Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Л. Михалева, В. И. Питербург, О распределении максимума гауссовского поля с постоянной дисперсией на гладком многообразии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 438–451

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2958>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:37:13

6. Ito I. On the existence and uniqueness of solutions of stochastics integral equations of the Volterra type. — Kodai Math. J., 1979, v. 2, № 2, p. 158–170.
7. Liptser R., Shiryaev A. Theory of martingales. Dordrecht: Klüwer, 1989, 800 p.
8. Kleptsina M. The diffusion approximation for Ito-Volterra processes. — In: Sixth International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Abstracts of Communications. Vol. 1. Vilnius: Matem. Kibernet. Inst., 1993, p. 181–183.
9. Розанов Ю. А. Теория обновляющих процессов. М.: Наука, 1974, 128 с.
10. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979, 591 с.
11. Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных распределений. II. — Матем. сб., 1979, т. 108 (150), № 1, с. 32–61.
12. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра. — В сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1977, с. 131–198.

Поступила в редакцию
24.XII.1993

© 1996 г.

МИХАЛЕВА Т. Л.*, ПИТЕРБАРГ В. И.**

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА ГАУССОВСКОГО ПОЛЯ С ПОСТОЯННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ¹⁾

Получены асимптотики хвоста распределения максимума для гауссовских центрированных полей, заданных на конечномерных гладких многообразиях, с постоянной дисперсией и широким набором локальных структур корреляций. Используется метод двойных сумм.

Ключевые слова и фразы: гауссовское поле, ковариационная функция, конечномерное многообразие, метод двойных сумм.

1. Введение. Основные результаты. Методы исследования асимптотического поведения распределения максимума гауссовского поля достаточно хорошо развиты. Наиболее универсальным из них является метод двойных сумм, введенный в [1], являющийся по сути сведением нахождения асимптотики к исследованию распределения максимума гауссовского поля на бесконечно малых параметрических множествах. Подробное описание и развитие этого метода дано в [2] и предшествующих публикациях. Наряду с этим в математической статистике, теории случайных процессов возникают задачи, приводящие к неисследованным моделям гауссовских полей. В настоящей работе рассмотрен достаточно широкий класс гауссовских центрированных полей с постоянной дисперсией, заданных на гладких конечномерных многообразиях. Он содержит в себе класс полей, рассмотренных в [3], поэтому в

*МГУ, Центр социологических исследований, ул. Мохова, 11, 103009 Москва, Россия.

**МГУ, мех.-матем. ф-т, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1437).

настоящей работе приведены доказательства результатов, анонсированных в [3]. Поводом для написания данной статьи послужила работа [4], в которой введена статистическая процедура, приводящая к исследованию высоких выбросов гауссовского поля на сфере S_{d-1} с постоянной дисперсией и нулевым математическим ожиданием. Существуют процедуры, основанные на идеях работы [4], приводящие к гауссовским полям на торе. Кроме того, в работах Г. Линдгрена [5]–[7], а также в [8], посвященных исследованию χ^2 -процессов, очевидным образом возникают гауссовские поля на цилиндре.

Пусть G_n — многообразие неотрицательно определенных $(n \times n)$ -матриц с евклидовой нормой, равной единице. Зададим $\alpha > 0$. На борелевских подмножествах многообразия G_n зафиксируем конечную меру $\mu(dC)$ со следующим свойством невырожденности: для любого $t \neq 0$

$$\|t\|_\mu = \int_{G_n} (Ct, t)^{\alpha/2} \mu(dC) > 0. \quad (1)$$

О п р е д е л е н и е 1. Корреляционную функцию $r(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ однородного поля назовем μ -правильной, если существует такая $n \times n$ -матрица Q полного ранга, что для любого t

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - r(\tau^{2/\alpha} Qt)}{\tau^2} = \int_{G_n} (Ct, t)^{\alpha/2} \mu(dC).$$

Мера μ задает локальную структуру корреляции случайного поля. Например, если μ есть δ -мера единичной матрицы, то

$$r(Qt) = 1 - \|t\|^\alpha + o(\|t\|^\alpha), \quad t \rightarrow 0. \quad (2)$$

Если μ сосредоточена на диагональных матрицах с единственным ненулевым элементом, то

$$r(Qt) = 1 - \sum_{i=1}^n c_i |t_i|^\alpha + o\left(\sum_{i=1}^n c_i |t_i|^\alpha\right), \quad t \rightarrow 0.$$

Рассматривая смеси мер, сосредоточенных на матрицах, являющихся линейными преобразованиями вышеприведенных, можно получить достаточно широкий набор локальных структур корреляций. Особым является случай $\alpha = 2$, поскольку квадратичная форма (Ct, t) , как линейная функция от C , интегрируется, и независимо от структурной меры μ корреляционная функция поля имеет разложение

$$r(t) = 1 - \frac{1}{2}(Dt, t) + o(\|t\|^2), \quad t \rightarrow 0, \quad (3)$$

где D — ковариационная матрица градиента поля, которая невырожденна в силу условия невырожденности меры μ .

О п р е д е л е н и е 2. Скажем, что ковариационная функция $r(t_1, t_2)$ неоднородного поля $X(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условию *локальной стационарности* (ЛС), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $s \in T$ существует такая невырожденная матрица D_s , что $\forall t_1, t_2 \in T$

$$\begin{aligned} \|s - t_1\| \leq \delta, \quad \|s - t_2\| \leq \delta, \\ (1 - \varepsilon) \|t_1 - t_2\|_\mu \leq 1 - r(D_s t_1, D_s t_2) \leq (1 + \varepsilon) \|t_1 - t_2\|_\mu. \end{aligned} \quad (4)$$

Прежде чем привести основные результаты настоящей работы, введем обобщенные константы Пикандса, порожденные функционалом $\|t\|_\mu$.

