Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Мильштейн, М. В. Третьяков, Простейшие
блуждания для задачи Дирихле, *Теория вероятн.
и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 39–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2965>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:08:17

© 2002 г.

МИЛЬШТЕЙН Г. Н.*, ТРЕТЬЯКОВ М. В.**

ПРОСТЕЙШИЕ БЛУЖДЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ¹⁾

Рассматривается задача Дирихле как для параболических, так и для эллиптических уравнений. Решение соответствующей характеристической системы стохастических дифференциальных уравнений аппроксимируется в слабом смысле. Если состояние возникающей марковской цепи подходит близко к границе области, в которой рассматривается задача, то на следующем шаге цепь, согласно некоторому интерполяционному закону, либо останавливается на границе, либо уходит вглубь области с некоторой вероятностью. Приближенное решение задачи Дирихле получается в виде математического ожидания определенного функционала от траектории этой цепи. Таким образом становится возможным использование подхода Монте-Карло. Построенные в статье методы являются простейшими, поскольку применены слабые эйлеровские аппроксимации, а в качестве интерполяционного закона выбран линейный. Доказаны теоремы сходимости с указанием порядка точности. Приведены результаты тестирования полученных методов.

Ключевые слова и фразы: задача Дирихле для параболических и эллиптических уравнений, вероятностное представление, слабая аппроксимация решений стохастических дифференциальных уравнений, марковская цепь, случайное блуждание.

1. Введение. Пусть G — ограниченная область в $\mathbf{R}^d$, $Q = G \times [T_0, T)$ — цилиндр в $\mathbf{R}^{d+1}$, $\Gamma = \bar{Q} \setminus Q$ — часть границы цилиндра Q , состоящая из верхнего основания и боковой поверхности. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^d b^i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x^i} \quad (1.1)$$

$$+ c(t, x) u + g(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q,$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(t, x). \quad (1.2)$$

*Уральский государственный университет, просп. Ленина, 51, 620081 Екатеринбург, Россия; e-mail: Grigori.Milstein@usu.ru

**Институт математики и механики УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, ГСП-384, 620219 Екатеринбург, Россия; e-mail: Michael.Tretyakov@usu.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00134).

Форма уравнения (1.1) удобна при вероятностном подходе: «начальные» данные задаются в конечный момент времени $t = T$, а уравнение рассматривается для $t < T$.

Предполагается, что коэффициенты $a^{ij} = a^{ji}$ удовлетворяют условию строгой эллиптичности в $\bar{Q}$ и выполняются условия, обеспечивающие существование классического решения $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.2), обладающего непрерывными в $\bar{Q}$ производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^i \partial x^j}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k \partial x^l}.$$

Для этого достаточно [1], чтобы функции $a^{ij}(t, x)$, $b^i(t, x)$, $c(t, x)$, $g(t, x)$ вместе со своими первыми по t, x^k , и вторыми по x^k производными были непрерывны в $\bar{Q}$, область G имела дважды непрерывно дифференцируемую границу ∂G , функция $\varphi(t, x)$, $(t, x) \in \Gamma$, была не меньшей гладкости, чем требуется от решения $u(t, x)$, и, наконец, функция φ удовлетворяла уравнению (1.1) на границе верхнего основания цилиндра $\bar{Q}$.

Решение задачи (1.1)–(1.2) допускает вероятностное представление

$$u(t, x) = \mathbf{E}[\varphi(\tau, X_{t,x}(\tau)) Y_{t,x,1}(\tau) + Z_{t,x,1,0}(\tau)], \quad (1.3)$$

где $X_{t,x}(s)$, $Y_{t,x,y}(s)$, $Z_{t,x,y,z}(s)$, $s \geq t$, — решение задачи Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dX = (b(s, X) - \sigma(s, X) \mu(s, X)) ds + \sigma(s, X) dw(s), \quad X(t) = x, \quad (1.4)$$

$$dY = c(s, X) Y ds + \mu^T(s, X) Y dw(s), \quad Y(t) = y, \quad (1.5)$$

$$dZ = g(s, X) Y ds + F^T(s, X) Y dw(s), \quad Z(t) = z, \quad (1.6)$$

$(t, x) \in Q$, $\tau = \tau_{t,x}$ — момент выхода траектории $(s, X_{t,x}(s))$ на границу Γ .

