Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде: критический случай, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 21–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2959>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:54:27

© 2002 г.

ВАТУТИН В. А.*

РЕДУЦИРОВАННЫЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ: КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ¹⁾

Пусть Z_n — число частиц в момент $n = 0, 1, 2, \dots$ в ветвящемся процессе в случайной среде, $Z_0 = 1$, а $Z_{m,n}$ — число таких частиц в этом процессе в момент $m \in [0, n]$, каждая из которых имеет непустое потомство в момент n . Показано, что если производящие функции $f_k(s)$ числа потомков частиц k -го поколения независимы и одинаково распределены, причем $\mathbf{E} \ln f'_k(1) = 0$, а $\sigma^2 = \mathbf{E}(\ln f'_k(1))^2 \in (0, \infty)$, то при некоторых дополнительных условиях последовательность условных процессов

$$\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln Z_{[nt],n}, t \in [0, 1] \mid Z_n > 0 \right\}$$

сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к процессу $\{\inf_{t \leq u \leq 1} W^+(u), t \in [0, 1]\}$ в топологии Скорохода в пространстве $D[0, 1]$, где $W^+(t)$ — броуновская извилина на $[0, 1]$.

Ключевые слова и фразы: критический ветвящийся процесс в случайной среде, редуцированный процесс, функциональная предельная теорема, случайное блуждание.

Ветвящиеся процессы в случайной среде являются довольно популярным объектом исследования [1]–[3], [7], [8], [16], [18]–[26]. Неформальное описание этих процессов в интересующем нас случае выглядит следующим образом. Процесс начинается в момент $n = 0$ с одной частицы нулевого поколения, которая живет до момента $n = 1$ и в конце жизни производит потомство в соответствии с производящей функцией $f_0(s)$, причем эта функция является случайной, т.е. выбирается из множества всех вероятностных производящих функций целочисленных неотрицательных величин в соответствии с некоторым вероятностным распределением. Частицы первого поколения живут до момента $n = 2$ и в конце жизни производят потомство в соответствии с *общей* производящей функцией $f_1(s)$, которая является вероятностной копией $f_0(s)$, и т.д.

*Математический институт им. В. Ф. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00012, 00-15-96136) и ИНТАС (код проекта 99-01317).

Пусть Z_n — число частиц в процессе в момент времени $n = 0, 1, 2, \dots$. Закон эволюции Z_n может быть задан следующим образом:

$$Z_0 = 1, \quad \mathbf{E}[s^{Z_{n+1}} | f_0, f_1, \dots, f_n; Z_0, Z_1, \dots, Z_n] = (f_n(s))^{Z_n}. \quad (1)$$

Ветвящийся процесс в случайной среде называется докритическим, если $\rho = \mathbf{E} \ln f'_0(1) < 0$, критическим, если $\rho = 0$, и надкритическим, если $\rho > 0$.

В настоящей заметке мы будем исследовать критические ветвящиеся процессы в случайной среде. Известно, что такие процессы вырождаются с вероятностью единица. Нахождение асимптотики вероятности невырождения $\mathbf{P}\{Z_n > 0\}$ при $n \rightarrow \infty$ для критических ветвящихся процессов в случайной среде с производящими функциями числа потомков общего вида оказалось сложной задачей. Так, еще в 1976 году М. В. Козлов [7] показал, что если функции $f_n(s)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, дробнолинейны, то, при некоторых предположениях о параметрах дробнолинейных функций,

$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} \sim \frac{\beta}{\sqrt{n}}, \quad \beta > 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

однако лишь в 2000 году Г. Керстинг и И. Гейгер [26] установили справедливость (2) для произвольных критических ветвящихся процессов в случайной среде.

Положим

$$\eta_n = \frac{f''_{n-1}(1)}{2(f'_{n-1}(1))^2}, \quad X_n = \ln f'_{n-1}(1).$$

Теорема 1 ([26]). Если $\rho = 0$, $0 < \mathbf{E}X_1^2 < \infty$ и

$$\mathbf{E}\eta_1(1 + \ln^+ f'_0(1)) < \infty, \quad (3)$$

то выполнено (2).

Для осуществления следующего естественного шага — доказательства условных предельных теорем о числе частиц в критических процессах в случайной среде при условии невырождения потребовалось также немало времени. Наилучший на данный момент результат принадлежит В. И. Афанасьеву [2]. Для его формулировки нам понадобятся новые обозначения и понятия.

Пусть $W(t)$, $t \in [0, \infty)$, $W(0) = 0$, — стандартное броуновское движение, $W^+(t)$, $t \in [0, \infty)$, — броуновская извилина, $\tau = \inf\{t > 0: W^+(t) = 0\}$, и

$$W_1^+(t) = W^+(t \wedge \tau), \quad t \in [0, \infty),$$

— «остановленная» броуновская извилина.

Теорема 2. Если Z_n — критический ветвящийся процесс в случайной среде, величины $\mathbf{E}\eta_1$, $\mathbf{E}X_1\eta_1$, $\mathbf{E}X_1^4$, $\mathbf{E}\exp(-X_1)$ конечны и, кроме того, $\sigma^2 = \mathbf{E}X_1^2 > 0$, то

$$\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln(Z_{[nt]} + 1), t \in [0, \infty) \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \{W_1^+(t), t \in [0, \infty)\}, \quad (4)$$

где знак $\xrightarrow{D}$ обозначает сходимость по распределению в топологии Скорохода в пространстве $D[0, \infty)$.

З а м е ч а н и е 1. Сходимость (4) для $t \in [0, 1]$ была впервые доказана в [1] в предположении, что производящие функции числа непосредственных потомков частиц дробно-линейны. В общем случае, но по-прежнему для $t \in [0, 1]$, теорема 2 была получена в [8].