Пусть $L \subset \mathbf{R}^n$ — линейное подпространство размерности r , $0 < r < n$. Тогда существует ортогональное преобразование U пространства $\mathbf{R}^n$ такое, что $L = U P_r \mathbf{R}^n$, где P_r — ортогональный проектор вдоль координат $r+1, \dots, n$ пространства $\mathbf{R}^n$.

Рассмотрим гауссовское поле $\chi(t)$ на $\mathbf{R}^n$ с непрерывными траекториями и

$$E\chi(t) = -\|t\|_\mu, \quad \text{cov}(\chi(t_1), \chi(t_2)) = \|t_1\|_\mu + \|t_2\|_\mu - \|t_1 - t_2\|_\mu.$$

Существование поля $\chi(t)$ следует из доказательства леммы 2. Пусть K — компакт, положим

$$H_\alpha^\mu(K) = 1 + \int_0^\infty e^s P\left\{\max_{t \in K} \chi(t) > s\right\} ds. \quad (5)$$

Обозначим через $K(\lambda)$ куб из L с ребром длины λ :

$$K(\lambda) = UK_0(\lambda), \\ K_0(\lambda) = \left\{t: t_1 \in \left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right], \dots, t_r \in \left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right], t_{r+1} = \dots = t_n = 0\right\}.$$

Для константы

$$H_\alpha^{\mu, U, r} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha^\mu(K(\lambda))}{\lambda^r}, \quad (6)$$

как и для классической константы Пикандса, имеем

$$0 < H_\alpha^{\mu, U, r} < \infty$$

(лемма 4).

Обозначим $\Psi(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}$.

Теорема 1. Пусть $X(t)$ — центрированное гауссовское поле, заданное на $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим гладкий компакт $M^r \subset \mathbf{R}^n$, $\dim M^r = r$, где $0 < r \leq n$. Пусть ковариационная функция $r(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in M^r$, поля $X(t)$ удовлетворяет условию локальной стационарности. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_{t \in M^r} X(t) > x\}}{x^{2r/\alpha} \Psi(x)} = \int_{M^r} H_\alpha^{\mu, U_s, r} ds,$$

где $U_s P_r \mathbf{R}^n$ есть r -мерное линейное подпространство, параллельное касательному многообразию для M^r в точке s .

Теорема 2. Пусть $X(t)$ — дифференцируемое в среднем квадратическом центрированное гауссовское поле, заданное на $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим гладкий компакт $M^r \subset \mathbf{R}^n$, $\dim M^r = r$, где $0 < r \leq n$. Пусть ковариационная функция $r(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in M^r$, поля $X(t)$ удовлетворяет условию локальной стационарности. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_{t \in M^r} X(t) > 0\}}{x^r \Psi(x) (\sqrt{2\pi})^{-r}} = \int_{M^r} |\det \widetilde{D}_s|^{1/2} ds,$$

где $\widetilde{D}_s$ — ковариационная матрица проекции градиента поля $X(t)$ на касательное многообразие для M^r в точке s .

Доказательство этих результатов проводится по следующей схеме. Сначала мы рассматриваем гауссовские однородные поля на линейных подпространствах пространства $\mathbf{R}^n$, получая для них асимптотики хвостов распределений максимумов (теоремы 6 и 7). Доказательство первой из этих теорем проводится по стандартной схеме метода двойных сумм. Мы сначала рассматриваем хвост распределения максимума однородного поля на бесконечно малом параллелепипеде (лемма 2). Используя затем универсальную лемму 3, мы избавляемся при помощи неравенства Бонферрони от требования бесконечной малости параметрического множества. Теорема 7 представляет собой вариант теоремы 4 для дифференцируемого в среднем

квадратическом однородного гауссовского поля, однако в доказательстве она не нуждается, так как по сути является переформулировкой теоремы из [9]. Доказательства основных результатов существенно опираются на теоремы 3 и 5. Многообразие M^* разбивается на достаточно малые куски, на каждом из которых хвост распределения максимума рассматриваемого поля при помощи неравенства Слепяна (теорема 5) приближается хвостом распределения максимума некоторого однородного гауссовского поля. Затем используется теорема 6 (теорема 7 в гладком случае). Переход ко всему многообразию M^* основан на аналогичной доказательству предыдущих теорем схеме: неравенство Бонферрони плюс оценка вероятности «двойного события» большого выброса траектории гауссовского поля на двух малых множествах одновременно. При этом существенно используется неравенство Бореля (теорема 3) — достаточно точное неравенство для хвоста распределения максимума гауссовского поля.

2. Вспомогательные результаты. Следующие три важные теоремы приводятся здесь для удобства читателя. Первая из них — неравенство Бореля [9].

Теорема 3. Пусть $X(t)$, $t \in T$, — действительный сепарабельный гауссовский процесс, заданный на произвольном параметрическом множестве T , a — действительное число и для них выполняются условия

$$\sigma^2 = \sup_T \text{Var} X(t) < \infty, \quad m = \sup_T EX(t) < \infty$$

и

$$P \left\{ \sup_T X(t) - EX(t) \geq a \right\} \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда для всех x

$$P \left\{ \sup_T X(t) > x \right\} \leq 2\bar{\Phi} \left(\frac{x - m - a}{\sigma} \right),$$

где

$$\bar{\Phi}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\} dx.$$

Следующая теорема является нужным нам частным случаем теоремы из [8].

Теорема 4. Пусть X_t , $t \in \mathbb{R}^n$, — гауссовское сепарабельное однородное поле на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, дифференцируемое в среднем квадратическом, T — замкнутое ограниченное жорданово множество, лебегова мера которого $|T| > 0$. Пусть $EX_t = 0$,

$$EX_t X_s = r(t-s) < r(0) = 1$$

для всех $s, t \in T$, $s \neq t$. Положим $D = E(\text{grad} X_t)^T \text{grad} X_t$, где $\text{grad} X_t$ — вектор-строка. Тогда при $x \rightarrow \infty$

$$P \left\{ \sup_{t \in T} X_t > x \right\} = (\sqrt{2\pi})^{-n-1} \sqrt{\det D} |T| x^{n-1} e^{-x^2/2} (1 + o(1)).$$

Кроме этих двух теорем мы будем использовать лемму сравнения Слепяна [11].

