Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Урусов, А. С. Черный, Разделяющие моменты для мер на пространствах с фильтрацией, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 416–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp296>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:56:19

17. Матиясевич Ю. В. Некоторые алгебраические методы вычисления количества раскрасок графов. — Зап. науч. семинаров ПОМИ, 2001, т. 283, с. 193–205; <http://www.pdmi.ras.ru/zns/2001/v283.html>.
18. May K. O. The origin of the four-color conjecture. — Isis, 1965, v. 56, p. 346–348.
19. Ore Ø. The Four-Color Problem. New York–London: Academic Press, 1967, 259 p.
20. Robertson N., Sanders D., Seymour P., Thomas R. The four-colour theorem. — J. Combin. Theory, Ser. B, 1997, v. 70, № 1, p. 2–44.
21. Thomas R. An update on the four-colour theorem. — Notices Amer. Math. Soc., 1998, v. 45, № 7, p. 848–859; <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.ps>.
22. Saaty T. L. Thirteen colorful variations on Guthrie's four-color conjecture. — Amer. Math. Monthly, 1972, v. 79, p. 2–43.
23. Saaty T. L., Kainen P. C. The Four-Color Problem. Assaults and Conquest. Düsseldorf etc.: McGraw-Hill, 1977, 217 p.

Поступила в редакцию
17.XII.2002

© 2003 г.

УРУСОВ М. А.*, ЧЕРНЫЙ А. С.*

РАЗДЕЛЯЮЩИЕ МОМЕНТЫ ДЛЯ МЕР НА ПРОСТРАНСТВАХ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ

В работе вводится понятие *разделяющего момента* для пары мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$, заданных на пространстве с фильтрацией. Это понятие дает удобное описание взаимного расположения $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ с точки зрения вопросов абсолютной непрерывности и сингулярности. Далее, мы находим явный вид разделяющего момента для случаев, когда $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — распределения процессов Леви, распределения решений стохастических дифференциальных уравнений и распределения процессов Бесселя. Полученные результаты дают, в частности, критерии локальной абсолютной непрерывности, абсолютной непрерывности, а также сингулярности мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$.

Ключевые слова и фразы: разделяющий момент, локальная абсолютная непрерывность мер, абсолютная непрерывность мер, сингулярность мер, процессы Леви, стохастические дифференциальные уравнения, процессы Бесселя.

1. Введение

Пусть $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — вероятностные меры, заданные на пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)})$. Мы вводим понятие *разделяющего момента* для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ (см. определение 2.2). Неформально, разделяющий момент — это такой момент остановки, «до которого $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ эквивалентны, а после которого $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ сингулярны». В терминах разделяющего момента легко выражаются такие свойства, как локальная абсолютная непрерывность, абсолютная непрерывность, а также сингулярность $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ (см. лемму 2.1). Особенно же удобным понятие разделяющего момента является в том случае, когда меры $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ «находятся в общем положении», т.е. для них не выполнено ни свойство локальной абсолютной непрерывности, ни свойство сингулярности.

В разделе 3 мы находим явный вид разделяющего момента для случая, когда $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — распределения процессов Леви (см. теорему 3.1). Как следствие, отсюда получаются критерии локальной абсолютной непрерывности, абсолютной непрерывности, а

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: urusov@mech.math.msu.su, cherny@mech.math.msu.su

также сингулярности для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$. Эти критерии известны (см. [10], [11]; более ранние результаты в этом направлении содержатся в [9], [16], [17]).

В разделе 4 мы находим явный вид разделяющего момента для случая, когда $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — распределения решений одномерных однородных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ); см. теорему 4.1. Как следствие, отсюда получены критерии локальной абсолютной непрерывности, абсолютной непрерывности, а также сингулярности для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$. Подобные результаты для более общих СДУ содержатся в [7, гл. IV, § 4b], где они получены из теории процессов Хеллингера. Мы же рассматриваем более частный случай (лишь однородные СДУ), однако в этом случае получаем более полные результаты.

В разделе 5 мы находим явный вид разделяющего момента для случая, когда $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — распределения процессов Бесселя (см. теорему 5.1). Отметим, что процесс Бесселя является решением некоторого СДУ, однако результаты раздела 4 неприменимы, поскольку СДУ для процесса Бесселя является сингулярным (это понятие введено в [4]).

В приложении собраны некоторые факты о поведении решений СДУ. Этот материал является вспомогательным. На нем основываются доказательства следствий 4.1, 4.2 и 4.3, но он не нужен для понимания результатов раздела 4.

2. Разделяющие моменты

2.1. Взаимное расположение двух мер на измеримом пространстве без фильтрации. Пусть $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — вероятностные меры на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$. Следующий результат хорошо известен.

Предложение 2.1. *Существует разложение $\Omega = E \sqcup D \sqcup \tilde{D}$, $E, D, \tilde{D} \in \mathcal{F}$, такое, что $\tilde{\mathbf{P}} \sim \mathbf{P}$ на множестве E и $\mathbf{P}(\tilde{D}) = \tilde{\mathbf{P}}(D) = 0$ (через « $\sqcup$ » мы обозначаем дизъюнктное объединение множеств). Это разложение единственно $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н.*

З а м е ч а н и я. (i) Отсюда следует, что разложение $\Omega = E \sqcup E^c$ таково, что $\tilde{\mathbf{P}} \sim \mathbf{P}$ на множестве E и $\tilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}$ на множестве E^c (через E^c мы обозначаем дополнение к множеству E). Это разложение также единственно $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н.