Следующим этапом в исследовании ветвящихся процессов является изучение структуры их генеалогических деревьев. Одной из важных характеристик генеалогического дерева является так называемый редуцированный процесс $Z_{m,n}$, $0 \leq m \leq n$, в котором величина $Z_{m,n}$ равна числу частиц в рассматриваемом процессе в момент $m \leq n$, имеющих непустое потомство в момент n . Свойства редуцированных процессов для ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона, марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем и процессов Беллмана–Харриса изучались в работах [5], [6], [9]–[15], [22], [23].

Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями числа непосредственных потомков рассматривались в работах [18] и [21]. В настоящей работе мы отказываемся от предположения дробной линейности и доказываем следующее утверждение, которое является основным результатом данной работы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln Z_{[nt],n}, t \in [0, 1] \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \left\{ \inf_{t \leq u \leq 1} W^+(u), t \in [0, 1] \right\}, \quad (5)$$

где знак $\xrightarrow{D}$ обозначает сходимость по распределению в топологии Скорохода в пространстве $D[0, 1]$.

Заметим, что теорема 3 не может быть выведена из теоремы 2 применением принципа инвариантности Донскера–Прохорова.

Отметим также, что в [18] для случая дробно-линейных производящих функций сходимость (5) была установлена при более слабых моментных предположениях.

1. Вспомогательные результаты. В дальнейшем нам будет удобно использовать следующие обозначения:

$$f_{k,n}(s) = f_k(f_{k+1}(\cdots(f_{n-1}(s))\cdots)), \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad f_{n,n}(s) = 1. \quad (6)$$

Кроме того, мы будем использовать символ $I(A)$ для индикатора события A .

Занумеруем частицы m -го поколения произвольным, но фиксированным образом. Через $Z_{m,n}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, Z_m$, $0 \leq m \leq n$, будем обозначать размер потомства в момент n в популяции, порожденной k -й частицей из числа существовавших в момент $m \leq n$. Поскольку мы рассматриваем процессы с дискретным временем, то для упрощения записи всюду, если это требуется по смыслу, величины вида $Z_{nt,n}$, $f_{nt,n}(0)$, $f_{nt}(0)$ и т.д. будут пониматься при $t \in [0, 1]$ как $Z_{[nt],n}$, $f_{[nt],n}(0)$, $f_{[nt]}(0)$ соответственно.

Для $x > 0$, $N > 0$, $t \in [0, 1]$ и $\delta > 0$ введем события

$$\begin{aligned} A_{n,t}(x) &= \{\ln(e + Z_{nt,n}) > x\sqrt{n}\}, \\ B_{n,t}(N) &= \left\{ \left| \sum_{k=1}^{Z_{nt}} (I(Z_{nt,n}^{(k)} > 0) - (1 - f_{nt,n}(0))) \right| \right. \\ &\quad \left. > \sqrt{N Z_{nt}(1 - f_{nt,n}(0)) f_{nt,n}(0)} \right\}, \\ C_{n,t}(\delta) &= \{0 < Z_{nt}(1 - f_{nt,n}(0)) < e^{n^{1/4-\delta}}\}. \end{aligned}$$

Лемма 1. В условиях теоремы 3 для любых фиксированных $x > 0$, $t \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ справедливы соотношения

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(A_{n,t}(x) B_{n,t}(N)) = 0, \quad (7)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(A_{n,t}(x) C_{n,t}(\delta)) = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Остановим сначала справедливость соотношения (7). В дальнейшем для краткости мы будем писать $\mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\cdot)$, $\mathbf{E}_{\mathcal{F}}(\cdot)$ и $\mathbf{D}_{\mathcal{F}}(\cdot)$ для обозначения вероятностей, математических ожиданий и дисперсий, подсчитанных при фиксированной σ -алгебре $\mathcal{F}$, порожденной случайными величинами Z_{nt} и $f_{nt}(s)$, $f_{nt+1}(s), \dots, f_n(s)$.

Заметим прежде всего, что

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}} I(Z_{nt,n}^{(k)} > 0) = 1 - f_{nt,n}(0), \quad \mathbf{D}_{\mathcal{F}} I(Z_{nt,n}^{(k)} > 0) = (1 - f_{nt,n}(0)) f_{nt,n}(0). \quad (9)$$

Используя эти соотношения и применяя неравенство Чебышева для оценки вероятности под знаком математического ожидания, получаем

для достаточно больших n

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n,t}(x)B_{n,t}(N)) &\leq \mathbf{P}(Z_{nt} > 0, B_{n,t}(N)) = \mathbf{E}\mathbf{P}_{\mathcal{F}}(Z_{nt} > 0, B_{n,t}(N)) \\ &\leq \mathbf{E}\left[\frac{I(Z_{nt} > 0)}{NZ_{nt}(1-f_{nt,n}(0))f_{nt,n}(0)}\mathbf{D}_{\mathcal{F}}\left[\sum_{k=1}^{Z_{nt}}I(Z_{nt,n}^{(k)} > 0)\right]\right] \\ &= N^{-1}\mathbf{P}\{Z_{nt} > 0\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Эта оценка вместе с (2) влечет (7).

Для доказательства (8) заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n,t}(x)C_{n,t}(\delta)) &= \mathbf{E}\mathbf{P}_{\mathcal{F}}(A_{n,t}(x)C_{n,t}(\delta)) \\ &\leq \frac{1}{x^2n}\mathbf{E}\left[I(C_{n,t}(\delta))\mathbf{E}_{\mathcal{F}}[\ln^2(e + Z_{nt,n})]\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку

$$(\ln^2(e+x))'' = \frac{2}{(e+x)^2}(1 - \ln(e+x)),$$

то функция $\ln^2(e+x)$ вогнута на множестве $x > 0$. Этот факт позволяет нам применить неравенство Йенсена для внутреннего математического ожидания в правой части (11) и получить оценку

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}} \ln^2(e + Z_{nt,n}) \leq \ln^2(e + \mathbf{E}_{\mathcal{F}} Z_{nt,n}).$$

Отсюда, используя представление $Z_{nt,n} = \sum_{k=1}^{Z_{nt}} I(Z_{nt,n}^{(k)} > 0)$ и первое из равенств в (9), находим, что при всех достаточно больших n

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n,t}(x)C_{n,t}(\delta)) &\leq \frac{1}{x^2n}\mathbf{E}\left[I(C_{n,t}(\delta))\ln^2(e + Z_{nt}(1-f_{nt,n}(0)))\right] \\ &\leq \frac{1}{x^2n}\ln^2(e + e^{n^{1/4-\delta}}) \leq \frac{2}{x^2n^{1/2+2\delta}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что эти оценки влекут (8).