Теорема 5. Пусть гауссовские случайные функции X_t и Y_t , $t \in T$, удовлетворяют условиям теоремы 3. Если для ковариационных функций $r_X(t, s)$ и $r_Y(t, s)$ выполнены соотношения

$$r_X(t, t) \equiv r_Y(t, t), \quad t \in T, \quad r_X(t, s) \leq r_Y(t, s), \quad t, s \in T,$$

и, кроме того,

$$EX_t \equiv EY_t, \quad t \in T,$$

то для любого x

$$P\left\{\sup_{t \in T} X_t < x\right\} \leq P\left\{\sup_{t \in T} Y_t < x\right\}.$$

Нам понадобится одно простое неравенство, связывающее введенный выше функционал $\|t\|_\mu$ с нормой $\|t\|$.

Лемма 1. *Найдется такое положительное число $\gamma > 0$, что*

$$\|t\|_\mu \geq \gamma \|t\|^\alpha$$

для всех t .

Доказательство. Пусть e — единичный вектор, h — число, тогда в силу определения

$$\|he\|_\mu = h^\alpha \|e\|_\mu = \int_{G_n} (Ce, e)^{\alpha/2} \mu(dC).$$

Подынтегральная функция непрерывна по e , в силу конечности меры μ непрерывен и интеграл. Учитывая при этом компактность единичной сферы G_n и невырожденность меры μ , получаем, что

$$\int_{G_n} (Ce, e)^{\alpha/2} \mu(dC) \geq \gamma > 0$$

для некоторого γ . Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $X(t)$ — гауссовское центрированное поле на $\mathbb{R}^n$, ковариационная функция которого μ -правильна, причем матрица Q единичная. Тогда для любого компакта K , содержащего 0, выполняется соотношение*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_{t \in x^{-2/\alpha} K} X(t) > x\}}{\Psi(x)} = H_\alpha^\mu(K).$$

Доказательство. Для K верны соотношения

$$P\left\{\max_{t \in x^{-2/\alpha} K} X(t) > x\right\} = P\{X(0) > x\} + P\left\{X(0) \leq x, \max_{t \in x^{-2/\alpha} K} X(t) > x\right\}.$$

Здесь первое слагаемое имеет порядок $\Psi(x)$, а второе слагаемое равно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-v^2/2} P\left\{\max_{t \in x^{-2/\alpha} K} X(t) > x \mid X(0) = v\right\} dv \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \int_0^\infty e^{s-s^2/(2x^2)} P\left\{\max_{t \in x^{-2/\alpha} K} X(t) > x \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right\} ds, \end{aligned}$$

где мы воспользовались заменой переменных $v = x - s/x$. Положим

$$\chi_x(t) = x \left(X(x^{-2/\alpha} t) - x \right) + s.$$

Тогда последний интеграл можно переписать в виде

$$\int_0^\infty e^{s-s^2/(2x^2)} P\left\{\max_{t \in K} \chi_x(t) > s \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right\} ds.$$

Для семейства гауссовских распределений, появившихся под интегралом, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\chi_x(t) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right) &= x \left(\mathbf{E}\left(X(x^{-2/\alpha}t) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right) - x \right) \\ &= -x^2(1 - r(x^{-2/\alpha}t)) + s(1 - r(x^{-2/\alpha}t)), \\ \mathbf{E}\left(\chi_x(0) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right) &= \mathbf{E}\left(\chi_x^2(0) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right) = 0, \\ \text{Var}\left(\chi_x(t_1) - \chi_x(t_2) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right) &= x^2 \left(\text{Var}\left[X(x^{-2/\alpha}t_1) - X(x^{-2/\alpha}t_2)\right] - \left[r(x^{-2/\alpha}t_1) - r(x^{-2/\alpha}t_2)\right]^2 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Из условия μ -правильности функции $r(t)$ при $x \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\chi_x(t) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right) &= -\|t\|_\mu + o(\|t\|_\mu), \\ \text{Var}\left(\chi_x(t_1) - \chi_x(t_2) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right) &= 2\|t_1 - t_2\|_\mu + o(\|t_1 - t_2\|_\mu). \end{aligned} \quad (8)$$

Из этих соотношений и определения функционала μ следует, что существует такая положительная константа, что для всех t_1, t_2 и всех достаточно больших x

$$\text{Var}\left(\chi_x(t_1) - \chi_x(t_2) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right) \leq C \sum_{i=1}^r |t_{1i} - t_{2i}|^\alpha. \quad (9)$$

Из этого неравенства и равенства $\chi_x(0) = 0$ п.н. следует, что семейство распределений

$$\mathbf{P}\left\{\chi_x \in (\cdot) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right\} \quad (10)$$

слабо компактно в $C(K)$. Из соотношений (7) и (8) следует также сходимость условных конечномерных распределений поля $\chi_x(t)$ к соответствующим конечномерным распределениям поля $\chi(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$. Функционал $\max_{t \in K} \chi(t)$ непрерывен в $C(K)$, поэтому для каждого s

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\max_{t \in K} \chi_x(t) \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right\} = \mathbf{P}\left\{\max_{t \in K} \chi(t) > s\right\}. \quad (11)$$

Для вероятности

$$\mathbf{P}\left\{\max_{t \in K} \chi_x(t) > s \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right\}$$

выполняются условия теоремы Бореля равномерно по s . Действительно, для любого $\delta > 0$ и всех достаточно больших x из (7) следует ограниченность условного математического ожидания процесса $\chi_x(t)$ величиной δs , из (8) следует равномерная по x и s ограниченность дисперсии, из слабой компактности семейства (10) и независимости от s распределений семейства (10) после центрирования следует существование числа a , одного и того же для всего семейства. Таким образом, из теоремы Бореля следует мажорируемая сходимость под знаком интеграла

$$\int_0^\infty e^{s-s^2/(2x^2)} \mathbf{P}\left\{\max_{t \in K} \chi_x(t) > s \mid X(0) = x - \frac{s}{x}\right\} ds,$$

при $x \rightarrow \infty$ и предел интеграла равен

$$\int_0^\infty e^s \mathbf{P}\left\{\max_{t \in K} \chi(t) > s\right\} ds.$$

Лемма доказана.