В (1.4)–(1.6) $w(s) = (w^1(s), \dots, w^d(s))^T$ — стандартный винеровский процесс, $b(s, x)$ — d -мерный вектор-столбец, составленный из коэффициентов $b^i(s, x)$, $d \times d$ -матрица $\sigma(s, x)$ получается из представления

$$\sigma(s, x) \sigma^T(s, x) = a(s, x), \quad a(s, x) = \{a^{ij}(s, x)\}, \quad i, j = 1, \dots, d,$$

$\mu(s, x)$ и $F(s, x)$ — любые достаточно гладкие в $\bar{Q}$ d -мерные вектор-столбцы, Y и Z — скаляры.

При $\mu(s, x) = 0$, $F(s, x) = 0$ формула (1.3) дает обычное вероятностное представление [2], [3], при $\mu(s, x) \neq 0$, $F(s, x) = 0$ она вытекает из теоремы Гирсанова. Ясно также, что добавление $F(s, x) \neq 0$ не влияет на справедливость этой формулы. Таким образом, среднее случайной величины, стоящей под знаком математического ожидания в (1.3), не зависит от μ и F , в то время как другие ее свойства могут существенно от них зависеть. В частности, за счет выбора μ (при $F = 0$) можно добиться обращения в нуль дисперсии этой случайной величины [4]. Того

же самого можно добиться за счет выбора F (при $\mu = 0$) [5]. Это обстоятельство является очень важным в связи с использованием методов Монте-Карло. Именно поэтому случайное блуждание строится здесь с учетом зависимости от μ и F .

Сложность реализации вероятностного представления (1.3) обсуждалась в [6]. Она состоит, например, в том, что $\tau - t$ в (1.3) может принимать сколь угодно малые значения и, следовательно, становится невозможным численное интегрирование системы (1.4) с фиксированным шагом по времени. В частности, становится невозможным применение эйлеровских среднеквадратичных аппроксимаций. Конечно, имея дело с реализацией математического ожидания в (1.3), естественно воспользоваться более простыми, слабыми аппроксимациями, на которые тем не менее должны быть наложены ограничения, связанные с невыходом из области $\bar{Q}$. Такие аппроксимации построены в [6]. Один из основных приемов состоит в управлении шагом численного интегрирования системы (1.4): он выбирается таким образом, чтобы (разумеется, помимо достижения надлежащей точности) очередное состояние марковской цепи, слабо аппроксимирующее решение системы (1.4), оставалось в области $\bar{Q}$ с вероятностью 1. С приближением состояния к границе области Q это приводит к уменьшению шага интегрирования. Остановка цепи происходит в некоторой узкой зоне, примыкающей к границе. Так что значения решения $u(t, x)$ в этой зоне могут быть достаточно точно приближены известными значениями функции φ на границе.

В этой статье шаг численного интегрирования системы (1.4) для точек, принадлежащих некоторому временному слою $t = t_k$, остается неизменным. Но если точка находится вблизи границы, то делается промежуточный (вспомогательный) шаг блуждания, не выводящий точку из временного слоя $t = t_k$. В результате этого шага близкая к границе точка заменяется с некоторыми вероятностями, согласно линейному интерполяционному закону, на две: одна из них принадлежит границе (и в этом случае блуждание заканчивается), другая отскакивает вглубь области так, что из нее становится возможным новый шаг численного интегрирования, не выводящий из области. Подход, развитый в [6], является, по-видимому, более универсальным. Однако методы, полученные в этой статье, благодаря своей простоте как в теоретическом, так и в прикладном отношении представляют самостоятельный интерес.