Лемма доказана.

Следующее утверждение имеет, по-видимому, самостоятельный интерес.

Лемма 2. Если $\rho = 0$, $0 < \mathbf{E}X_1^2 < \infty$ и $\mathbf{E}\eta_1 < \infty$, то для любого $v \in (0, 1]$ и любого $x < 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln(1 - f_{0,nv}(0)) < x\right\} = \mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leq u \leq v} W(u) < x\right\}.$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что аналог леммы 2 для марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем в случайной среде, у

которых инфинитезимальные производящие функции числа потомков имеют вид $f(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2$, был получен Н. А. Берестовой в [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о. В ходе дальнейших рассуждений мы будем использовать свойства так называемого сопровождающего случайного блуждания S_k , $k \geq 0$, задаваемого при помощи соотношений

$$S_0 = 0, \quad S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k, \quad k \geq 1. \quad (13)$$

Заметим, что при любом $0 \leq k \leq nv$

$$1 - f_{0,nv}(0) = \mathbf{P}_{\mathcal{F}}\{Z_{nv} \geq 1\} \leq \mathbf{P}_{\mathcal{F}}\{Z_k \geq 1\} \leq \mathbf{E}_{\mathcal{F}} Z_k = e^{S_k}$$

и, следовательно,

$$\ln(1 - f_{0,nv}(0)) \leq \min_{0 \leq k \leq nv} S_k. \quad (14)$$

По условиям леммы случайное блуждание S_k имеет нулевой снос и положительную конечную дисперсию σ^2 . Отсюда и из принципа инвариантности для случайных блужданий вытекает (см., например, [4]), что для любого $x > 0$

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln(1 - f_{0,nv}(0)) < x \right\} \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \min_{0 \leq u \leq v} S_{nu} < x \right\} \geq \mathbf{P} \left\{ \inf_{0 \leq u \leq v} W(u) < x \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для получения оценки сверху напомним, что, согласно соотношениям (2.2) и (2.3) работы [26], при любом m

$$\begin{aligned} 1 - f_{0,m}(0) & \geq \left(e^{-S_m} + \sum_{k=0}^{m-1} 2\eta_k e^{-S_k} \right)^{-1} \\ & \geq \exp \left\{ \min_{0 \leq k \leq m} S_k \right\} \left(1 + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \eta_k \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда вытекает, что

$$\ln(1 - f_{0,nv}(0)) \geq \min_{0 \leq k \leq nv} S_k - \ln \left(1 + 2 \sum_{k=0}^{nv-1} \eta_k \right). \quad (17)$$

Поскольку случайные величины η_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, неотрицательны, независимы и одинаково распределены, то

$$\mathbf{P} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=0}^{nv-1} \eta_k > n^2 \right\} \leq \frac{2}{n} (1 + \mathbf{E}\eta_1). \quad (18)$$

Опираясь на эту оценку, нетрудно показать, что для любых $x < 0$ и $\varepsilon \in (0, -x)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln(1 - f_{0,nv}(0)) < x \right\} \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \min_{0 \leq u \leq v} S_{nu} < x + \varepsilon \right\} + O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда, устремляя сначала n к бесконечности, а затем ε к нулю, получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln(1 - f_{0,nv}(0)) < x \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \inf_{0 \leq u \leq v} W(u) < x \right\}, \quad (20)$$

что в сочетании с (15) доказывает лемму.

Следствие 1. В условиях леммы 2

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln(1 - f_{0,nv}(0)), v \in [0, 1] \right) \xrightarrow{D} \left(\inf_{0 \leq u \leq v} W(u), v \in [0, 1] \right). \quad (21)$$

Доказательство. Сходимость конечномерных распределений процесса $(\sigma\sqrt{n})^{-1} \ln(1 - f_{0,nv}(0))$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса $\inf_{0 \leq u \leq v} W(u)$ легко установить, используя схему доказательства леммы 2 и неравенства (14) и (17). Этого достаточно для справедливости (21). Действительно, неравенства (14), (17) и (18) сводят задачу проверки плотности мер, порождаемых последовательностью процессов

$$\alpha_n(t) = (\sigma\sqrt{n})^{-1} \ln(1 - f_{0,nt}(0)), \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots,$$

к проверке плотности мер процессов

$$\beta_n(t) = (\sigma\sqrt{n})^{-1} \min_{0 \leq k \leq nt} S_k, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Последняя последовательность мер, очевидно, плотна.

Доказательство следствия закончено.

В последующих рассуждениях важное значение имеют свойства функции

$$h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{\tau_j} \geq -x\}, \quad x \in \mathbf{R},$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots$ — строгие нижние лестничные моменты случайного блуждания $\{S_n\}$, задаваемые соотношениями

$$\tau_{j+1} := \min\{n > \tau_j : S_n < S_{\tau_j}\}, \quad j \geq 0.$$

Пусть $M_n = \min(S_0, S_1, \dots, S_n)$ и

$$m_n(x) = \mathbf{P}\{M_n \geq -x\}, \quad x \geq 0.$$

Известно (см., например, теорему А работы [7]), что если $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $0 < \mathbf{E}X_1^2 < \infty$, то найдутся константы c_1 и c_2 такие, что

$$m_n(x) \sim c_1 h(x) n^{-1/2}, \quad x \geq 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (22)$$

$$m_n(x) \leq c_2 h(x) n^{-1/2}, \quad x \geq 0, \quad n \geq 1. \quad (23)$$

Заметим также, что из доказательства основной теоремы работы [26] вытекает, что величина β в соотношении (2) имеет вид

$$\beta = c_1 \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}[(1 - f_{0,m}(0)) h(x + S_m) I(M_m > -x)], \quad (24)$$

где константа c_1 та же, что и в (22).