Обозначим $B(\epsilon) = \{t: \|t\|_\mu \leq \epsilon\}$ μ -шар радиуса ϵ и

$$\mu(A, B) = \inf_{t \in A, s \in B} \|t - s\|_\mu$$

— « μ -расстояние» между множествами A и B .

Лемма 3. Предположим, что корреляционная функция $r(t)$ гауссовского поля $X(t)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, μ -правильна, и пусть $t_0, \frac{1}{2} > t_0 > 0$, таково, что

$$1 - \frac{1}{2} \|t\|_\mu \geq r(t) \geq 1 - 2 \|t\|_\mu$$

для любого $t \in B(t_0)$. Тогда существует такая положительная константа F , что неравенство

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{x^{-2/\alpha} K'} X(t) \geq \varphi x, \sup_{x^{-2/\alpha} K''} X(t) \geq \psi x \right\} \\ & \leq F(\varphi + \psi)^{2r-1} V_r(K') V_r(K'') x^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{8} (\varphi + \psi)^2 x^2 - \frac{1}{32} (\varphi + \psi)^2 \mu(K', K'') \right\} \end{aligned}$$

имеет место для любых непересекающихся r -мерных параллелепипедов K', K'' из L , в которые можно поместить r -мерные кубы единичного объема, и для всех $\varphi \geq 1, \psi \geq 1, x \geq x_0$, где

$$x_0 = \inf \left\{ x: x^{-2/\alpha} K' \subset B\left(\frac{t_0}{4}\right), x^{-2/\alpha} K'' \subset B\left(\frac{t_0}{4}\right) \right\}.$$

Здесь $V_r(\cdot)$ обозначает r -мерный евклидов объем множества.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 6.6 из [2] и не приводится здесь из соображений объема настоящей публикации. Следующая теорема является обобщением теоремы 7.1 из [2] на случай произвольно расположенных линейных подпространств.

Теорема 6. Пусть на пространстве $\mathbb{R}^n$ задано гауссовское однородное центрированное поле $X(t)$, ковариационная функция $r(t)$ которого μ -правильна. Рассмотрим линейное подпространство $L = U P_r \mathbb{R}^n$, $\dim L = r$. Пусть некоторое множество $A \subset L \subset \mathbb{R}^n$ с жордановой границей и ненулевого объема ($V_r(A) > 0$) удовлетворяет условию

$$\sup_{t, s \in A, |t-s| \geq \delta} r(t-s) < 1$$

для любого $\delta > 0$. Тогда

$$P \left\{ \max_A X(t) > x \right\} = x^{2r/\alpha} \Psi(x) V_r(A) H_\alpha^{\mu, U, r} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

где константа $H_\alpha^{\mu, U, r}$ определена в (6), $0 < H_\alpha^{\mu, U, r} < \infty$.

Доказательство теоремы 6 мы разобьем на две части. Сначала докажем ее для случая $\text{diam } A < t_0$, где t_0 взято из леммы 3, — эта часть утверждения нам нужна для доказательства теоремы 1. А распространение ее утверждения на множества A произвольного диаметра будет следовать из теоремы 1.

Лемма 4. Пусть выполнены условия теоремы 6 и, кроме того, пусть $\text{diam } A < t_0$. Тогда имеет место утверждение теоремы 6.

Доказательство. Назовем λ -сетью кубическое покрытие подпространства L , порожденное сдвигами куба $x^{-2/\alpha} K(\lambda)$ вдоль координатных осей на расстояния, кратные длине его стороны. Обозначим $N_+(\lambda, A)$ число элементов λ -сети, имеющих с A непустое пересечение, $N_-(\lambda, A)$ — число элементов λ -сети, содержащихся в A .

В силу однородности поля $X(t)$

$$P\left\{\max_{t \in A} X(t) > x\right\} \leq N_+(\lambda, A) P\left\{\max_{t \in x^{-2/\alpha} K(\lambda)} X(t) > x\right\}. \quad (12)$$

К вероятности $P\{\max_{t \in x^{-2/\alpha} K(\lambda)} X(t) > x\}$ применим лемму 2. В силу жордановости множества A число $N_+(\lambda, A)$ асимптотически эквивалентно $x^{2r/\alpha} \lambda^{-r} V_r(A)$ при $x \rightarrow \infty$, поэтому

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_{t \in A} X(t) > x\}}{x^{2r/\alpha} \Psi(x) V_r(A)} \leq \frac{H_\alpha^\mu(K(\lambda))}{\lambda^r}. \quad (13)$$

Оценим теперь $P\{\max_{t \in A} X(t) > x\}$ снизу:

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{t \in A} X(t) > x\right\} &\geq N_-(\lambda, A) P\left\{\max_{t \in x^{-2/\alpha} K(\lambda)} X(t) > x\right\} \\ &- \sum_{k \neq l; k, l \in \mathbb{Z}^r} P\left\{\max_{t \in x^{-2/\alpha}(k\lambda + K(\lambda))} X(t) > x, \max_{t \in x^{-2/\alpha}(l\lambda + K(\lambda))} X(t) > x\right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Последняя сумма берется по таким $k, l \in \mathbb{Z}^r$, что кубы $x^{-2/\alpha}(k\lambda + K(\lambda))$ и $x^{-2/\alpha}(l\lambda + K(\lambda))$ имеют непустое пересечение с A . Эта двойная сумма (обозначим ее Σ_2) имеет оценку сверху:

$$\Sigma_2 \leq N_+(\lambda, A) \sum_{k \neq 0} P\left\{\max_{t \in x^{-2/\alpha} K(\lambda)} X(t) > x, \max_{t \in x^{-2/\alpha}(k\lambda + K(\lambda))} X(t) > x\right\}. \quad (15)$$