Конструкция основного алгоритма блуждания дана в следующем пункте. В п. 3 доказывается его сходимость со слабым порядком точности $O(h)$. Некоторые близкие алгоритмы блуждания приведены в п. 4. Один из них отличается наибольшей простотой, но его порядок сходимости $O(\sqrt{h})$. В п. 5 полученные результаты переносятся на задачу Дирихле для эллиптических уравнений. Наконец, в п. 6 приведены результаты тестирования предложенных методов.

2. Алгоритм блуждания. Применим явный метод слабых аппроксимаций Эйлера с простейшим моделированием шумов к системе (1.4)–(1.6):

$$X_{t,x}(t+h) \approx X = x + h(b(t, x) - \sigma(t, x) \mu(t, x)) + h^{1/2} \sigma(t, x) \xi, \quad (2.1)$$

$$Y_{t,x,y}(t+h) \approx Y = y + hc(t, x) y + h^{1/2} \mu^T(t, x) y \xi, \quad (2.2)$$

$$Z_{t,x,y,z}(t+h) \approx Z = z + hg(t, x) y + h^{1/2} F^T(t, x) y \xi, \quad (2.3)$$

где $h > 0$ — шаг интегрирования (достаточно малое число), $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d)^T$, ξ^i , $i = 1, \dots, d$, — независимые в совокупности случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Ясно, что случайный вектор X принимает 2^d различных значений.

Введем множество приграничных точек $S_{t,h} \subset \bar{G}$ на слое t : $x \in S_{t,h}$, если хотя бы одно из 2^d значений вектора X окажется вне $\bar{G}$. Нетрудно видеть, что благодаря компактности $\bar{Q}$ найдется постоянная $\lambda > 0$ такая, что если x находится на расстоянии от границы ∂G области G , равном или большем $\lambda\sqrt{h}$, то x не является приграничной точкой и, следовательно, для таких x все реализации случайной величины X принадлежат $\bar{G}$.

Поскольку на аппроксимацию решения системы (1.4) должны быть наложены ограничения, связанные с невыходом из области $\bar{G}$, формулы (2.1)–(2.3) можно использовать только для точек $x \in \bar{G} \setminus S_{t,h}$ на слое t , а для приграничных точек требуется специальная конструкция.

Пусть $x \in S_{t,h}$. Обозначим: $x^\pi \in \partial G$ — проекция точки x на границу области G (единственная, поскольку h достаточно мало, а ∂G — гладкая), $n(x^\pi)$ — единичный вектор внутренней нормали к ∂G в точке x^π . Введем случайный вектор $X_{x,h}^\pi$, принимающий два значения x^π и $x + h^{1/2} \lambda n(x^\pi)$ с вероятностями $p = p_{x,h}$ и $q = q_{x,h} = 1 - p_{x,h}$ соответственно, где

$$p_{x,h} = \frac{h^{1/2} \lambda}{|x + h^{1/2} \lambda n(x^\pi) - x^\pi|}.$$

Если $v(x)$ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция с областью определения $\bar{G}$, то приближенная замена значения $v(x)$ математическим ожиданием $\mathbf{E}v(X_{x,h}^\pi)$ соответствует линейной интерполяции и

$$v(x) = \mathbf{E}v(X_{x,h}^\pi) + O(h) = pv(x^\pi) + qv(x + h^{1/2} \lambda n(x^\pi)) + O(h). \quad (2.4)$$

Подчеркнем, что второе значение $x + h^{1/2} \lambda n(x^\pi)$ не является приграничным. Отметим также, что всегда $p > \frac{1}{2}$ (так как расстояние от x до ∂G меньше, чем $h^{1/2} \lambda$) и что если $x \in \partial G$, то $p = 1$ (так как в этом случае $x^\pi = x$).

Пусть $(t_0, x_0) \in Q$ — некоторая точка и требуется найти значение $u(t_0, x_0)$. Введем разбиение интервала $[t_0, T]$, для определенности равномерное: $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, $h := (T - t_0)/N$.