(ii) Множества $E, D, \tilde{D}$ из предложения 2.1 могут быть получены следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \left\{ \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} = 0, \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{Q}} > 0 \right\}, & D &= \left\{ \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} > 0, \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{Q}} = 0 \right\}, \\ E &= \left\{ \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} > 0, \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{Q}} > 0 \right\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{Q} = (\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}})/2$.

Результат предложения 2.1 проиллюстрирован на рис. 1.

Рис. 1. Взаимное расположение двух мер на измеримом пространстве без фильтрации

2.2. Взаимное расположение двух мер на измеримом пространстве с фильтрацией. Рассмотрим измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с непрерывной справа фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$, т.е. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. Для произвольного момента остановки τ определим σ -алгебру $\mathcal{F}_\tau$ по формуле

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ для всех } t \in [0, \infty)\}. \quad (2.1)$$

(В частности, $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$.)

Пусть $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — вероятностные меры на $\mathcal{F}$. Как обычно, мы обозначаем через $\mathbf{P}_\tau$ (соответственно, $\tilde{\mathbf{P}}_\tau$) ограничение $\mathbf{P}$ (соответственно, $\tilde{\mathbf{P}}$) на σ -алгебру $\mathcal{F}_\tau$.

Присоединим к $[0, \infty]$ точку δ такую, что $\delta > \infty$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Отображение $T: \Omega \rightarrow [0, \infty] \cup \{\delta\}$ назовем *расширенным моментом остановки*, если $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in [0, \infty]$.

Следующая теорема является аналогом предложения 2.1 для случая измеримого пространства с фильтрацией. Похожее утверждение доказано в [8, лемма 5.2].

Теорема 2.1. (i) *Существует расширенный момент остановки S такой, что для любого момента остановки τ*

$$\tilde{\mathbf{P}}_\tau \sim \mathbf{P}_\tau \quad \text{на множестве } \{\tau < S\}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_\tau \perp \mathbf{P}_\tau \quad \text{на множестве } \{\tau \geq S\}. \quad (2.3)$$

(ii) *Если S' — другой расширенный момент остановки с этими свойствами, то $S' = S$ $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Положим $\mathbf{Q} = (\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}})/2$ и обозначим через $(Z_t)_{t \in [0, \infty]}$ и $(\tilde{Z}_t)_{t \in [0, \infty]}$ процессы плотности мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ относительно меры $\mathbf{Q}$ (при этом $Z_\infty = \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$, $\tilde{Z}_\infty = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{Q}}$). Обозначим через $(\overline{\mathcal{F}}_t)$ $\mathbf{Q}$ -полное дополнение фильтрации $(\mathcal{F}_t)$. Тогда на $(\overline{\mathcal{F}}_t)$ процессы Z и $\tilde{Z}$ обладают модификациями, у которых все траектории непрерывны справа и имеют конечные пределы слева. Момент

$$\bar{S} = \inf \left\{ t \in [0, \infty] : Z_t = 0 \text{ или } \tilde{Z}_t = 0 \right\}$$

(« $\inf$ » отличается от « $\inf$ » лишь тем, что $\inf \emptyset = \delta$) является расширенным $(\overline{\mathcal{F}}_t)$ -моментом остановки. Согласно [7, гл. I, лемма 1.19], существует расширенный $(\mathcal{F}_t)$ -момент остановки S такой, что $S = \bar{S}$ $\mathbf{Q}$ -п.н. Из [7, гл. III, лемма 3.6] следует, что $Z_t \tilde{Z}_t = 0$ на стохастическом интервале $[S, \infty]$ $\mathbf{Q}$ -п.н. Следовательно, для любого момента остановки τ имеем $Z_\tau \tilde{Z}_\tau = 0$ $\mathbf{Q}$ -п.н. на множестве $\{\tau \geq S\}$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться равенством

$$\frac{d\mathbf{P}_\tau}{d\mathbf{Q}_\tau} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} \middle| \mathcal{F}_\tau \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} (Z_\infty | \mathcal{F}_\tau) = Z_\tau$$

и аналогичным равенством для $\frac{d\tilde{\mathbf{P}}_\tau}{d\mathbf{Q}_\tau}$.

(ii) Из предложения 2.1 следует, что для любого момента остановки τ множества $\{\tau \geq S\}$ и $\{\tau \geq S'\}$ совпадают $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н. Отсюда вытекает требуемое утверждение (достаточно рассмотреть лишь детерминированные моменты τ).

О п р е д е л е н и е 2.2. Любой расширенный момент остановки, удовлетворяющий (2.2) и (2.3) для всех моментов остановки τ , назовем *разделяющим моментом* для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$.

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы 2.1 (ii) видно, что при определении разделяющего момента можно пользоваться свойствами (2.2) и (2.3) лишь для детерминированных моментов τ .

С л е д с т в и е 2.1. (i) *Существует расширенный момент остановки S такой, что для любого момента остановки τ*

$$\tilde{\mathbf{P}}_\tau \ll \mathbf{P}_\tau \quad \text{на множестве } \{\tau < S\}, \quad (2.4)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_\tau \perp \mathbf{P}_\tau \quad \text{на множестве } \{\tau \geq S\}. \quad (2.5)$$

(ii) *Если S' — другой расширенный момент остановки с этими свойствами, то $S' = S$ $\tilde{\mathbf{P}}$ -п.н.*

О п р е д е л е н и е 2.3. Любой расширенный момент остановки, удовлетворяющий (2.4) и (2.5) для всех моментов остановки τ , назовем *моментом, отделяющим $\tilde{P}$ от P* .