Слагаемое в сумме справа обозначим через p_k . В случае, когда $K(\lambda)$ и $k\lambda + K(\lambda)$ не имеют общих вершин, воспользуемся леммой 3. В силу леммы 1

$$\begin{aligned} \mu(K(\lambda), k\lambda + K(\lambda)) &\geq \gamma \max_{t \in K(\lambda), s \in k\lambda + K(\lambda)} \|t - s\|^\alpha \\ &\geq \gamma \max_i |k_i| - 1^\alpha \lambda^\alpha \geq \gamma \max_i \frac{|k_i|^\alpha}{2^\alpha} \lambda^\alpha \geq \frac{\gamma}{4} \max_i |k_i|^\alpha \lambda^\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому из леммы 3 выводим, что

$$p_k \leq C \Psi(x) \lambda^{2r} \exp\left\{-\frac{\gamma}{32} \max_i |k_i|^\alpha \lambda^\alpha\right\} \quad (16)$$

для всех $\lambda > 1$ и достаточно больших x .

Рассмотрим теперь случай соседних кубов $K_1 = K(\lambda)$ и $K_2 = k\lambda + K(\lambda)$. Будем считать, что $k = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^r$, остальные случаи рассматриваются аналогично, и для них верно окончательное неравенство (20). Рассмотрим параллелепипед $K'_2 = UK'_{20}$, где

$$\begin{aligned} K'_{20} &= \frac{k\lambda}{x^{2/\alpha}} + \left[\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda}}{2x^{2/\alpha}} \leq t_1 \leq \frac{\lambda}{2x^{2/\alpha}} \right] \\ &\times \left[\frac{-\lambda}{2x^{2/\alpha}} \leq t_2 \leq \frac{\lambda}{2x^{2/\alpha}} \right] \times \dots \times \left[\frac{-\lambda}{2x^{2/\alpha}} \leq t_r \leq \frac{\lambda}{2x^{2/\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

Тогда в силу леммы 1

$$\mu(x^{2/\alpha} K_1, x^{2/\alpha} K'_2) \geq \gamma \frac{\lambda^\alpha}{2^\alpha} \geq \frac{\gamma}{4} \lambda^\alpha. \quad (17)$$

Обозначим $K''_2 = K_2 \setminus K'_2$. Имеем:

$$p_k \leq P\left\{\max_{K''_2} X(t) > x\right\} + P\left\{\max_{K_1} X(t) > x, \max_{K'_2} X(t) > x\right\}. \quad (18)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части применим лемму 3, воспользовавшись оценкой (17) μ -расстояния между соответствующими параллелепипедами. Для оценки первого слагаемого в правой части (18) воспользуемся леммой 2 и свойством константы Пикандса H :

Существует такая постоянная C , что для любого параллелепипеда $K \subset L$ такого, что в него можно поместить куб единичного объема, выполнено

$$H_{\alpha}^{\mu}(K) \leq C V_r(K). \quad (19)$$

Это неравенство следует из леммы 1 и неравенства Слепяна, мы его докажем в конце доказательства теоремы. А сейчас продолжим доказательство. Объем множества $x^{2/\alpha} K_2''$ равен $\frac{1}{2} \lambda^{r-1/2}$, поэтому, учитывая неравенство (19), а также (17), (18), леммы 2 и 3, получаем оценку сверху для p_K в случае соседних кубов:

$$p_K \leq C_2 \Psi(x) \left[\lambda^{r-1/2} + \lambda^{2r} \exp \left\{ -\frac{\gamma \lambda^{\alpha}}{32} \right\} \right] \quad (20)$$

для некоторой константы C_2 , всех достаточно больших λ и всех достаточно больших x .

Объединяя оценки для p_K в случаях соседних и несоседних кубов, получаем для некоторой константы C_3 и всех достаточно больших L :

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_A X(t) > x\}}{x^{2r/\alpha} \Psi(x) V_r(A)} \geq \frac{H_{\alpha}^{\mu}(K(L))}{L^r} - C_3 L^{-1/2}. \quad (21)$$

Из неравенств (13) и (21) следует, что

$$\begin{aligned} \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{H_{\alpha}^{\mu}(K(L))}{L^r} &\leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_{t \in A} X(t) > x\}}{x^{2r/\alpha} \Psi(x) V_r(A)} \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_{t \in A} X(t) > x\}}{x^{2r/\alpha} \Psi(x) V_r(A)} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{H_{\alpha}^{\mu}(K(\lambda))}{\lambda^r}, \end{aligned}$$

откуда получаем конечность константы $H_{\alpha}^{\mu, U, r}$. Покажем ее положительность. Из (13) и (21) следует, что

$$\frac{H_{\alpha}^{\mu}(K(\lambda))}{\lambda^r} \geq \frac{H_{\alpha}^{\mu}(K(L))}{L^r} - C_3 L^{-1/2}$$

