{i,j}$ и $\gamma_{i,j}^u$ — ограниченные симметричные неотрицательно определенные матрицы. Обозначим, далее, $\Delta X_{t_i} = X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Справедливы следующие равенства:

$$E\Delta X_{t_i} \Delta X_{t_j} = (\zeta_{i,j} + \gamma_{i,j}^u) \Delta t_i \Delta t_j, \quad (8)$$

$$E(\Delta X_{t_i})^2 = \zeta_{i,i}(\Delta t_i)^2 + H(t_{i+1}, t_{i+1}, u) \Delta t_i. \quad (9)$$

Пусть теперь $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq s \leq t$ и $f_s(v)$ — простая функция, т.е. $f_s(v) = \sum_{i=1}^n f_i I(t_i < v \leq t_{i+1})$. В соответствии с (8) имеем:

$$\begin{aligned} \left| E(X_t - X_s) \int_0^s f_s(v) dX_v \right| &= \left| \sum_{i=1}^n E(X_t - X_s) f_i \Delta X_{t_i} \right| \\ &= (t-s) \sum_{i=1}^n f_i \Delta t_i (\zeta_{i,s} + \gamma_{i,s}) \leq C(t-s) \sum_{i=1}^n f_i \Delta t_i. \end{aligned}$$

Аналогично, в соответствии с (9) имеем:

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^s f_s(v) dX_v\right)^2 &= E\left(\sum_{i=1}^n f_i \Delta X_{t_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2 E(\Delta X_{t_i})^2 \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} f_i f_j E\Delta X_{t_i} \Delta X_{t_j} = \sum_{i=1}^n f_i^2 (\Delta t_i)^2 \zeta_{i,i} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} f_i f_j \Delta t_i \Delta t_j (\zeta_{i,j} + \gamma_{i,j}^u) + \sum_{i=1}^n f_i^2 H(t_{i+1}, t_{i+1}, u) \Delta t_i \\ &= \sum_{i,j} f_i f_j \Delta t_i \Delta t_j (\zeta_{i,j} + \gamma_{i,j}^u) + \sum_{i=1}^n f_i^2 H(t_{i+1}, t_{i+1}, u) \Delta t_i \\ &- \sum_{i=1}^n (f_i^2 \gamma_{i,i}(\Delta t_i))^2 \geq \delta \sum_{i=1}^n f_i^2 \Delta t_i, \end{aligned}$$

в силу условия VI и неотрицательной определенности матриц $\zeta_{i,j}$ и $\gamma_{i,j}$. Обозначим левую часть (7) через J . В силу неравенства Коши справедлива следующая оценка:

$$J \leq \frac{C(t-s) \sum_{i=1}^n |f_i| \Delta t_i}{\delta \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2 \Delta t_i}} \leq \frac{C(t-s) \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2 \Delta t_i} \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta t_i}}{\delta \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2 \Delta t_i}} \leq C_1 |t-s|.$$

Стало быть, X_t — семимартингал, $X_t = M_t + A_t$, где (X_t, M_t, A_t) — гауссовский процесс.

Докажем, что X_t имеет обновляющий процесс кратности 1. Тогда по определению (см. [9]) будет справедливо представление

$$X_t = \int_0^t G(t, s) dW_s \quad (10)$$

с квадратично интегрируемой функцией $G(t, s)$. Так как (X_t, M_t, A_t) — гауссовский

процесс, то по теореме 4.9.5 [7] справедливо равенство

$$\begin{aligned}\langle M \rangle_t &= \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\Delta X_{t_i})^2 \\ &= \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\zeta_{i,i}(\Delta t_i)^2 + H(t_{i+1}, t_{i+1}, u) \Delta t_i \right) \quad (t_i \leq u \leq t_{i+1}) \\ &= \int_0^t H(s, s, s) ds.\end{aligned}$$

Значит,

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t H(s, s, s) ds, \quad (11)$$

где, в силу условия VI, $H(s, s, s) \geq \delta > 0$, и, стало быть, справедливо представление

$$M_t = \int_0^t \varphi(s) dW_s, \quad (12)$$

где $\varphi(s) = \sqrt{H(s, s, s)}$. По теореме 4.2 [9] для гауссовских процессов эквивалентность (совпадение типа обновляющего процесса) следует из эквивалентности распределений. Докажем, что распределение X (P_X) эквивалентно распределению мартингала M (P_M), т.е.

$$P_X \sim P_M, \quad (13)$$

тогда (10) будет справедливо в силу (12). Для доказательства (13) рассмотрим более подробно процесс ограниченной вариации A_t в представлении $X_t = M_t + A_t$. По теореме 17 [11] достаточно доказать представление $A_t = \int_0^t \gamma_s d\langle M \rangle_s$, а также соотношение

$$\mathbb{E} \int_0^1 \left(\frac{dA_s}{d\langle M \rangle_s} \right)^2 ds < \infty,$$

что в силу (11) эквивалентно

$$\mathbb{E} \int_0^1 \left(\frac{dA_s}{ds} \right)^2 ds < \infty. \quad (14)$$

Пусть (t_i) — точки отрезка $[0, 1]$ вида: $0 = t_0 < \frac{1}{2^n} \leq \dots \leq 1$, $t_i = \frac{i}{2^n}$. Рассмотрим последовательность случайных величин $A_{t_i}^n$:

$$A_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} I(t_i \leq t < t_{i+1}) \sum_{j=0}^{i-1} \mathbb{E}(\Delta X_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j}^n),$$

где $\mathcal{F}_{t_j}^n = \sigma\{X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_j}\}$. В силу (7) из доказательства теоремы 4.9.2 [7] следует оценка

$$\mathbb{E} |\mathbb{E}(\Delta X_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j}^n)| \leq C \Delta t_j,$$