Ясно, что любой разделяющий момент для P и $\tilde{P}$ будет также и моментом, отделяющим $\tilde{P}$ от P . Обратное неверно, поскольку разделяющий момент определен однозначно $P, \tilde{P}$ -п.н., в то время как момент, отделяющий $\tilde{P}$ от P , определен однозначно лишь $\tilde{P}$ -п.н.

Говоря неформально, теорема 2.1 утверждает, что любые две меры P и $\tilde{P}$ «эквивалентны до некоторого случайного момента S » и «становятся сингулярными в момент S ». Здесь $S = \delta$ означает, что P и $\tilde{P}$ «никогда не становятся сингулярными», т.е. они «эквивалентны до бесконечности». Эта интерпретация теоремы 2.1 позволяет сказать, что если мы знаем разделяющий момент S , то мы знаем, каково взаимное расположение P и $\tilde{P}$. Проиллюстрируем это следующим результатом. Его доказательство проводится непосредственно.

Лемма 2.1. Пусть S — разделяющий момент для P и $\tilde{P}$. Тогда

- (i) $\tilde{P} \ll^{\text{loc}} P \iff S \geq \infty \tilde{P}\text{-п.н.};$
- (ii) $\tilde{P} \stackrel{\text{loc}}{\sim} P \iff S \geq \infty P, \tilde{P}\text{-п.н.};$
- (iii) $\tilde{P} \ll P \iff S = \delta \tilde{P}\text{-п.н.};$
- (iv) $\tilde{P} \sim P \iff S = \delta P, \tilde{P}\text{-п.н.};$
- (v) $\tilde{P} \perp P \iff S \leq \infty P, \tilde{P}\text{-п.н.} \iff S \leq \infty P\text{-п.н.}$

З а м е ч а н и е. В терминах разделяющего момента можно охарактеризовать и другие типы взаимного расположения P и $\tilde{P}$. Например, для произвольного $t \in [0, \infty]$

$$\tilde{P}_t \perp P_t \iff S \leq t P, \tilde{P}\text{-п.н.} \iff S \leq t P\text{-п.н.}$$

Взаимное расположение мер P и $\tilde{P}$ проиллюстрировано на рис. 2.

Рис. 2. Взаимное расположение двух мер на измеримом пространстве с фильтрацией (на рисунке $S(\omega_1) = 0$, $S(\omega_3) = \infty$, $S(\omega_4) = \delta$)

Кривая 1 — это «граница меры $\tilde{\mathbf{P}}$ », кривая 2 — это «граница меры $\mathbf{P}$ ». Имеется в виду, что мера $\tilde{\mathbf{P}}$ «сидит» над кривой 1, а мера $\mathbf{P}$ — под кривой 2. Если мы хотим получить разложение $\Omega = E_t \sqcup D_t \sqcup \tilde{D}_t$ предложения 2.1 для измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F}_t)$, то нужно провести вертикальную линию, соответствующую моменту времени t . На рисунке показаны три таких разложения: для $t = 0$, для $t = u \in (0, \infty)$ и для $t = \infty$.

Разделяющий момент для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ иллюстрируется на рисунке следующим образом. Если $\omega \in D_0 \sqcup \tilde{D}_0$, то $S(\omega) = 0$. (Это происходит в случае $\omega = \omega_1$ на рисунке.) Если $\omega \in E_0$, то надо провести через точку ω горизонтальную прямую. Тогда $S(\omega)$ — момент пересечения этой прямой с кривой 1 или с кривой 2 ($\omega = \omega_2$ на рисунке). Если эта прямая не пересекает ни кривую 1, ни кривую 2, то $S = \infty$ в случае $\omega \in D_\infty \sqcup \tilde{D}_\infty$ ($\omega = \omega_3$ на рисунке) и $S = \delta$ в случае $\omega \in E_\infty$ ($\omega = \omega_4$ на рисунке).

3. Разделяющие моменты для процессов Леви

Рассмотрим пространство $D([0, \infty), \mathbf{R}^d)$ непрерывных справа и имеющих конечные пределы слева функций $[0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^d$. Через X обозначим канонический процесс на $D([0, \infty), \mathbf{R}^d)$, т.е. процесс, определенный по формуле $X_t(\omega) = \omega(t)$. Введем фильтрацию $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(X_s; s \in [0, t + \varepsilon])$ и положим $\mathcal{F} = \bigvee_{t \in [0, \infty)} \mathcal{F}_t$. Будем обозначать через $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$, а через $\|\cdot\|$ — евклидову норму.

Пусть $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — распределения процессов Леви с характеристиками (b, c, ν) и $(\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{\nu})$. Это значит, что для $t \in [0, \infty)$ и $\lambda \in \mathbf{R}^d$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} e^{i(\lambda, X_t)} = \exp \left\{ t \left[i(\lambda, b) - \frac{1}{2} (\lambda, c\lambda) + \int_{\mathbf{R}^d} \left(e^{i(\lambda, x)} - 1 - i(\lambda, x) I(\|x\| \leq 1) \right) \nu(dx) \right] \right\},$$

где $b \in \mathbf{R}^d$, c — симметричная неотрицательно определенная матрица размера $d \times d$, ν — мера на $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ со свойствами $\nu(\{0\}) = 0$ и $\int_{\mathbf{R}^d} (\|x\|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty$. Аналогичное свойство имеет место для $\tilde{\mathbf{P}}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{\nu}$. По поводу дальнейших сведений о процессах Леви см. [1], [14], [18, гл. III, § 1b].

Следующая теорема дает явный вид разделяющего момента для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$. Она легко выводится из результатов [15].

Теорема 3.1. *Разделяющий момент S для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ имеет следующий вид.*

(i) Если $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$, то $S = \delta$ $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -н.н.