для всех L и λ . Если бы вычитаемое в правой части этого неравенства было экспоненциально мало по L , то, выбрав L таким, чтобы правая часть была положительна, мы докажем положительность константы $H_{\alpha}^{\mu, U, r}$, переходя к пределу по λ . Сейчас мы получим желаемое неравенство. Наряду с λ -сетью рассмотрим совокупность кубов из этой цепи, полученных из куба $x^{-2/\alpha} K(\lambda)$ сдвигами вдоль координатных осей на расстояние $2m\lambda^{-2/\alpha}$, где $m \in \mathbb{Z}$. Это подмножество λ -сети обозначим через K . Для вероятности

$$P\left\{ \max_{A \cup K} X(t) > x \right\}$$

имеют место неравенства (12)–(16) с заменами чисел кубов N_+ и N_- на числа кубов из K , соответственно имеющих непустое пересечение с A и содержащихся в A , а также с заменой объема $V_r(A)$ на $2^{-r} V_r(A)$. Для получения точной асимптотики вышеприведенной вероятности не требуется рассматривать случай соседних кубов (17)–(19), и поэтому в неравенстве (20) можно опустить первое слагаемое в квадратных скобках. Таким образом, для всех λ и L имеет место неравенство

$$\frac{H_{\alpha}^{\mu}(K(\lambda))}{\lambda^r} \geq \frac{H_{\alpha}^{\mu}(K(L))}{L^r} - C_3' e^{-\gamma' L^{\alpha}}.$$

Поскольку знаменатель первого слагаемого в правой части не убывает по L , то для некоторого L правая часть станет положительной. Переходя к пределу по λ , убеждаемся в положительности константы $H_{\alpha}^{\mu, U, r}$.

Осталось доказать неравенство (19). Рассмотрим гауссовское однородное и изотропное поле $X_0(t)$ с нулевым средним и ковариационной функцией, удовлетворяющей условию

$$r_0(t) = 1 - \frac{\gamma}{2} \|t\|^{\alpha} + o(\|t\|^{\alpha}), \quad t \rightarrow 0.$$

В силу леммы 1 на множествах достаточно малого диаметра эта ковариационная функция минорирует ковариационную функцию $r(t)$. Поэтому в силу леммы Слепяна для таких множеств

$$P\left\{\max_A X(t) > x\right\} \leq P\left\{\max_A X_0(t) > x\right\}.$$

В силу изотропности поля $X_0(t)$ распределение его максимума не зависит от поворотов множества A , поэтому для него имеет место лемма 2 с заменой функционала $\|t\|_{\mu}$ на $\|t\|^{\alpha}$ и константы $H_{\alpha}^{\mu}(K)$ на константу Пикандса $H_{\alpha}(K)$, для которой неравенство (19) доказано в [2, с. 74]. Лемма доказана.

Теорема 7. Пусть на линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ задано гауссовское гладкое однородное центрированное поле $X(t)$, ковариационная функция $r(t)$ которого μ -правильна. Рассмотрим подпространство $L = U P_r \mathbf{R}^n$, $\dim L = r$, $0 < r < n$. Пусть измеримое по Жордану множество $A \subset L$ ($V_r(A) \neq 0$) удовлетворяет следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{t, s \in A, |t-s| \geq \varepsilon} r(t-s) < 1.$$

Тогда

$$P\left\{\max_A X(t) > x\right\} = x^r \Psi(x) V_r(A) (\sqrt{2\pi})^{-r} \sqrt{\det \tilde{D}} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

где

$$\tilde{D} = E(\widetilde{\text{grad}} X_t)^T \widetilde{\text{grad}} X_t.$$

Здесь $\widetilde{\text{grad}} X_t$ — проекция вектор-градиента функции $X(t)$ на пространство L .

Доказательство. Эта теорема является переформулировкой теоремы 4. Действительно, в случае $\alpha = 2$ поле $X(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$, и его сужение $\tilde{X}(t)$ на L однородны и дифференцируемы в среднем квадратическом. Имеем:

$$\|t\|_{\mu} = \frac{1}{2} (Dt, t), \quad \text{где } D = 2 \int_{\mathbf{G}_n} C \mu(dC).$$

В силу μ -правильности ковариационной функции, матрица D невырождена и, очевидно,

$$D = E(\text{grad} X(t))^T \text{grad} X(t).$$

В силу теоремы 4 для $A \subset L$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_A X(t) > x\}}{x^r \Psi(x)} = (\sqrt{2\pi})^{-r} V_r(A) \sqrt{\det \tilde{D}},$$

где $\tilde{D} = E(\widetilde{\text{grad}} X(t))^T \widetilde{\text{grad}} X(t)$. Заметим, что $\tilde{D}$ — матрица размера $r \times r$, а $\widetilde{\text{grad}} X(t)$ — проекция вектора $\text{grad} X(t)$ на L .

3. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем $\epsilon > 0$ из определения 2 и выберем соответствующее ему δ . Рассмотрим конечное покрытие многообразия M^r множествами $S_1, \dots, S_N$ ненулевой r -мерной меры и диаметра, не превышающего δ . Используя неравенство Слепьяна, мы приблизим вероятности событий

$$A_i = \left\{ \max_{t \in S_i} X(t) > x \right\}$$

вероятностями соответствующих событий для гауссовских однородных полей, заданных на касательных линейных многообразиях к многообразию M^r в выделенных точках множеств S_i . Это дает возможность использовать теорему 3. Заметим, что

$$P \left\{ \max_{M^r} X(t) > x \right\} = P \left(\bigcup_{i=1}^N A_i \right),$$

и воспользуемся неравенством Бонферрони

$$\sum_{i=1}^N P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) \leq P \left(\bigcup_{i=1}^N A_i \right) \leq \sum_{i=1}^N P(A_i). \quad (22)$$

Найдем точную асимптотику последней суммы при $x \rightarrow \infty$ и покажем, что двойная сумма $\sum_{i < j} P(A_i A_j)$ пренебрежимо мала по сравнению с суммой $\sum_{i=1}^N P(A_i)$.