Нам понадобятся также следующие два утверждения, легко вытекающие из результатов работ [17] и [19].

Пусть

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{nt}, \quad \xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \min_{tn \leq k \leq n} S_k, \quad t \in [0, 1].$$

Лемма 3. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $0 < \mathbf{E}X_1^2 < \infty$, то для любых $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq 1$, любых $y_1, \dots, y_r \in \mathbf{R}$ и любого $x \geq 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Y_n(t_1) > y_1, \dots, Y_n(t_r) > y_r \mid M_n > -x\} \\ &= \mathbf{P}\{W^+(t_1) > y_1, \dots, W^+(t_r) > y_r\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Лемма 4. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $0 < \mathbf{E}X_1^2 < \infty$, то для любых $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq 1$, любых $y_1, \dots, y_r \in \mathbf{R}$ и любого $x \geq 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n(t_1) > y_1, \dots, \xi_n(t_r) > y_r \mid M_n > -x\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\inf_{t_1 \leq u \leq 1} W^+(u) > y_1, \dots, \inf_{t_r \leq u \leq 1} W^+(u) > y_r\right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь у нас все готово для доказательства еще одного важного утверждения.

Лемма 5. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $0 < \mathbf{E}X_1^2 < \infty$, то для любых $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq 1$ и любых $y_1, \dots, y_r \in \mathbf{R}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Y_n(t_1) > y_1, \dots, Y_n(t_r) > y_r \mid Z_n > 0\} \\ &= \mathbf{P}\{W^+(t_1) > y_1, \dots, W^+(t_r) > y_r\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Доказательство. При доказательстве этой леммы существенным образом использованы результаты работы [26]. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{Y_n(t_1) > y_1, \dots, Y_n(t_r) > y_r \mid Z_n > 0\} \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \mathbf{E}[(1 - f_{0,n}(0)) I(n; \bar{t}, \bar{y})], \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} I(n; \bar{t}, \bar{y}) &= I(n; t_1, \dots, t_r, y_1, \dots, y_r) \\ &= I(Y_n(t_1) > y_1, \dots, Y_n(t_r) > y_r). \end{aligned} \quad (29)$$

Зафиксируем натуральное число $m < n$, положительное число x и $\gamma > 1$ и представим второй сомножитель в правой части (28) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(1 - f_{0,n}(0)) I(n; \bar{t}, \bar{y})] &= G_1(n, x) + G_2(m, n, x, \gamma) \\ &\quad + G_3(n, x, \gamma) + G_4(m, n, x, \gamma), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} G_1(n, x) &= \mathbf{E}[(1 - f_{0,n}(0)) I(n; \bar{t}, \bar{y}) I(M_n \leq -x)], \\ G_2(m, n, x, \gamma) &= \mathbf{E}[(f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0)) I(n; \bar{t}, \bar{y}) I(M_{n\gamma} > -x)], \\ G_3(n, x, \gamma) &= \mathbf{E}[(1 - f_{0,n}(0)) I(n; \bar{t}, \bar{y}) (I(M_n > -x) - I(M_{n\gamma} > -x))] \end{aligned}$$

и, наконец,

$$G_4(m, n, x, \gamma) = \mathbf{E}[(1 - f_{0,m}(0)) I(n; \bar{t}, \bar{y}) I(M_{n\gamma} > -x)].$$

Очевидно, $G_1(n, x) \leq \mathbf{E}[(1 - f_{0,n}(0)) I(M_n \leq -x)]$. Отсюда, используя неравенство (4.16) работы [26], получаем

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} G_1(n, x) = 0. \quad (31)$$

В силу леммы 4.2 из [26] для любого $\gamma > 1$ и $x \geq 0$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{E}[(f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0)) I(M_{n\gamma} > -x)] = 0.$$

Отсюда и из неравенства

$$G_2(m, n, x, \gamma) \leq \mathbf{E}[(f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0)) I(M_{n\gamma} > -x)]$$

вытекает, что

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} G_2(m, n, x, \gamma) = 0. \quad (32)$$

Вспоминая (22), нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} G_3(n, x, \gamma) &\leq \mathbf{E}(I(M_n > -x) - I(M_{n\gamma} > -x)) \\ &\sim c_1 h(x) n^{-1/2} (1 - \gamma^{-1/2}), \end{aligned} \quad (33)$$

и, следовательно, для любого фиксированного $x \geq 0$

$$\limsup_{\gamma \searrow 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} G_3(n, x, \gamma) = 0. \quad (34)$$

Займемся теперь исследованием асимптотического поведения величины $G_4(m, n, x, \gamma)$. Взяв условное математическое ожидание относительно σ -алгебры, порожденной случайными величинами $S_0, S_1, \dots, S_m$ и $f_{0,m}(0)$, и вспомнив, что $\sigma \sqrt{n} Y_n(m/n) = S_m$, получаем

$$\begin{aligned} G_4(m, n, x, \gamma) &= \mathbf{E} \left[(1 - f_{0,m}(0)) I(M_m > -x) \right. \\ &\quad \left. \times P \left(n - m; y_1 - Y_n \left(\frac{m}{n} \right), \dots, y_r - Y_n \left(\frac{m}{n} \right), -x - S_m \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &P(n - m; y_1, \dots, y_r, -x) \\ &= \mathbf{P} \left\{ Y_n(t_1) - Y_n \left(\frac{m}{n} \right) > y_1, \dots, Y_n(t_r) - Y_n \left(\frac{m}{n} \right) > y_r; \right. \\ &\quad \left. \min_{m \leq k \leq n\gamma} (S_k - S_m) > -x \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ Y_n \left(t_1 - \frac{m}{n} \right) > y_1, \dots, Y_n \left(t_r - \frac{m}{n} \right) > y_r; M_{n\gamma-m} > -x \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Обращаясь к (22) и лемме 3 и полагая $S'_k = S_{k+m} - S_m$, $k = 0, 1, \dots$,

$$M'_m = \min_{1 \leq k \leq n} S'_k, \quad Y'_n(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} S'_{nt},$$