(ii) Если $\mathbf{P} \neq \tilde{\mathbf{P}}$ и выполнены условия

$$c = \tilde{c}, \quad (3.1)$$

$$\int_{\mathbf{R}^d} \left(\sqrt{\frac{d\nu}{d(\nu + \tilde{\nu})}} - \sqrt{\frac{d\tilde{\nu}}{d(\nu + \tilde{\nu})}} \right)^2 d(\nu + \tilde{\nu}) < \infty, \quad (3.2)$$

$$b - \tilde{b} - \int_{\{\|x\| \leq 1\}} x d(\nu - \tilde{\nu}) \in \mathfrak{N}(c), \quad (3.3)$$

где $\mathfrak{N}(c) = \{cx: x \in \mathbf{R}^d\}$, то

$$S = \inf \{t \in [0, \infty): \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \notin E\} \text{ } \mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}\text{-н.н.}$$

(полагаем $\inf \emptyset = \infty$), где $E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ — такое множество, что $\tilde{\nu} \sim \nu$ на E и $\tilde{\nu} \perp \nu$ на дополнении к E .

(iii) Если хотя бы одно из условий (3.1)–(3.3) нарушается, то $S = 0$ $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -н.н.

З а м е ч а н и я. (i) Если выполнено (3.2), то $\int_{\{\|x\| \leq 1\}} \|x\| d\|\nu - \tilde{\nu}\| < \infty$, где $\|\nu - \tilde{\nu}\|$ — полная вариация знакопеременной меры $\nu - \tilde{\nu}$ (см. [14, замечание 33.3])

или [15, лемма 2.18]). Следовательно, при выполнении условия (3.2) интеграл в (3.3) корректно определен.

(ii) В [15] описана структура множеств E_t для каждого $t \in [0, \infty)$, где $E_t \in \mathcal{F}_t$ — такое множество, что $\tilde{\mathbf{P}}_t \sim \mathbf{P}_t$ на E_t и $\tilde{\mathbf{P}}_t \perp \mathbf{P}_t$ на дополнении к E_t . Доказательство теоремы 3.1 опирается на эти результаты. Фактически, теорема 3.1 описывает эти множества эквивалентным образом.

Из теоремы 3.1 и леммы 2.1 легко вытекает следующее утверждение относительно взаимного расположения мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$. Этот результат известен (см. [10], [11]).

Следствие 3.1. (i) Либо $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$, либо $\tilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}$.

(ii) Для $\tilde{\mathbf{P}} \stackrel{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3.1)–(3.3) и условие $\tilde{\nu} \ll \nu$.

(iii) Для $\tilde{\mathbf{P}}_0 \perp \mathbf{P}_0$ необходимо и достаточно, чтобы не выполнялось хотя бы одно из условий (3.1)–(3.3).

4. Разделяющие моменты для решений стохастических дифференциальных уравнений

4.1. Некоторые определения. Будем рассматривать одномерные однородные СДУ вида

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad X_0 = x_0, \quad (4.1)$$

где b и σ — борелевские функции $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$.

О п р е д е л е н и е 4.1. Решением уравнения (4.1) называется пара (Y, B) непрерывных согласованных процессов на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, \infty)}, \mathbf{Q})$ таких, что

- i) B является $(\mathcal{G}_t, \mathbf{Q})$ -броуновским движением;
- ii) для любого $t \in [0, \infty)$

$$\int_0^t (|b(Y_s)| + \sigma^2(Y_s)) ds < \infty \quad \mathbf{Q}\text{-п.н.};$$

- iii) для любого $t \in [0, \infty)$

$$Y_t = x_0 + \int_0^t b(Y_s) ds + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s \quad \mathbf{Q}\text{-п.н.}$$

З а м е ч а н и е. Решение в смысле определения 4.1 иногда называют *слабым решением*.

Для наших целей удобно понимать под решением не пару процессов, а вероятностную меру на пространстве $C([0, \infty))$ непрерывных функций $[0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$. Обозначим через X канонический процесс на $C([0, \infty))$. Рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(X_s; s \in [0, t + \varepsilon])$ и положим $\mathcal{F} = \bigvee_{t \in [0, \infty)} \mathcal{F}_t$.

О п р е д е л е н и е 4.2. Решением уравнения (4.1) называется вероятностная мера $\mathbf{P}$ на $\mathcal{F}$ такая, что

- i) $\mathbf{P}\{X_0 = x_0\} = 1$;
- ii) для любого $t \in [0, \infty)$

$$\int_0^t (|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)) ds < \infty \quad \mathbf{P}\text{-п.н.};$$

- iii) процесс

$$M_t = X_t - \int_0^t b(X_s) ds, \quad t \in [0, \infty),$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ -локальным мартингалом с угловой скобкой

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \sigma^2(X_s) ds, \quad t \in [0, \infty).$$

Следующее утверждение (см. [4, теорема 1.24]) устанавливает связь между определениями 4.1 и 4.2.

Предложение 4.1. (i) Пусть (Y, B) — решение (4.1) в смысле определения 4.1. Положим $\mathbf{P} = \text{Law}(Y_t; t \in [0, \infty))$. Тогда $\mathbf{P}$ является решением (4.1) в смысле определения 4.2.

(ii) Пусть $\mathbf{P}$ — решение (4.1) в смысле определения 4.2. Тогда существуют фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, \infty)}, \mathbf{Q})$ и пара процессов (Y, B) на нем такие, что (Y, B) — решение (4.1) в смысле определения 4.1 и $\text{Law}(Y_t; t \in [0, \infty)) = \mathbf{P}$.

З а м е ч а н и е. Если пользоваться определением 4.2, то понятие единственности решения не требует специального определения.