Для любого элемента S_i из покрытия для M^r выберем внутреннюю точку $s_i \in S_i \subset M^r$. В точке s_i построим касательное пространство $T^{s_i}(M^r)$. Пусть P_{s_i} — ортогональный проектор, отображающий M^r на касательное пространство $T^{s_i}(M^r)$. Обозначим $\tilde{t} = P_{s_i}(t)$, $\tilde{S}_i = P_{s_i}(S_i) \subset M^r$. Далее, рассматривая только i -й элемент разбиения, индекс i опускаем. Определим гауссовское поле $\tilde{X}(\tilde{t})$ на $\tilde{S} \in T^s(M^r)$, полагая

$$\tilde{X}(\tilde{t}) = X(t), \quad t \in \tilde{S}.$$

В силу условия ЛС для ковариационной функции $\tilde{r}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ поля $\tilde{X}(\tilde{t})$ также выполняется условие ЛС. Ради простоты обозначений будем считать, что для заданного $\epsilon > 0$ выбранное δ также соответствует и ковариационной функции $\tilde{r}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$. Кроме того, уменьшим, если необходимо, диаметры множеств разбиения таким образом, чтобы неравенство (4) выполнялось для всех $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \tilde{S}$.

Рассмотрим гауссовские однородные поля $X^+(\tilde{t})$, $X^-(\tilde{t})$ на линейном пространстве $T^s(M^r)$ с ковариационными функциями, удовлетворяющими условиям

$$r^+(D_s \tilde{t}_1, D_s \tilde{t}_2) = 1 - (1 + 2\epsilon) \|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\|_\mu + o(\|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\|_\mu),$$

$$r^-(D_s \tilde{t}_1, D_s \tilde{t}_2) = 1 - (1 - 2\epsilon) \|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\|_\mu + o(\|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\|_\mu)$$

при $\|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\| \rightarrow 0$. Дисперсии полей $X^+(\tilde{t})$, $X^-(\tilde{t})$, $X(\tilde{t})$ совпадают, а ковариационные функции этих полей для достаточно малых $\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2$ удовлетворяют соотношениям

$$r^+(D_s \tilde{t}_1, D_s \tilde{t}_2) \leq \tilde{r}(D_s \tilde{t}_1, D_s \tilde{t}_2) \leq r^-(D_s \tilde{t}_1, D_s \tilde{t}_2).$$

Как и выше, уменьшив, если необходимо, диаметры множеств разбиения, мы можем считать, что эти неравенства верны для всех $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \tilde{S}$. В силу определения поля $\tilde{X}(\tilde{t})$, используя неравенство Слепьяна, имеем

$$\begin{aligned} P \left\{ \max_{\tilde{S}} X^-(\tilde{t}) > x \right\} &\leq P \left\{ \max_{\tilde{S}} \tilde{X}(\tilde{t}) > x \right\} = P \left\{ \max_{\tilde{S}} X(t) > x \right\} \\ &\leq P \left\{ \max_{\tilde{S}} X^+(\tilde{t}) > x \right\}. \end{aligned}$$

Если диаметры всех S_i достаточно малы, то для r -мерных объемов множеств $\tilde{S}$ и S имеют место неравенства

$$1 - \varepsilon_1 \leq \frac{V_r(\tilde{S})}{V_r(S)} \leq 1 + \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ есть наперед заданное произвольно малое число.

В силу леммы 4, примененной к полям $X^+(\tilde{t})$ и $X^-(\tilde{t})$, выбрав диаметры множеств разбиения достаточно малыми, имеем

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_{\tilde{S}} \tilde{X}(\tilde{t}) > x\}}{x^{2r/\alpha} \Psi(x) V_r(S)} \leq (1 + \varepsilon)^{r/2} H_\alpha^{\mu, r, U_\bullet}(1 + \varepsilon_1), \quad (23)$$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{\max_{\tilde{S}} \tilde{X}(\tilde{t}) > x\}}{x^{2r/\alpha} \Psi(x) V_r(S)} \geq (1 - \varepsilon)^{r/2} H_\alpha^{\mu, r, U_\bullet}(1 - \varepsilon_1). \quad (24)$$

Просуммируем неравенства (23) и (24) по всем элементам разбиения и заменим суммы в правых частях интегралами. Получаем, что

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N P\{\max_{S_i} X(t) > x\}}{x^{2r/\alpha} \Psi(x)} \\ \leq (1 + \varepsilon)^{r/2} (1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2) \int_{M^r} H_\alpha^{\mu, r, U_\bullet} s(d\mu), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N P\{\max_{S_i} X(t) > x\}}{x^{2r/\alpha} \Psi(x)} \\ \geq (1 - \varepsilon)^{r/2} (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2) \int_{M^r} H_\alpha^{\mu, r, U_\bullet} s(d\mu), \end{aligned} \quad (26)$$

где ε_2 — наперед заданное положительное число — погрешность при замене суммы интегралом.

Остается оценить двойную сумму $\sum_{i < j} P(A_i A_j)$ в неравенстве (22). Разобьем эту сумму на две части: Σ_1 — сумма по всем соседним элементам разбиения S_i , т.е. элементам, замыкания которых имеют общие точки, Σ_2 — сумма по остальным, несоседним элементам. Существует такое число $h > 0$, что расстояние между любыми двумя несоседними элементами разбиения превосходит h . Пусть S_i, S_j — какие-либо несоседние элементы разбиения. Имеем:

$$P\left\{\max_{t \in S_i} X(t) > x, \max_{s \in S_j} X(s) > x\right\} \leq P\left\{\max_{t \in S_i, s \in S_j} (X(t) + X(s)) > 2x\right\}.$$

К последней вероятности применим теорему Бореля. Действительно, обозначая через h минимальное евклидово расстояние между несоседними множествами разбиения, находим

$$\sigma^2 = \max_{t \in S_i, s \in S_j} \text{Var}(X(t) + X(s)) \leq 2 + 2 \max_{|t-s| \geq h} EX(t)X(s) \leq 4 - 2\beta, \quad (27)$$

где

$$\beta = \min_{|t-s| \geq h} (1 - r(t, s)) > 0$$

в силу условий теоремы. Далее, в силу условий теоремы поле X п.н. ограничено на M^r и

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{t \in S_i, s \in S_j} (X(t) + X(s)) > a\right\} &\leq P\left\{\max_{t \in M^r, s \in M^r} (X(t) + X(s)) > a\right\} \\ &= P\left\{2 \max_{t \in M^r} X(t) > a\right\} < \infty, \end{aligned}$$