закключаем, что при фиксированном S_m

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} P \left(n - m; y_1 - Y_n \left(\frac{m}{n} \right), \dots, y_r - Y_n \left(\frac{m}{n} \right), -x - S_m \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ Y'_n \left(t_1 - \frac{m}{n} \right) > y_1, \dots, Y'_n \left(t_r - \frac{m}{n} \right) > y_r \mid \right. \\ &\quad \left. M'_{n\gamma-m} > -x - S_m \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P} \{ M'_{n\gamma-m} > -x - S_m \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\gamma} W^+ \left(\frac{t_1}{\gamma} \right) > y_1, \dots, \sqrt{\gamma} W^+ \left(\frac{t_r}{\gamma} \right) > y_r \right\} c_1 h(x + S_m). \end{aligned} \quad (36)$$

Применяя теперь теорему об ограниченной сходимости и вспоминая (23), получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} G_4(m, n, x, \gamma) \\ &= (\sqrt{\gamma})^{-1} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\gamma} W^+ \left(\frac{t_1}{\gamma} \right) > y_1, \dots, \sqrt{\gamma} W^+ \left(\frac{t_r}{\gamma} \right) > y_r \right\} \\ & \times c_1 \mathbf{E} \left[(1 - f_{0,m}(0)) I(M_m > -x) h(x + S_m) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Отсюда, обращаясь к определению величины β (см. (24)), находим

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\gamma \searrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} G_4(m, n, x, \gamma) \\ &= \beta \mathbf{P} \left\{ W^+(t_1) > y_1, W^+(t_2) > y_2, \dots, W^+(t_r) > y_r \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Объединяя (31), (32), (34) и (38) и используя (28) и (24), приходим к (27).

Доказательство леммы закончено.

Положим

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln(Z_{nt} e^{-S_{nt}}), \quad t \in (0, 1].$$

Только что доказанная лемма позволяет нам убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 6. Если выполнены условия теоремы 2, то для любого $\varepsilon > 0$ и любого $t \in (0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ |\zeta_n(t)| > \varepsilon \mid Z_n > 0 \right\} = 0. \quad (39)$$

Доказательство. В силу неравенства Чебышева и (2)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ Z_{nt} e^{-S_{nt}} > e^{\varepsilon \sigma \sqrt{n}} \mid Z_n > 0 \right\} \leq \frac{1}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \mathbf{P} \left\{ Z_{nt} e^{-S_{nt}} > e^{\varepsilon \sigma \sqrt{n}} \right\} \\ & \leq \frac{e^{-\varepsilon \sigma \sqrt{n}}}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \mathbf{E} Z_{nt} e^{-S_{nt}} \leq c \sqrt{n} e^{-\varepsilon \sigma \sqrt{n}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (40)$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \zeta_n(t) > \varepsilon \mid Z_n > 0 \right\} = 0. \quad (41)$$

Заметим теперь, что в соответствии с теоремой 2 и леммой 5

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln Z_{nt} > y \mid Z_n > 0 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln(Z_{nt} e^{-S_{nt}}) + \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} S_{nt} > y \mid Z_n > 0 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \zeta_n(t) + Y_n(t) > y \mid Z_n > 0 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ Y_n(t) > y \mid Z_n > 0 \right\} = \mathbf{P} \{ W_1^+(t) > y \}. \end{aligned} \quad (42)$$

Докажем, что из (41) и (42) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\} = 0. \quad (43)$$

Для фиксированных $\gamma > 0$ и натурального N имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\} &= \mathbf{P}\{Y_n(t) < \gamma, \zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\} \\ &+ \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{P}\{Y_n(t) \in [\gamma + j\varepsilon, \gamma + (j+1)\varepsilon), \zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\} \\ &+ \mathbf{P}\{Y_n(t) \geq \gamma + N\varepsilon, \zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (44). В силу (42) для любого $\delta > 0$ найдутся достаточно малое $\gamma > 0$ и достаточно большое натуральное N такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{Y_n(t) < \gamma\} \cup \{Y_n(t) \geq \gamma + N\varepsilon\}, \zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0) \\ \leq \mathbf{P}(\{Y_n(t) < \gamma\} \cup \{Y_n(t) \geq \gamma + N\varepsilon\} \mid Z_n > 0) < \delta. \end{aligned} \quad (45)$$

В дальнейшем будем считать, что $\gamma > 0$ и N выбраны именно таким образом. Для оценки оставшихся слагаемых заметим, что для любого $y > \varepsilon$ и любого $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_n(t) + Y_n(t) > y \mid Z_n > 0\} \\ &= \mathbf{P}\{\zeta_n(t) + Y_n(t) > y, \zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\} \\ &+ \mathbf{P}\{\zeta_n(t) + Y_n(t) > y, \zeta_n(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon_1] \mid Z_n > 0\} \\ &+ \mathbf{P}\{\zeta_n(t) + Y_n(t) > y, \zeta_n(t) \geq \varepsilon_1 \mid Z_n > 0\} \\ &\leq \mathbf{P}\{Y_n(t) > y + \varepsilon, \zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\} \\ &+ \mathbf{P}\{Y_n(t) > y - \varepsilon_1, \zeta_n(t) \geq -\varepsilon \mid Z_n > 0\} \\ &+ \mathbf{P}\{\zeta_n(t) \geq \varepsilon_1 \mid Z_n > 0\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_n(t) + Y_n(t) > y \mid Z_n > 0\} &\leq \mathbf{P}\{Y_n(t) > y - \varepsilon_1 \mid Z_n > 0\} \\ &- \mathbf{P}\{Y_n(t) \in (y - \varepsilon_1, y + \varepsilon], \zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\} \\ &+ \mathbf{P}\{\zeta_n(t) \geq \varepsilon_1 \mid Z_n > 0\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Пусть возрастающая последовательность натуральных чисел n_k , $k = 1, 2, \dots$, такова, что существует предел

$$c = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Y_{n_k}(t) \in [y, y + \varepsilon], \zeta_{n_k}(t) < -\varepsilon \mid Z_{n_k} > 0\}.$$

