Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Шоломицкий, Теорема В. Феллера для сумм зависящих величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 473–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2963>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:42:45

первого разряда нулевой, то второй разряд тоже должен давать нулевой перенос (вероятность этого $\frac{1}{2}$) и т.д. Следовательно, $q_{3n}(0) = 1/2^{n-1}$. Добавление 4 слагаемых ситуацию не меняет. Перенос из первого разряда при любом $k \equiv 3 \pmod{4}$ четен с вероятностью $\frac{1}{2}$, так как сумма первых разрядов имеет биномиальное распределение с параметрами k и $\frac{1}{2}$. Вероятность того, что перенос из второго разряда четен, не зависит от значения первого переноса и равна $\frac{1}{2}$, и т.д. Значит,

$$q_{kn}(0) = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{при } k \equiv 3 \pmod{4}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Staffelbach O., Meier W.* Cryptographic significance of the carry for cipher based on integer addition. — *Lect. Notes Comput. Sci.*, 1991, v. 537, p. 601–614.

Поступила в редакцию
10.XII.1993

© 1996 г.

ШОЛОМИЦКИЙ А. Г.*

**ТЕОРЕМА В. ФЕЛЛЕРА
ДЛЯ СУММ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾**

Работа посвящена доказательству необходимости условия Линдеберга для нормальной сходимости для некоторых классов зависимых случайных величин (обобщению известной теоремы В. Феллера). Условия теоремы формулируются в терминах условных (относительно некоторых сигма-алгебр) распределений слагаемых.

Ключевые слова и фразы: условие предельной малости, нормальная сходимость, условие Линдеберга, условное распределение, сигма-алгебра.

1. Достаточность условия Линдеберга для нормальной сходимости зависимых случайных величин (в дальнейшем с.в.) рассматривалась А. Дворецким [7], Р. Ш. Липцером и А. Н. Ширяевым (см. [1], [2]). Здесь будет решаться обратная задача — нахождения необходимых условий нормальной сходимости, т.е. обобщения теоремы, известной как теорема В. Феллера. В работе использованы некоторые идеи метода стохастических экспонент, развитого в [1], [2].

Пусть $\{X_{j,n}\}_{j=1}^{\infty}$ — схема серий некоторых случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $S_n^k = \sum_{j=k}^{\infty} X_{j,n}$, $S_n := S_n^{\infty}$.

Основная задача состоит в определении таких σ -алгебр $\mathcal{K}_{j,n}$, для которых

$$E \prod_j E \left(\exp(itX_{j,n}) \mid \mathcal{K}_{j,n} \right) = E \exp(itS_n), \quad (1.1)$$

*Центральный экономико-математический институт РАН, ул. Красикова, 32, 117418 Москва, Россия.

¹⁾Осуществление настоящей работы стало возможным частично благодаря гранту Международного научного фонда № 1NX000.

иными словами, идея состоит в «замене» слагаемых условно независимыми с.в. с теми же распределениями и (хотя бы асимптотически) также ведущими себя суммами.

Так, если $X_{j,n}$ условно независимы относительно некоторой σ -алгебры $\mathcal{G}$, то положим $\mathcal{K}_{j,n} \equiv \mathcal{G}$. Далее, существует способ построения этих σ -алгебр, пригодный для любых с.в. $X_{j,n}$. Положим

$$\mathcal{K}_{1,n} = \sigma(S_n^2), \quad f_{1,n}(t) = \mathbb{E}(\exp(itX_{1,n}) | \mathcal{K}_{1,n}), \quad \text{и т.д.,}$$

$$\mathcal{K}_{j,n} = \sigma\left(\prod_{k=1}^{j-1} f_{k,n}(t), S_n^{j+1}\right), \quad f_{j,n}(t) = \mathbb{E}(\exp(itX_{j,n}) | \mathcal{K}_{j,n}),$$

где зависимость выражений в скобках от t означает, что берутся минимальные σ -алгебры, относительно которых измеримы указанные величины при всех t . Как легко видеть, для таких $\mathcal{K}_{j,n}$ выполнено (1.1).

2. Теорема. Пусть σ -алгебры $\mathcal{K}_{j,n}$ таковы, что выполнено (1.1). Пусть также

$$\mathbb{E}(X_{j,n} | \mathcal{K}_{j,n}) = 0 \quad \text{Р-п.н.}; \quad (2.1)$$

$$\sup_j \mathbb{E}(X_{j,n}^2 | \mathcal{K}_{j,n}) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

(здесь и далее символ $\xrightarrow{P}$ обозначает сходимость по мере Р);

$$\sum_j \mathbb{E}(X_{j,n}^2 | \mathcal{K}_{j,n}) \leq C < \infty \quad \text{Р-п.н.}; \quad (2.3)$$

$$\sum_j \mathbb{E}X_{j,n}^2 = \lambda < \infty; \quad (2.4)$$

$$\mathbb{E} \exp(itS_n) \rightarrow \exp\left(-\frac{\lambda}{2}t^2\right). \quad (2.5)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_j \mathbb{E}X_{j,n}^2 I(|X_{j,n}| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (2.6)$$

$$\sum_j \mathbb{E}(X_{j,n}^2 | \mathcal{K}_{j,n}) \xrightarrow{P} \lambda. \quad (2.7)$$