Для аппроксимации решения системы (1.4) построим марковскую цепь $(t_{m/2}, X_{m/2})$, которая останавливается по достижении границы Γ на случайном шаге $\mathfrak{x}$. Число m пробегает целые неотрицательные значения, не превышающие $2N$, так что индекс $m/2$ принимает целые и полуцелые значения. По определению для нечетных $m = 2k + 1$ время $t_{m/2} = t_{k+1/2}$ равно t_k , т.е. X_k и $X_{k+1/2}$ принадлежат одному и тому же слою $t = t_k$. Часто для краткости эта цепь будет обозначаться просто $X_{m/2}$.

Положим $X_0 = x_0$. Пусть $\mathfrak{x} > k$, $k \leq N - 1$ и $X_k \in \bar{G}$ определено. Определим $X_{k+1/2}$ следующим образом: если состояние $X_k \notin S_{t_k, h}$, то полагаем $X_{k+1/2} = X_k$ (т.е. точка остается на месте), а если $X_k \in S_{t_k, h}$, то $X_{k+1/2}$ есть случайная величина, принимающая два значения: либо $X_{k+1/2} = X_k^\pi \in \partial G$ с вероятностью $p_{X_k, h}$, либо $X_{k+1/2} = X_k + h^{1/2} \lambda n(X_k^\pi) \notin S_{t_k, h}$ с вероятностью $q_{X_k, h}$. Если $X_{k+1/2} = X_k^\pi$ (т.е. $(t_k, X_{k+1/2}) \in \Gamma$), то мы присваиваем $\mathfrak{x} = k + \frac{1}{2}$, $X_{\mathfrak{x}} = X_k^\pi$, и блуждание заканчивается. Если $\mathfrak{x} > k + \frac{1}{2}$, то X_{k+1} определяется согласно (2.1) при $t = t_k$, $x = X_{k+1/2}$, $\xi = \xi_k$ (считаем, что все ξ_k независимы в совокупности и распределены как ξ). При $k = N - 1$ и $\mathfrak{x} > N - \frac{1}{2}$ (т.е. на последнем слое) $\mathfrak{x} = N$, поскольку $(t_N, X_N) = (T, X_N) \in \Gamma$. Таким образом, цепь $(t_{m/2}, X_{m/2})$ построена.

Нетрудно видеть, что $(t_{m/2}, X_{m/2})$ остается в области $\bar{Q}$ с вероятностью 1, а $\mathfrak{x}$ принимает либо полуцелые значения от $\frac{1}{2}$ до $N - \frac{1}{2}$, либо значение N .

Введем также расширенную цепь $(t_{m/2}, X_{m/2}, Y_{m/2}, Z_{m/2})$. Положим $Y_0 = 1$, $Z_0 = 0$. Пусть $\mathfrak{x} \geq k + \frac{1}{2}$, $k \leq N - 1$ и Y_k, Z_k определены. Тогда присвоим $Y_{k+1/2} = Y_k$, $Z_{k+1/2} = Z_k$. При $\mathfrak{x} > k + \frac{1}{2}$ Y_{k+1} , Z_{k+1} определяются системой (2.1)–(2.3) при $t = t_k$, $x = X_{k+1/2}$, $y = Y_{k+1/2} = Y_k$, $z = Z_{k+1/2} = Z_k$, $\xi = \xi_k$.

Запишем построенный алгоритм в формальном виде.

А л г о р и т м 1.

Шаг 0. $X_0 = x_0$, $Y_0 = 1$, $Z_0 = 0$, $k = 0$.

Шаг 1. $Y_{k+1/2} = Y_k$, $Z_{k+1/2} = Z_k$.

Если $X_k \notin S_{t_k, h}$, то $X_{k+1/2} = X_k$ и перейти к выполнению шага 3.

Если $X_k \in S_{t_k, h}$, то либо $X_{k+1/2} = X_k^\pi$ с вероятностью $p_{X_k, h}$, либо $X_{k+1/2} = X_k + h^{1/2} \lambda n(X_k^\pi)$ с вероятностью $q_{X_k, h}$.