Покажем, что $c = 0$. Действительно, переходя к пределу при $n_k \rightarrow \infty$ в обеих частях неравенства (47) и учитывая (43) и (44), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{W_1^+(t) > y\} &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\zeta_{n_k}(t) + Y_{n_k}(t) > y \mid Z_{n_k} > 0\} \\ &\leq \lim_{n_k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Y_{n_k}(t) > y - \varepsilon_1 \mid Z_{n_k} > 0\} \\ &\quad - c + \lim_{n_k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\zeta_{n_k}(t) \geq \varepsilon_1 \mid Z_{n_k} > 0\} \\ &= \mathbf{P}\{W_1^+(t) > y - \varepsilon_1\} - c. \end{aligned} \quad (48)$$

Устремляя ε_1 к нулю, заключаем, что

$$\mathbf{P}\{W_1^+(t) > y\} \leq \mathbf{P}\{W_1^+(t) > y\} - c. \quad (49)$$

Отсюда, в силу неотрицательности c следует, что $c = 0$. Последнее, в силу произвольности подпоследовательности n_k , для которой существует предел в (48), влечет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Y_n(t) \in [y, y + \varepsilon), \zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\} = 0 \quad (50)$$

для любого $y > 0$. В частности, для любого $j = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Y_n(t) \in [\gamma + j\varepsilon, \gamma + (j+1)\varepsilon), \zeta_n(t) < -\varepsilon \mid Z_n > 0\} = 0. \quad (51)$$

Подставляя (45) и (51) в (44), приходим к (43).

Лемма доказана.

Лемма 7. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $0 < \mathbf{E}X_1^2 < \infty$, то для любых $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq 1$ и любых $y_1, \dots, y_r \in \mathbf{R}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n(t_1) > y_1, \dots, \xi_n(t_r) > y_r \mid Z_n > 0\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\inf_{t_1 \leq u \leq 1} W^+(u) > y_1, \dots, \inf_{t_r \leq u \leq 1} W^+(u) > y_r\right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Аргументы, необходимые для доказательства этой леммы, практически не отличаются от рассуждений, использовавшихся при доказательстве леммы 5, и мы их опускаем. Отметим лишь, что при доказательстве необходимо вместо леммы 3, на которой базировалось доказательство леммы 5, применить лемму 4.

2. Доказательство основного результата. Легко понять, что для доказательства основного результата работы — теоремы 3 достаточно установить справедливость ее утверждения для процесса $(\sigma\sqrt{n})^{-1} \ln(e + Z_{nt,n})$ вместо процесса $(\sigma\sqrt{n})^{-1} \ln Z_{nt,n}$. Именно так мы и поступим. Займемся сходимостью одномерных распределений.

Теорема 4. В условиях теоремы 3 для любого $t \in [0, 1]$ и любого $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln(e + Z_{nt,n}) > x \mid Z_n > 0 \right\} = \mathbf{P} \left\{ \inf_{t \leq u \leq 1} W^+(u) > x \right\}. \quad (53)$$

Доказательство. Как следует из леммы 1, неравенств

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(A_{n,t}(x) \overline{B_{n,t}(N)} \overline{C_{n,t}(\delta)} \right) &\leq \mathbf{P}(A_{n,t}(x)) \leq \mathbf{P} \left(A_{n,t}(x) \overline{B_{n,t}(N)} \overline{C_{n,t}(\delta)} \right) \\ &+ \mathbf{P}(A_{n,t}(x) B_{n,t}(N)) + \mathbf{P}(A_{n,t}(x) C_{n,t}(\delta)) \end{aligned} \quad (54)$$

и включения $A_{n,t}(x) \subset \{Z_n > 0\}$, справедливого для фиксированных $x > 0$ и $t \in [0, 1]$ и всех достаточно больших $n = n(x)$, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_{n,t}(x) \overline{B_{n,t}(N)} \overline{C_{n,t}(\delta)})}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} = \mathbf{P} \left\{ \inf_{t \leq u \leq 1} W^+(u) > x \right\}. \quad (55)$$

Используя равенство

$$Z_{nt,n} = Z_{nt}(1 - f_{nt,n}(0)) + \sum_{k=1}^{Z_{nt}} \left(I(Z_{nt,n}^{(k)} > 0) - (1 - f_{nt,n}(0)) \right), \quad (56)$$

неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{Z_{nt}} \left(I(Z_{nt,n}^{(k)} > 0) - (1 - f_{nt,n}(0)) \right) \right| \leq \sqrt{N Z_{nt} (1 - f_{nt,n}(0)) f_{nt,n}(0)},$$

справедливое на множестве $\overline{B_{n,t}(N)}$, и вспоминая (7), (8) и тот факт, что $Z_{nt}(1 - f_{nt,n}(0)) \geq e^{n^{1/4-\delta}}$ на множестве $\overline{C_{n,t}(\delta)} \cap \{Z_{nt} > 0\}$, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(A_{n,t}(x) \overline{B_{n,t}(N)} \overline{C_{n,t}(\delta)}) \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \ln(e + Z_{nt}(1 - f_{nt,n}(0))(1 + \varepsilon)) > x\sqrt{n}; \overline{C_{n,t}(\delta)}; Z_n > 0 \right\} \\ &\quad + \alpha_1(n, N, \delta) \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \ln Z_{nt} + \ln(1 - f_{nt,n}(0)) + \ln(1 + 2\varepsilon) > x\sqrt{n}; Z_n > 0 \right\} \\ &\quad + \alpha_1(n, N, \delta), \end{aligned}$$