4.2. Взрывающиеся решения. Определения 4.1 и 4.2 не затрагивают случай взрывающихся решений. Нам же потребуется рассматривать такие решения. Для этого введем необходимые обозначения.

Добавим к вещественной прямой точку Δ и обозначим через $C_\Delta([0, \infty))$ пространство функций $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\Delta\}$ со следующим свойством: существует момент $\zeta(f) \in [0, \infty]$ такой, что f непрерывна на $[0, \zeta(f))$, $f = \Delta$ на $[\zeta(f), \infty)$ и если $0 < \zeta(f) < \infty$, то $\lim_{t \uparrow \zeta(f)} f(t) = \infty$ или $\lim_{t \uparrow \zeta(f)} f(t) = -\infty$. Момент $\zeta(f)$ называется моментом взрыва f . Ниже в этом разделе будем обозначать через X канонический процесс на $C_\Delta([0, \infty))$. Рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(X_s; s \in [0, t + \varepsilon])$ и положим $\mathcal{F} = \bigvee_{t \in [0, \infty)} \mathcal{F}_t$. Будем обозначать через ζ момент взрыва для процесса X .

Следующее определение является обобщением определения 4.2 на случай взрывающихся решений.

О п р е д е л е н и е 4.3. Решением уравнения (4.1) называется вероятностная мера $\mathbf{P}$ на $\mathcal{F}$ такая, что

- i) $\mathbf{P}\{X_0 = x_0\} = 1$;
- ii) для любых $t \in [0, \infty)$ и $n \in \mathbf{N}$ таких, что $n > |x_0|$,

$$\int_0^{t \wedge T_n} (|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)) ds < \infty \quad \mathbf{P}\text{-п.н.},$$

где $T_n = \inf\{t \in [0, \infty): X_t = n \text{ или } X_t = -n\}$ (полагаем $\inf \emptyset = \infty$);

- iii) для любого $n \in \mathbf{N}$ такого, что $n > |x_0|$, процесс

$$M_t^n = X_{t \wedge T_n} - \int_0^{t \wedge T_n} b(X_s) ds, \quad t \in [0, \infty),$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ -локальным мартингалом с угловой скобкой

$$\langle M^n \rangle_t = \int_0^{t \wedge T_n} \sigma^2(X_s) ds, \quad t \in [0, \infty).$$

Ясно, что если $\mathbf{P}$ — решение (4.1) в смысле определения 4.3, причем $\zeta = \infty$ $\mathbf{P}$ -п.н., то сужение $\mathbf{P}$ на $C([0, \infty))$ является решением (4.1) в смысле определения 4.2. Обратно, если $\mathbf{P}$ — решение (4.1) в смысле определения 4.2, то существует единственное продолжение меры $\mathbf{P}$ на $C_\Delta([0, \infty))$, являющееся решением (4.1) в смысле определения 4.3.

О п р е д е л е н и е 4.4. Борелевская функция $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ называется локально интегрируемой в точке $a \in [-\infty, \infty]$, если существует окрестность U точки a такая, что $\int_U f(x) dx < \infty$. (Под окрестностями точки ∞ понимаются лучи вида (x, ∞) ; аналогично понимаются окрестности точки $-\infty$.) Обозначение: $f \in L_{\text{loc}}^1(a)$.

Функция f называется локально интегрируемой на множестве $A \subseteq [-\infty, \infty]$, если f локально интегрируема в каждой точке этого множества. Обозначение: $f \in L_{\text{loc}}^1(A)$.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат (см. [6]).

Предложение 4.2 (Энгельберт, Шмидт). Пусть коэффициенты b и σ уравнения (4.1) удовлетворяют следующим условиям:

$$\sigma(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (4.2)$$

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}). \quad (4.3)$$

Тогда для любого начального условия $x_0 \in \mathbf{R}$ существует единственное решение (4.1) в смысле определения 4.3.

4.3. Явный вид разделяющего момента. Будем использовать обозначения $\mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X$ и ζ , введенные в предыдущем пункте.

Рассмотрим СДУ

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad X_0 = x_0, \quad (4.4)$$

$$dX_t = \tilde{b}(X_t) dt + \tilde{\sigma}(X_t) dB_t, \quad X_0 = x_0 \quad (4.5)$$

с одним и тем же начальным условием x_0 . Ниже будем предполагать, что выполнены условия (4.2), (4.3) и аналогичные условия для $\tilde{b}, \tilde{\sigma}$.

Положим

$$\rho(x) = \exp \left\{ - \int_0^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (4.6)$$

$$s(x) = \int_0^x \rho(y) dy, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (4.7)$$

$$s(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} s(x), \quad (4.8)$$

$$s(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) \quad (4.9)$$

и введем аналогичные величины $\tilde{\rho}, \tilde{s}, \tilde{s}(\infty), \tilde{s}(-\infty)$, определяемые через $\tilde{b}$ и $\tilde{\sigma}$. Обозначим через μ_L меру Лебега на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Назовем точку $x \in \mathbf{R}$ *хорошей*, если существует окрестность U точки x такая, что $\sigma^2 = \tilde{\sigma}^2$ μ_L -п.в. на U и $(b - \tilde{b})^2 / \sigma^4 \in L^1_{\text{loc}}(x)$. Назовем точку ∞ *хорошей*, если все точки из $[x_0, \infty)$ — хорошие и выполнены условия

$$s(\infty) < \infty, \quad (4.10)$$

$$(s(\infty) - s) \frac{(b - \tilde{b})^2}{\rho \sigma^4} \in L^1_{\text{loc}}(\infty). \quad (4.11)$$

Назовем точку $-\infty$ *хорошей*, если все точки из $(-\infty, x_0]$ — хорошие и выполнены условия

$$s(-\infty) > -\infty, \quad (4.12)$$

$$(s - s(-\infty)) \frac{(b - \tilde{b})^2}{\rho \sigma^4} \in L^1_{\text{loc}}(-\infty). \quad (4.13)$$

Обозначим через A дополнение к множеству хороших точек из $[-\infty, \infty]$. Легко видеть, что A замкнуто в $[-\infty, \infty]$. Введем также обозначение

$$A^\varepsilon = \left\{ x \in [-\infty, \infty] : \rho(x, A) < \varepsilon \right\},$$

где $\rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$, $x, y \in [-\infty, \infty]$ (полагаем $\emptyset^\varepsilon = \emptyset$).