Теорема достаточности (обобщение теоремы Линдеберга) формулируется так: (1.1), (2.1), (2.6), (2.7) $\implies$ (2.5). Доказательство этого факта очень просто: в силу теоремы Линдеберга для независимых величин соотношения (2.1), (2.6), (2.7) влекут за собой сходимость

$$\mathbb{E} \prod_j \mathbb{E}(\exp(itX_{j,n}) | \mathcal{K}_{j,n}) \xrightarrow{P} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}t^2\right),$$

что в силу (1.1) дает (2.5). Таким образом, условия являются необходимыми и достаточными.

3. Доказательство сходимости (2.6). В дальнейшем, для экономии места, будем считать все $f_{j,n}$ вещественными функциями. Рассмотрим схему серий независимых в каждой серии с.в. $X_{j,n}^0$, имеющих те же маргинальные распределения, что и $X_{j,n}$, и характеристические функции $f_{j,n}^0$. В силу (2.2) и (2.4) существует безгранично делимая характеристическая функция $f^0(t)$ такая, что (вообще говоря, по некоторой подпоследовательности значений n) $\prod_j f_{j,n}^0(t) \rightarrow f^0(t)$;

при этом дисперсия f° (обозначим ее λ°) не превосходит λ (см. [3], [4]). Из формулы Колмогорова для безгранично делимых характеристических функций имеем оценку

$$\left| \ln f^\circ(t) \right| = \left| \int [e^{itz} - 1 - itx] x^{-2} dK(x) \right| \leq \frac{t^2}{2} \text{Var } K = \frac{t^2}{2} \lambda^\circ \leq \lambda \frac{t^2}{2}. \quad (3.1)$$

Как известно из классической теории суммирования, в этой ситуации (см. [3], [4])

$$\left| \ln f^\circ(t) - \sum_j \left(f_{j,n}^\circ(t) - 1 \right) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Отсюда и из (3.1) получаем, что при больших n

$$\ln f^\circ(t) \geq -\lambda \frac{t^2}{2}. \quad (3.3)$$

Теперь докажем обратное неравенство; тем самым мы получим, что $f^\circ(t) = \exp(-\lambda t^2/2)$, и, применяя классическую теорему В. Феллера [5] к схеме серий независимых с.в. $X_{j,n}^\circ$, мы немедленно получим (2.6). Проведем некоторые предварительные рассуждения.

Чисто формально, пока не задаваясь вопросом об их сходимости, оценим разность двух интегралов:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \ln \prod_j f_{j,n}(t) I \left(\prod_j f_{j,n}(t) > 0 \right) - \mathbb{E} \sum_j \left(f_{j,n}(t) - 1 \right) I \left(\prod_j f_{j,n}(t) > 0 \right) \right| \\ & \leq \mathbb{E} \left| \ln \prod_j f_{j,n}(t) - \sum_j \left(f_{j,n}(t) - 1 \right) \right| I \left(\prod_j f_{j,n}(t) > 0 \right) \leq \mathbb{E} \sum_j \left(f_{j,n}(t) - 1 \right)^2 \\ & = \mathbb{E} \sum_j \left| \mathbb{E} \left(\exp(itX_{j,n}) - itX_{j,n} - 1 \mid \mathcal{K}_{j,n} \right) \right|^2 \leq \frac{t^4}{4} \mathbb{E} \sum_j \left| \mathbb{E}(X_{j,n}^2 \mid \mathcal{K}_{j,n}) \right|^2 \\ & \leq \frac{t^4}{4} \mathbb{E} \sup_j \mathbb{E}(X_{j,n}^2 \mid \mathcal{K}_{j,n}) \sum_j \mathbb{E}(X_{j,n}^2 \mid \mathcal{K}_{j,n}) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

в силу (2.2) и (2.3). Теперь мы видим, что оба интеграла, стоящие в левой части (3.4), могут существовать или не существовать лишь одновременно. Поскольку, согласно (2.1) и (2.3),

$$\sum_j |f_{j,n}(t) - 1| = \sum_j |f_{j,n}(t) - \mathbb{E}(X_{j,n} \mid \mathcal{K}_{j,n}) - 1| \leq \sum_j \mathbb{E}(X_{j,n}^2 \mid \mathcal{K}_{j,n}) \leq C \frac{t^2}{2}$$

Р-п.н., оба интеграла конечны.

Далее, так как $f_{j,n}(t) \leq 1$, $\mathbb{E} f_{j,n}(t) = f_{j,n}^\circ(t)$, имеем:

$$\mathbb{E} \left[\sum_j \left(f_{j,n}(t) - 1 \right) \right] I \left(\prod_j f_{j,n}(t) > 0 \right) \geq \sum_j \left(f_{j,n}^\circ(t) - 1 \right), \quad (3.5)$$

где $I(\cdot)$ — индикатор события, указанного в скобках.