где $\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \alpha_1(n, N, \delta) = 0$. Отсюда, из (2), леммы 6, неравенств (20) и (17) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_{n,t}(x) \overline{B_{n,t}(N)} \overline{C_{n,t}(\delta)})}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln Z_{nt} + \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln(1 - f_{nt,n}(0)) > x \mid Z_n > 0 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} S_{nt} + \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \min_{nt \leq k \leq n} (S_k - S_{nt}) > x \mid Z_n > 0 \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \min_{nt \leq k \leq n} S_k > x \mid Z_n > 0 \right\} \\
 &= \mathbf{P} \left\{ \inf_{t \leq u \leq 1} W^+(u) \geq x \right\}.
 \end{aligned} \tag{57}$$

По тем же соображениям,

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{P}(A_{n,t}(x) \overline{B_{n,t}(N)} \overline{C_{n,t}(\delta)}) \\
 &\geq \mathbf{P} \left\{ \ln(e + Z_{nt}(1 - f_{nt,n}(0))(1 - \varepsilon)) > x\sqrt{n}, \overline{B_{n,t}(N)} \overline{C_{n,t}(\delta)}; Z_n > 0 \right\} \\
 &\geq \mathbf{P} \left\{ \ln Z_{nt} + \ln(1 - f_{nt,n}(0)) + \ln(1 - 2\varepsilon) > x\sqrt{n}; Z_n > 0 \right\} \\
 &\quad + \alpha_2(n, N, \delta),
 \end{aligned} \tag{58}$$

где

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \alpha_2(n, N, \delta) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_{n,t}(x) \overline{B_{n,t}(N)} \overline{C_{n,t}(\delta)})}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \\
 &\geq \mathbf{P} \left\{ \inf_{t \leq u \leq 1} W^+(u) \geq x \right\}.
 \end{aligned} \tag{59}$$

Объединяя (57) и (58) получаем желаемую сходимость одномерных распределений.

Теорема доказана.

Практически дословное повторение рассуждений, использовавшихся при доказательстве предыдущей теоремы, позволяет убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. В условиях теоремы 3 для любых $0 < t_1 < \dots < t_r \leq 1$ и $y_1, \dots, y_r \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln(e + Z_{nt_1,n}) > y_1, \dots, \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \ln(e + Z_{nt_r,n}) > y_r \mid Z_n > 0 \right\} \\
 &= \mathbf{P} \left\{ \inf_{t_1 \leq u \leq 1} W^+(u) > y_1, \dots, \inf_{t_r \leq u \leq 1} W^+(u) > y_r \right\}.
 \end{aligned} \tag{60}$$

Доказательство теоремы 3. Для монотонной функции $h \in D[0, 1]$ и $\delta > 0$ положим

$$w'(h, \delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{0 \leq i \leq r} |h(t_i-) - h(t_{i-1})|,$$

где нижняя грань берется по всем конечным множествам $\{t_i\}$ точек, удовлетворяющих условиям $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$, $t_i - t_{i-1} > \delta$,

$i = 1, 2, \dots, r$. Согласно теореме 15.3 монографии [4], для доказательства плотности семейства мер, порождаемых *монотонными* по t процессами

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln Z_{nt,n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

при условии $\{Z_n > 0\}$, необходимо показать, что

i) для любого положительного η существует $a = a(\eta)$ такое, что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} |\gamma_n(t)| > a \mid Z_n > 0\right\} \leq \eta, \quad n \geq 1, \quad (61)$$

ii) для любых положительных ε и ε_1 существуют $\delta = \delta(\varepsilon, \varepsilon_1) \in (0, 1]$ и целое число $n_0 = n_0(\varepsilon, \varepsilon_1, \delta)$ такие, что

$$\mathbf{P}\{w'(\gamma_n, \delta) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0\} \leq \varepsilon_1, \quad n \geq n_0. \quad (62)$$

Поскольку $0 \leq \gamma_n(t) \leq \gamma_n(1) = (\sigma\sqrt{n})^{-1} \ln Z_n$, то справедливость i) вытекает из предыдущей теоремы.

Доказательство того, что выполнено ii), требует больших усилий. Будем искать нужное нам число δ среди элементов последовательности $\{r^{-1}\}$, $r = 1, 2, \dots$. Ясно, что для любого $\delta = r^{-1}$

$$\mathbf{P}\{w'(\gamma_n, r^{-1}) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0\} \leq \mathbf{P}\left\{\max_{0 < i \leq r} (\gamma(i\delta) - \gamma((i-1)\delta)) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0\right\}.$$

Отсюда, устремляя n к бесконечности и вспоминая теорему 5, получаем, что

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{w'(\gamma_n, r^{-1}) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0\} \\ & \leq \mathbf{P}\left\{\max_{0 < i \leq r} \left(\inf_{i\delta \leq u \leq 1} W^+(u) - \inf_{(i-1)\delta \leq u \leq 1} W^+(u)\right) \geq \varepsilon\right\} \\ & = \mathbf{P}\left\{\max_{0 < i \leq r} \left(\inf_{i\delta \leq u \leq 1} W^+(u) - \inf_{(i-1)\delta \leq u \leq i\delta} W^+(u)\right) \geq \varepsilon\right\} \\ & \leq \mathbf{P}\left\{\max_{0 < i \leq r} \left(W^+(i\delta) - \inf_{(i-1)\delta \leq u \leq i\delta} W^+(u)\right) \geq \varepsilon\right\} \\ & \leq \sum_{i=1}^r \mathbf{P}\left\{W^+(i\delta) - \inf_{(i-1)\delta \leq u \leq i\delta} W^+(u) \geq \varepsilon\right\} \\ & = \sum_{i=1}^r \mathbf{P}\left\{\sup_{(i-1)\delta \leq u \leq i\delta} (W^+(i\delta) - W^+(u)) \geq \varepsilon\right\}. \end{aligned} \quad (63)$$