Основным результатом данного раздела является следующая теорема. Ее доказательство мы не приводим, поскольку оно занимает значительный объем. Оно будет приведено в другой статье тех же авторов.

Теорема 4.1. Пусть $b, \sigma, \tilde{b}, \tilde{\sigma}$ удовлетворяют условиям (4.2) и (4.3). Обозначим через $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ решения уравнений (4.4) и (4.5) в смысле определения 4.3. Тогда разделяющий момент S для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ имеет следующий вид.

(i) Если $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$, то $S = \delta$ $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н.

(ii) Если $\mathbf{P} \neq \tilde{\mathbf{P}}$, то

$$S = \sup_n \inf \{t \in [0, \infty): X_t \in A^{1/n}\} \quad \mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}\text{-п.н.},$$

где « $\overline{\inf}$ » отличается от « $\inf$ » лишь тем, что $\overline{\inf} \emptyset = \delta$.

З а м е ч а н и я. (i) Поясним, как устроен момент S в случае (ii). С этой целью рассмотрим «ближайшую справа к x_0 плохую точку» α , определенную по формуле

$$\alpha = \begin{cases} \inf\{x: x \in [x_0, \infty] \cap A\}, & \text{если } [x_0, \infty] \cap A \neq \emptyset, \\ \Delta, & \text{если } [x_0, \infty] \cap A = \emptyset, \end{cases}$$

и рассмотрим «момент достижения α »:

$$U = \begin{cases} \delta, & \text{если } \alpha = \Delta, \\ \delta, & \text{если } \alpha = \infty \text{ и } \overline{\lim}_{t \leq \zeta} \dot{X}_t < \infty, \\ \zeta, & \text{если } \alpha = \infty \text{ и } \overline{\lim}_{t \leq \zeta} X_t = \infty, \\ T_\alpha, & \text{если } \alpha < \infty, \end{cases}$$

где $T_\alpha = \overline{\inf}\{t \in [0, \infty): X_t = \alpha\}$. Аналогично определим «ближайшую слева к x_0 плохую точку» β и V как «момент достижения β ». Тогда $S = U \wedge V$ $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н.

(ii) Из теоремы 4.1 и симметрии мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ легко видеть, что в предположении $[x_0, \infty) \subseteq [-\infty, \infty] \setminus A$ пара условий (4.10), (4.11) эквивалентна паре условий

$$\tilde{s}(\infty) < \infty, \quad (4.14)$$

$$\left(\tilde{s}(\infty) - \tilde{s}\right) \frac{(b - \tilde{b})^2}{\tilde{\rho} \tilde{\sigma}^4} \in L_{\text{loc}}^1(\infty). \quad (4.15)$$

Аналогичное замечание справедливо для (4.12), (4.13).

Из теоремы 4.1, леммы 2.1 и предложений А.1, А.2 вытекает ряд утверждений относительно взаимного расположения мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$. Для их формулировки введем в рассмотрение следующие условия:

$$\tilde{s}(\infty) = \infty, \quad (4.16)$$

$$\tilde{s}(\infty) < \infty \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{s}(\infty) - \tilde{s}}{\tilde{\rho} \tilde{\sigma}^2} \notin L_{\text{loc}}^1(\infty), \quad (4.17)$$

$$\tilde{s}(\infty) < \infty \quad \text{и} \quad (\tilde{s}(\infty) - \tilde{s}) \frac{(b - \tilde{b})^2}{\tilde{\rho} \tilde{\sigma}^4} \in L_{\text{loc}}^1(\infty). \quad (4.18)$$

Условие (4.16) означает, что траектории канонического процесса X относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$ не стремятся к ∞ при $t \rightarrow \infty$. Условие (4.17) означает, что траектории канонического процесса X относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$ с положительной вероятностью стремятся к ∞ при $t \rightarrow \infty$, но при этом не взрываются (т.е. момент взрыва для них равен ∞). Условие (4.18) есть пара (4.14), (4.15). Аналогичным образом рассмотрим условия «на $-\infty$ »:

$$\tilde{s}(-\infty) = -\infty, \quad (4.19)$$

$$\tilde{s}(-\infty) > -\infty \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{s} - \tilde{s}(-\infty)}{\tilde{\rho} \tilde{\sigma}^2} \notin L_{\text{loc}}^1(-\infty), \quad (4.20)$$

$$\tilde{s}(-\infty) > -\infty \quad \text{и} \quad (\tilde{s} - \tilde{s}(-\infty)) \frac{(b - \tilde{b})^2}{\tilde{\rho} \tilde{\sigma}^4} \in L_{\text{loc}}^1(-\infty). \quad (4.21)$$

Следствие 4.1. В предположениях теоремы 4.1 имеем $\tilde{\mathbf{P}} \ll^{\text{loc}} \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma^2 = \tilde{\sigma}^2 \mu_L\text{-п.в.} \quad \text{и} \quad \frac{(b - \tilde{b})^2}{\sigma^4} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}) \quad (4.22)$$

и выполнено по крайней мере одно из условий (4.16)–(4.18), а также по крайней мере одно из условий (4.19)–(4.21).