Кроме того, покажем, что

$$\mathbb{P} \left(\prod_j f_{j,n}(t) \leq 0 \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Действительно, поскольку события

$$\left\{ \prod_j f_{j,n}(t) \leq 0 \right\} \subseteq \left\{ \exists f: f_{j,n}(t) \leq 0 \right\} \subseteq \left\{ \sup_j |f_{j,n}(t) - 1| \geq 1 \right\}$$

вложены указанным образом, в силу (2.2)

$$\begin{aligned} P \left\{ \prod_j f_{j,n}(t) \leq 0 \right\} &\leq P \left\{ \sup_j |f_{j,n}(t) - 1| \geq 1 \right\} \\ &\leq P \left\{ \sup_j E(X_{j,n}^2 | \mathcal{K}_{j,n}) \geq 1 \right\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь из (1.1), (2.5) и (3.6)

$$\ln E \prod_j f_{j,n}(t) I \left(\prod_j f_{j,n}(t) > 0 \right) \rightarrow -\lambda \frac{t^2}{2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

откуда в силу неравенства Йенсена имеем (при больших n)

$$E \ln \prod_j f_{j,n}(t) I \left(\prod_j f_{j,n}(t) > 0 \right) \leq -\lambda \frac{t^2}{2}.$$

Окончательно, принимая во внимание (3.2), (3.4), (3.5), получим неравенство, обратное (3.3).

4. Доказательство сходимости (2.7). Покажем, что

$$\prod_j f_{j,n}(t) \xrightarrow{p} \exp \left(-\lambda \frac{t^2}{2} \right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

В силу того, что $|\prod_j f_{j,n}(t)| \leq 1$, существует случайная функция $\xi(t)$ такая, что (по некоторой подпоследовательности значений n) $\prod_j f_{j,n}(t) \xrightarrow{p} \xi(t)$ и имеет место сходимость соответствующих математических ожиданий, откуда, учитывая (1.1) и (2.5), $\ln E\xi(t) = -\lambda t^2/2$.

Согласно (2.3), (3.6) и (3.4),

$$P \left(\left| \ln \prod_j f_{j,n}(t) \right| < C \frac{t^2}{2} + 1 \right) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому $\ln \xi(t)$ определен, ограничен и имеет место сходимость математических ожиданий логарифмов по соответствующим областям:

$$E \left(\ln \prod_j f_{j,n}(t) - \ln \xi(t) \right) I \left(\left| \ln \prod_j f_{j,n}(t) \right| < C \frac{t^2}{2} + 1 \right) \rightarrow 0.$$

Теперь, действуя аналогично (3.4) и переписав (3.2) в виде

$$E \sum_j (f_{j,n}(t) - 1) \rightarrow -\frac{\lambda t^2}{2},$$

мы легко установим, что

$$E \ln \xi(t) = -\frac{\lambda t^2}{2} = \ln E\xi(t),$$

что возможно лишь в случае, когда $\xi(t) = \exp(-\lambda t^2/2)$ Р-п.н., т.е. для любой подпоследовательности предельная точка вырождена, что влечет (4.1).

Предположим теперь, что (2.7) не верно. Тогда, поскольку все $\mathcal{K}_n \subseteq \sigma(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$, существует последовательность событий $A_n = (X_{1,n} = x_{1,n}, \dots, X_{n,n} = x_{n,n})$ такая, что для всех n из некоторой подпоследовательности

$$\left| \sum_j E(X_{j,n}^2 | A_n) - \lambda \right| \geq \alpha > 0.$$

Но, согласно (2.2) и (4.1), для почти всех A_n из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность значений n так, чтобы

$$\sup_j E(X_{j,n}^2 | A_n) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \prod_j E(\exp(itX_{j,n}) | A_n) \rightarrow \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right).$$

Таким образом, мы имеем дело с асимптотически нормальным произведением предельно пренебрегаемых характеристических функций, имеющих в силу (2.1) нулевые математические ожидания, а в силу (2.3) — ограниченные в сумме дисперсии. Как известно из классической теории суммирования независимых с.в. (этот факт легко устанавливается, например, при помощи теоремы 9.3.1 из [6, с. 370]), в этой ситуации выполнение условия Линдеберга влечет за собой сходимость дисперсий $\sum_j E(X_{j,n}^2 | A_n) \rightarrow \lambda$, и полученное противоречие доказывает (2.7).

5. В заключение автор выражает искреннюю благодарность В. И. Ротарю за внимание, проявленное к работе. Автор также выражает благодарность рецензенту за полезную критику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
2. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1988, 620 с.
3. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
4. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 713 с.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 738 с.
6. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972, 479 с.
7. Dvoretzky A. Asymptotic normality for sums of dependent random variables. — In: Proc. of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. 3. Berkeley-Los Angeles: Univ. California Press, 1972, p. 513–535.

Поступила в редакцию
11.II.1993

Исправленный вариант
10.XI.1994