Заметим теперь, что, согласно лемме 3 работы [2],

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbf{P}\left\{\sup_{(r-1)\delta \leq u \leq 1} (W^+(1) - W^+(u)) \geq \varepsilon\right\} = 0, \quad (64)$$

и, кроме того,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq u \leq \delta} (W^+(\delta) - W^+(u)) \geq \varepsilon\right\} = 0. \quad (65)$$

Пусть, как и прежде, $W(t)$ стандартное броуновское движение на $[0, 1]$, $W(0) = 0$. Используя рассуждения, применявшиеся при доказательстве уже упоминавшейся леммы 3 работы [2], нетрудно показать, что при $1 \leq i \leq r-1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{(i-1)\delta \leq u \leq i\delta} (W^+(i\delta) - W^+(u)) \geq \varepsilon \right\} \\ & \leq \frac{i}{i-1} \mathbf{P} \left\{ \sup_{(i-1)\delta \leq u \leq i\delta} |W(i\delta) - W(u)| \geq \varepsilon \right\} \\ & \leq 4\mathbf{P} \left\{ \sup_{(i-1)\delta \leq u \leq i\delta} |W(u) - W((i-1)\delta)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ & = 4\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq \delta} |W(u)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} = 4\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq 1} |W(u)| \geq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\delta}} \right\}, \quad (66) \end{aligned}$$

причем (см., например, [4, § 10])

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq 1} |W(u)| \geq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\delta}} \right\} = 0. \quad (67)$$

Собирая соотношения (64)–(67), подставляя их в (63) и вспоминая, что $\delta = r^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ w'(\gamma_n, r^{-1}) \geq \varepsilon \mid Z_n > 0 \right\} \\ & \leq \lim_{\delta \downarrow 0} \sup \left(4(\delta^{-1} - 2) \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq 1} |W(u)| \geq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\delta}} \right\} \right) = 0, \quad (68) \end{aligned}$$

что, очевидно, влечет (62).

Таким образом, условия i) и ii) выполнены, а значит, плотность мер, порождаемых условными процессами $\gamma_n(t)$, доказана.

Отсюда и из теоремы 5 с учетом того, что на интересующих нас множествах процессы $(\sigma\sqrt{n})^{-1} \ln(e + Z_{[nt],n})$ и $(\sigma\sqrt{n})^{-1} \ln Z_{[nt],n}$ асимптотически эквивалентны, следует (5).

Теорема 3 доказана.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность В. А. Афанасьеву за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению изложения представленных здесь результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В. И. Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1993, т. 5, № 1, с. 45–58.
2. Афанасьев В. И. О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1999, т. 11, № 2, с. 86–102.

3. Берестова Н. А. О больших отклонениях для ветвящихся процессов на конечном интервале времени. — Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 6, с. 1289–1292.
4. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
5. Ватутин В. А. О расстоянии до ближайшего общего предка в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса. — Матем. заметки, 1979, т. 25, № 5, с. 733–741.
6. Зубков А. М. Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, № 3, с. 614–623.
7. Козлов М. В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, № 4, с. 813–825.
8. Козлов М. В. Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Докл. РАН, 1995, т. 344, № 1, с. 12–15.
9. Сагитов С. М. Общие предки в критических ветвящихся процессах Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц. — Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем. наук, 1982, т. 3, с. 66–69.
10. Сагитов С. М. Новая предельная теорема для редуцированных критических ветвящихся процессов. — Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем. наук, 1989, т. 3, с. 33–36.
11. Сагитов С. М. Редуцированный критический ветвящийся процесс Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, № 4, с. 737–749.
12. Сагитов С. М. Предельное поведение редуцированных критических ветвящихся процессов. — Докл. АН СССР, 1988, т. 303, № 3, с. 47–49.
13. Сагитов С. М. Три предельные теоремы для редуцированных критических ветвящихся процессов. — Успехи мат. наук, 1995, т. 50, в. 5, с. 183–202.
14. Якимив А. Л. Редуцированные ветвящиеся процессы. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 3, с. 593–596.
15. Якимив А. Л. Асимптотические свойства докритических и надкритических редуцированных ветвящихся процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, в. 1, с. 183–188.
16. Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
17. Bolthausen E. On a functional central limit theorem for random walks conditioned to stay positive. — Ann. Probab., 1976, т. 4, № 3, p. 480–485.
18. Borovkov K. A., Vatutin V. A. Reduced critical branching processes in random environment. — Stochastic Process. Appl., 1997, т. 71, № 2, p. 225–240.
19. Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R. Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion. — Ann. Probab., 1977, т. 5, № 1, p. 117–129.
20. D'Souza J. C., Hambly B. M. On the survival probability of a branching process in a random environment. — Adv. Appl. Probab., 1997, т. 29, № 1, p. 38–55.
21. Fleischmann K., Vatutin V. A. Reduced subcritical Galton–Watson processes in random environment. — Adv. Appl. Probab., 1999, т. 31, № 1, p. 88–111.
22. Fleischmann K., Prehn U. Ein Grenzwertsatz für subkritische Verzweigungsprozesse mit endlich vielen Typen von Teilchen. — Math. Nachr., 1977, т. 79, p. 357–362.
23. Fleischmann K., Siegmund-Schultze R. The structure of reduced critical Galton–Watson processes. — Math. Nachr., 1977, т. 79, p. 233–241.
24. Guivarc'h Y., Liu Q. Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire. — C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 2001, v. 332, № 4, p. 339–344.
25. Liu Q. On the survival probability of a branching process in a random environment. — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 1996, v. 32, № 1, p. 1–10.
26. Geiger J., Kersting G. The survival probability of a critical branching process in random environment. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, в. 45, № 3, p. 607–615.

Поступила в редакцию
27.VIII.2001