поэтому число a можно выбрать одинаковым для всех пар множеств разбиения. Учтя это, в силу неравенства Бореля, получаем, что для $x > a/2$

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{t \in S_i, s \in S_j} (X(t) + X(s)) > x\right\} &\leq 2\Psi\left(-\frac{x - a/2}{\sqrt{1 - \beta/2}}\right) \\ &\leq C \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{\beta}{4}\right)\right\} \end{aligned} \quad (28)$$

для некоторой константы C , зависящей от a . Суммируя неравенства (28) по всем парам несоседних элементов разбиения, находим оценку сверху

$$\Sigma_2 \leq C \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{\beta}{4}\right)\right\}. \quad (29)$$

Пусть теперь S_i, S_j — какие-либо соседние элементы разбиения, A_i, A_j — соответствующие им события. Будем считать разбиение столь мелким, что выдвинутые выше требования к одному элементу разбиения выполнены и для любых объединений $S_i \cup S_j$ соседних элементов. Представим $P(A_i A_j)$ в виде

$$P(A_i A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cup A_j). \quad (30)$$

К каждому из трех слагаемых в правой части (30) применим оценки (23) и (24). В силу сказанного выше о свойствах разбиения $S_i, i = 1, \dots, N$, матрицы D_{S_i} в этих трех неравенствах могут быть выбраны одинаковыми, скажем, D_S . Получаем, что для соседних S_i, S_j и наперед заданного произвольно малого ε_4

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cup A_j)}{x^{2r/\alpha} \Psi(x)} &\leq V_r(S_i) (1 + \varepsilon_4) H_\alpha^{\mu, r, U_S} \\ &\quad + V_r(S_j) (1 + \varepsilon_4) H_\alpha^{\mu, r, U_S} - (1 - \varepsilon) V_r(S_i \cup S_j) H_\alpha^{\mu, r, U_S} \\ &\leq 2\varepsilon_4 [V_r(S_i) + V_r(S_j)] H_\alpha^{\mu, r, U_S}. \end{aligned}$$

Суммируя неравенства по всем парам соседних элементов разбиения и заменяя сумму интегралом, получаем для Σ_1 оценку сверху

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\Sigma_1}{x^{2r/\alpha} \Psi(x)} \leq \varepsilon_5 N \int_{M^r} H_\alpha^{\mu, r, U_S}(ds), \quad (31)$$

где наперед заданное $\varepsilon_5 > 0$ произвольно мало, $N < \infty$ есть максимальное число элементов разбиения, которые могут соседствовать с произвольным элементом S_i . Очевидно, разбиение может быть устроено таким образом, чтобы это число не зависело от размера элементов разбиения. Например, его можно индуцировать кубической решеткой в $\mathbf{R}^n$ достаточно малого диаметра. Утверждение теоремы следует теперь из (25) и (26) с учетом оценок (29) и (31) двойной суммы в (22) и произвольности выбора всех положительных констант ε_i .

Доказательство теоремы 2 производится по этой же схеме с использованием теоремы 4 вместо леммы 4: достаточно лишь заменять константы H_α^{μ, r, U_S} на соответствующие из леммы 4 (теоремы 6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pickands J.*, III. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian process. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 145, p. 51–73.
2. *Питербарг В. И.* Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Московский гос. ун-т, 1988, 175 с.
3. *Мухалева Т. Л.* Вероятности больших отклонений двумерных гауссовских процессов с разнораспределенными независимыми компонентами. — Вестник МГУ, сер. 1, матем., мех., 1991, № 3, с. 82–84.
4. *Piterbarg V., Tyurin Yu.* Homogeneity testing of two samples: Gaussian field on a sphere. — Math. Methods Statist., 1993, v. 2, p. 147–164.
5. *Lindgren G.* Extreme values and crossings for the χ^2 process and other functions of multidimensional Gaussian processes, with reliability applications. — Adv. Appl. Probab., 1980, v. 12, № 3, p. 746–774.
6. *Lindgren G.* Point processes of exits by bivariate Gaussian processes and extremal theory for the χ^2 -process and its concomitants. — J. Multivar. Anal., 1980, v. 10, № 2, p. 181–206.
7. *Lindgren G.* Slepian model for χ^2 -processes with dependent components with application to envelope upcrossings. — J. Appl. Probab., 1989, v. 26, № 1, p. 36–49.
8. *Piterbarg V.* High deviations for multidimensional stationary Gaussian process with independent coordinates. — Univ. of Lund and Lund Inst. of Technology, Dept. of Math. Statistics. Report 1991: 6, 34 pp.
9. *Беляев Ю. К., Питербарг В. И.* Асимптотика среднего числа A -точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень. — Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 1, с. 9–12.
10. *Borell C.* The Brunn–Minkowski inequality in Gauss space. — Invent. Math., 1975, v. 30, № 2, p. 207–216.
11. *Slepian D.* The one-sided barrier problem for the Gaussian noise. — Bell System Tech. J., 1962, v. 41, p. 463–501.

Поступила в редакцию
17.II.1994

© 1996 г.

ОРСИНГЕР Э.* , КОЛЕСНИК А.**

**ТОЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В МОДЕЛИ
СЛУЧАЙНОГО ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ,
УПРАВЛЯЕМОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ
УРАВНЕНИЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА¹⁾**

Рассматривается модель случайного движения на плоскости, описывающая эволюцию частицы с постоянной скоростью по четырем направлениям, управляемую гиперболическим уравнением четвертого порядка с постоянными коэффици-

*Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Università di Roma «La Sapienza», P. le Aldo Moro, 5, 00185 Roma, Italia.

**Институт математики АН Молдовы, ул. Академии, 5, 277028 Кишинев, Молдова.

¹⁾Эта статья была написана во время пребывания одного из авторов в Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Università di Roma «La Sapienza».