стало быть, справедлива оценка $\mathbb{E} |\Delta A_{t_j}^n| \leq C \Delta t_j$, и, значит, по лемме Фату

$$\mathbb{E} |\Delta A_{t_j}| \leq C \Delta t_j, \quad \mathbb{E} (\Delta A_{t_j})^2 \leq C^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\Delta t_j)^2. \quad (15)$$

Для доказательства соотношения (14) воспользуемся леммой 2.36 [10] и покажем, что

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{n, (t_i)} \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta A_{t_i})^2}{\Delta t_i} < \infty \right\} = 1. \quad (16)$$

В силу соотношения (15) справедливо неравенство

$$E \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta A_{t_i})^2}{\Delta t_i} \leq C_1. \quad (17)$$

Как легко убедиться (в силу монотонности), соотношение (16) достаточно доказать для вложенных последовательностей разбиений, таких, что $\max \Delta t_i \rightarrow 0$, т.е. что

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta A_{t_i})^2}{\Delta t_i} < \infty \right\} = 1. \quad (18)$$

Соотношение (18) следует из (17) в соответствии с «законом 0 или 1» (см., например, лемму 4.9.1 [7]) и леммой Фату.

Значит, $X_t = \int_0^t G(t, s) dW_s$. Но тогда

$$R(t, s) = E \left(\int_0^t G(t, l) dW_l \right) \left(\int_0^s G(s, u) dW_u \right) = \int_0^{t \wedge s} G(t, l) G(s, l) dl,$$

что доказывает следствие теоремы 2.

Таким образом, равенство (5) может быть переписано в следующем виде:

$$Y_t^\varepsilon = \int_0^t b'_x(t, \bar{x}_s, \xi_s/\varepsilon) Y_s^\varepsilon ds + y_t^\varepsilon, \quad (19)$$

где $y_t^\varepsilon \xrightarrow{d} \int_0^t G(t, s) dW_s$. Введем процесс $\bar{Y}_t^\varepsilon$ как решение уравнения

$$\bar{Y}_t^\varepsilon = \int_0^t \bar{b}'_x(t, \bar{x}_s) \bar{Y}_s^\varepsilon ds + y_t^\varepsilon. \quad (20)$$

Нетрудно убедиться в том, что $P\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq 1} |\bar{Y}_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon| = 0$. Утверждение теоремы 2 будет следовать теперь из представления решений уравнений Вольтерра (см., например, [12])

$$\bar{Y}_t^\varepsilon = \int_0^t Q(t, s) y_s^\varepsilon ds,$$

где $Q(t, s)$ — резольвента для уравнения (3), и сильной единственности решения уравнения (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kryloff N., Bogoliuboff N. Les proprietes des probabilities en chaine. — C.R. Acad. Sci. Paris, 1937, v. 204, p. 1454–1456.
2. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с.
3. Веретенников А. Ю. О принципе усреднения для систем стохастических дифференциальных уравнений. — Матем. сб., 1990, т. 181, № 2, с. 256–268.
4. Liptser R., Stoyanov Y. Stochastic version on the Bogolyubov averaging principle for diffusion type processes. — In: Fifth International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Abstracts of Communications. Vol. 2. Vilnius: Matem. Kibernet. Inst., 1989, p. 171–172.
5. Бондарев Б. В. Неасимптотические методы статистики случайных процессов: Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. Донецк: Донецкий государственный ун-т, 1992, 358 с.

6. Ito I. On the existence and uniqueness of solutions of stochastics integral equations of the Volterra type. — Kodai Math. J., 1979, v. 2, № 2, p. 158–170.
7. Liptser R., Shiryaev A. Theory of martingales. Dordrecht: Klüwer, 1989, 800 p.
8. Kleptsina M. The diffusion approximation for Ito-Volterra processes. — In: Sixth International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Abstracts of Communications. Vol. 1. Vilnius: Matem. Kibernet. Inst., 1993, p. 181–183.
9. Розанов Ю. А. Теория обновляющих процессов. М.: Наука, 1974, 128 с.
10. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979, 591 с.
11. Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных распределений. II. — Матем. сб., 1979, т. 108 (150), № 1, с. 32–61.
12. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра. — В сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1977, с. 131–198.

Поступила в редакцию
24.XII.1993

© 1996 г.

МИХАЛЕВА Т. Л.*, ПИТЕРБАРГ В. И.**

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА ГАУССОВСКОГО ПОЛЯ С ПОСТОЯННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ¹⁾

Получены асимптотики хвоста распределения максимума для гауссовских центрированных полей, заданных на конечномерных гладких многообразиях, с постоянной дисперсией и широким набором локальных структур корреляций. Используется метод двойных сумм.

Ключевые слова и фразы: гауссовское поле, ковариационная функция, конечномерное многообразие, метод двойных сумм.

1. Введение. Основные результаты. Методы исследования асимптотического поведения распределения максимума гауссовского поля достаточно хорошо развиты. Наиболее универсальным из них является метод двойных сумм, введенный в [1], являющийся по сути сведением нахождения асимптотики к исследованию распределения максимума гауссовского поля на бесконечно малых параметрических множествах. Подробное описание и развитие этого метода дано в [2] и предшествующих публикациях. Наряду с этим в математической статистике, теории случайных процессов возникают задачи, приводящие к неисследованным моделям гауссовских полей. В настоящей работе рассмотрен достаточно широкий класс гауссовских центрированных полей с постоянной дисперсией, заданных на гладких конечномерных многообразиях. Он содержит в себе класс полей, рассмотренных в [3], поэтому в

*МГУ, Центр социологических исследований, ул. Мохова, 11, 103009 Москва, Россия.

**МГУ, мех.-матем. ф-т, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1437).