Следствие 4.2. В предположениях теоремы 4.1 имеем $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$, либо выполнены (4.16), (4.21), (4.22), либо выполнены (4.18), (4.19), (4.22), либо выполнены (4.18), (4.21), (4.22).

Следствие 4.3. В предположениях теоремы 4.1 имеем $\tilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\mathbf{P}} \neq \mathbf{P}$ и $-\infty, \infty \in A$.

5. Разделяющие моменты для процессов Бесселя

Рассмотрим СДУ

$$dX_t = \gamma dt + 2\sqrt{|X_t|} dB_t, \quad X_0 = x_0$$

с $\gamma \geq 0$, $x_0 \geq 0$. Известно, что это уравнение обладает единственным решением $\mathbf{Q}$ в смысле определения 4.2, причем мера $\mathbf{Q}$ сосредоточена на неотрицательных функциях. Процесс $(Z_t)_{t \in [0, \infty)}$, имеющий распределение $\mathbf{Q}$, называется *квадратом процесса Бесселя размерности γ , выходящего из точки $\sqrt{x_0}$* . Процесс $\sqrt{Z}$ называется *процессом Бесселя размерности γ , выходящим из точки $\sqrt{x_0}$* . По поводу дальнейших сведений о процессах Бесселя см. [2], [3], [5], [12], [13, гл. XI].

Обозначим через X канонический процесс на $C([0, \infty))$. Рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(X_s; s \in [0, t + \varepsilon])$ и положим $\mathcal{F} = \bigvee_{t \in [0, \infty)} \mathcal{F}_t$.

Теорема 5.1. Пусть $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — распределения процессов Бесселя размерностей γ и $\tilde{\gamma}$, выходящих из точки x_0 . Тогда разделяющий момент S для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ имеет следующий вид.

(i) Если $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$, то $S = \delta$ $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н.

(ii) Если $\mathbf{P} \neq \tilde{\mathbf{P}}$, то

$$S = \inf\{t \in [0, \infty): X_t = 0\} \quad \mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

(полагаем $\inf \emptyset = \infty$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать лишь пункт (ii). Обозначим $\inf\{t \in [0, \infty): X_t = 0\}$ через T_0 . Из [2, теорема 4.1] и строго марковского свойства процессов Бесселя вытекает, что $S \leq T_0$ $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н.

Докажем, что $S \geq T_0$ $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н. При $x_0 = 0$ это неравенство очевидно, так что мы считаем, что $x_0 > 0$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, x_0/2)$ и рассмотрим момент остановки $T_\varepsilon = \inf\{t \in [0, \infty): X_t = \varepsilon\}$. Определим отображение $F_\varepsilon: C([0, \infty)) \rightarrow C([0, \infty))$ по формуле $F_\varepsilon(\omega)(t) = \omega(t \wedge T_\varepsilon(\omega))$ и обозначим через $\mathbf{P}^\varepsilon$ образ $\mathbf{P}$ при этом отображении. По формуле Ито легко проверить, что мера $\mathbf{P}^\varepsilon$ будет решением СДУ

$$dX_t = \frac{\gamma - 1}{2X_t} I(t \leq T_\varepsilon) dt + I(t \leq T_\varepsilon) dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Пусть $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ — некоторое вероятностное пространство с броуновским движением $(W_t)_{t \in [0, \infty)}$. Рассмотрим пространство $(C([0, \infty)) \times \Omega', \mathcal{F} \times \mathcal{F}', \mathbf{P}^\varepsilon \times \mathbf{P}')$ и определим меру $\mathbf{Q}^\varepsilon$ как распределение процесса

$$Z_t = X_t + \int_0^t I(s > T_\varepsilon) dW_s, \quad t \in [0, \infty),$$

заданного на этом пространстве. Тогда мера $\mathbf{Q}^\varepsilon$ будет решением СДУ

$$dX_t = \frac{\gamma - 1}{2X_t} I(t \leq T_\varepsilon) dt + dB_t, \quad X_0 = x_0. \quad (5.1)$$

Аналогичным образом, исходя из меры $\tilde{\mathbf{P}}$, определим меру $\tilde{\mathbf{Q}}^\varepsilon$, которая будет решением СДУ

$$dX_t = \frac{\tilde{\gamma} - 1}{2X_t} I(t \leq T_\varepsilon) dt + dB_t, \quad X_0 = x_0. \quad (5.2)$$

С учетом ограниченности коэффициентов сноса в (5.1) и (5.2), по теореме Гирсанова получаем $\tilde{\mathbf{Q}}^\varepsilon \stackrel{\text{loc}}{\sim} \mathbf{Q}^\varepsilon$. Из очевидных равенств $\mathbf{P}^\varepsilon = \mathbf{Q}^\varepsilon \circ F_\varepsilon^{-1}$ и $\tilde{\mathbf{P}}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{Q}}^\varepsilon \circ F_\varepsilon^{-1}$ заключаем, что $\tilde{\mathbf{P}}^\varepsilon \stackrel{\text{loc}}{\sim} \mathbf{P}^\varepsilon$. Можно проверить, что $\mathbf{P}^\varepsilon|_{\mathcal{F}_{T_{2\varepsilon}}} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_{T_{2\varepsilon}}}$ и $\tilde{\mathbf{P}}^\varepsilon|_{\mathcal{F}_{T_{2\varepsilon}}} = \tilde{\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_{T_{2\varepsilon}}}$. Отсюда заключаем, что $\tilde{\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_{t \wedge T_{2\varepsilon}}} \sim \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_{t \wedge T_{2\varepsilon}}}$ для любого $t \in [0, \infty)$. В силу произвольности $t \in [0, \infty)$ и $\varepsilon \in (0, x_0/2)$, получаем требуемое неравенство $S \geq T_0$ $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}$ -п.н., что завершает доказательство.

Известно, что если $0 \leq \gamma < 2$, то γ -мерный процесс Бесселя, выходящий из строго положительной точки, с вероятностью единица достигнет нуля; если $\gamma \geq 2$, то γ -мерный процесс Бесселя, выходящий из строго положительной точки, с вероятностью единица никогда не придет в нуль. Из этих свойств, теоремы 5.1 и леммы 2.1 вытекает

Следствие 5.1. (i) Либо $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$, либо $\tilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}$.

(ii) Если $\tilde{\mathbf{P}} \neq \mathbf{P}$ и $x_0 = 0$, то $\tilde{\mathbf{P}}_0 \perp \mathbf{P}_0$.

(iii) Пусть $\tilde{\mathbf{P}} \neq \mathbf{P}$ и $x_0 > 0$. Тогда $\tilde{\mathbf{P}} \stackrel{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P} \iff \tilde{\gamma} \geq 2$.

Это следствие обобщает результат, доказанный в [2, теорема 4.1].

Приложение

Здесь мы опишем поведение решений СДУ. Будем использовать обозначения $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$, X и ζ , введенные в п. 4.2.

Рассмотрим уравнение (4.1) и предположим, что выполнены условия (4.2) и (4.3). Согласно предложению 4.2, это уравнение имеет единственное решение $\mathbf{P}$ в смысле определения 4.3. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \zeta = \infty, \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty, \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty \right\}, \\ B_+ &= \left\{ \zeta = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty \right\}, \quad C_+ = \left\{ \zeta < \infty, \lim_{t \uparrow \zeta} X_t = \infty \right\}, \\ B_- &= \left\{ \zeta = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty \right\}, \quad C_- = \left\{ \zeta < \infty, \lim_{t \uparrow \zeta} X_t = -\infty \right\}. \end{aligned}$$

Введем обозначения ρ , s , $s(\infty)$, $s(-\infty)$ по формулам (4.6)–(4.9).

Приведенные ниже утверждения следуют из [4, гл. 4].

Предложение А.1. Либо $\mathbf{P}(A) = 1$, либо $\mathbf{P}(B_+ \cup B_- \cup C_+ \cup C_-) = 1$.

Предложение А.2. (i) Если $s(\infty) = \infty$, то $\mathbf{P}(B_+) = \mathbf{P}(C_+) = 0$.

(ii) Если $s(\infty) < \infty$ и $(s(\infty) - s)/\rho\sigma^2 \notin L_{\text{loc}}^1(\infty)$, то $\mathbf{P}(B_+) > 0$, $\mathbf{P}(C_+) = 0$.

(iii) Если $s(\infty) < \infty$ и $(s(\infty) - s)/\rho\sigma^2 \in L_{\text{loc}}^1(\infty)$, то $\mathbf{P}(B_+) = 0$, $\mathbf{P}(C_+) > 0$.

Ясно, что справедлив аналог предложения А.2 для «поведения на $-\infty$ ».

Авторы выражают признательность А. Н. Ширяеву за важные советы и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertoin J. Lévy Processes*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996, 265 p.
2. Черный А. С. Сходимость некоторых интегралов, связанных с процессами Бесселя. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 2, с. 251–267.
3. *Cherny A. S. On the strong and weak solutions of stochastic differential equations governing Bessel processes*. — *Stochastics Stochastics Rep.*, 2000, v. 70, № 3–4, p. 213–219.
4. *Cherny A. S., Engelbert H.-J. Singular stochastic differential equations*. Preprint, 2003.
5. Дубинс Л. Е., Шенн Л. А., Ширяев А. Н. Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 288–330.
6. *Engelbert H.-J., Schmidt W. Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations. I, II, III*. — *Math. Nachr.*, 1989, v. 143, p. 167–184; 1989, v. 144, p. 241–281; 1991, v. 151, p. 149–197.
7. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994, 544 с., 368 с.
8. *Kunita H. Absolute continuity of Markov processes*. — *Lecture Notes in Math.*, 1976, v. 511, p. 44–77.
9. *Kunita H., Watanabe S. On square integrable martingales*. — *Nagoya Math. J.*, 1967, v. 30, p. 209–245.
10. *Newman C. M. The inner product of path space measures corresponding to random processes with independent increments*. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1972, v. 78, p. 268–271.
11. *Newman C. M. On the orthogonality of independent increment processes*. — *Topics in Probability Theory*. Ed. by D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan. New York: Courant Inst. Math. Sci., New York Univ., 1973, p. 93–111.
12. *Pitman J. W., Yor M. Bessel processes and infinitely divisible laws*. — *Lecture Notes in Math.*, 1981, v. 851, p. 285–370.
13. *Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion*. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 560 p.
14. *Sato K.-I. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
15. *Sato K.-I. Density transformation in Lévy processes*. — *Lecture Notes Ser. № 7. Aarhus: Centre for Mathematical Physics and Stochastics, University of Aarhus*, 2000.
16. Скороход А. В. О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. I. Процессы с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 4, с. 417–443.
17. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961, 216 с.
18. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998, 544 с., 512 с.

Поступила в редакцию
19.III.2003