Шаг 2. Если $X_{k+1/2} = X_k^\pi$, то алгоритм завершен и $\mathfrak{x} = k + \frac{1}{2}$, $X_{\mathfrak{x}} = X_k^\pi$,

$Y_{\mathfrak{x}} = Y_{k+1/2} = Y_k$, $Z_{\mathfrak{x}} = Z_{k+1/2} = Z_k$.

Шаг 3. Смоделировать ξ_k и определить X_{k+1} , Y_{k+1} , Z_{k+1} согласно (2.1)–

$$(2.3) \text{ при } t = t_k, x = X_{k+1/2}, y = Y_{k+1/2}, z = Z_{k+1/2}, \xi = \xi_k.$$

Шаг 4. Если $k+1 = N$, то алгоритм завершен и $\mathfrak{x} = N$, $X_{\mathfrak{x}} = X_N$, $Y_{\mathfrak{x}} =$

Y_N , $Z_{\mathfrak{x}} = Z_N$, иначе $k = k+1$ и вернуться на шаг 1.

Может оказаться, что как h , так и λ более рационально выбирать переменными: h_k и λ_k . В теореме 1 (см. ниже) в качестве h следует тогда положить $h = \max_{0 \leq k < N} h_k$. На практике можно брать $\lambda_k = |\sigma(t_k, X_k)|$, возможно, с небольшими поправками.

3. Теорема сходимости. Обозначим ν_{t_0, x_0} число тех t_k , при которых цепь попадает в множество $S_{t_k, h}$. Событие $\{\nu_{t_0, x_0} > n\}$ влечет событие, состоящее в том, что в некоторой схеме испытаний первые n испытаний приводят к неудаче (непопадание на Γ). При этом вероятность каждого неудача меньше $\frac{1}{2}$. Поэтому имеет место оценка

$$\mathbf{P}\{\nu_{t_0, x_0} > n\} \leq 2^{-n}. \quad (3.1)$$

Это рассуждение не является вполне строгим, так как вероятность выхода из $S_{t_k, h}$ рассматриваемой цепи $X_{m/2}$ зависит от X_k . Наряду с цепью $X_{m/2}$ рассмотрим цепь $X'_{m/2}$, которая отличается только тем, что после попадания в множество приграничных точек $S_{t_k, h}$ каждый раз производится бросание монеты, так что с вероятностью $\frac{1}{2}$ новая цепь попадает на границу в точку X_k^π и с вероятностью $\frac{1}{2}$ она попадает в то же самое состояние, что и старая цепь, т.е. в состояние $X_k + h^{1/2} \lambda n(X_k^\pi) \notin S_{t_k, h}$. Поскольку новая цепь с меньшей вероятностью заканчивает блуждание, то $\nu_{t_0, x_0} \leq \nu'_{t_0, x_0}$, и, следовательно, $\mathbf{P}\{\nu_{t_0, x_0} > n\} \leq \mathbf{P}\{\nu'_{t_0, x_0} > n\}$. Но для ν'_{t_0, x_0} приведенное выше рассуждение является строгим, т.е. $\mathbf{P}\{\nu'_{t_0, x_0} > n\} \leq 2^{-n}$. Из двух последних неравенств вытекает (3.1). В качестве итога сформулируем следующее предложение (в дальнейшем одной и той же буквой C будут обозначаться положительные постоянные, не зависящие, например, от t, x, y, z, m, h).

Лемма 1. *Имеет место неравенство (3.1), а вместе с ним и неравенства*

$$\mathbf{P}\{\nu_{t_0, x_0} = n\} \leq 2^{-(n-1)}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{E}\nu_{t_0, x_0} \leq C, \quad \mathbf{E}\nu_{t_0, x_0}^2 \leq C, \quad (3.3)$$

где C не зависит от t_0, x_0, h .

Доопределим построенную цепь для всех m по правилу: если $m/2 > \mathfrak{x}$, то $(t_{m/2}, X_{m/2}, Y_{m/2}, Z_{m/2}) = (t_{\mathfrak{x}}, X_{\mathfrak{x}}, Y_{\mathfrak{x}}, Z_{\mathfrak{x}})$. Докажем лемму

об одношаговой погрешности. Введем

$$\begin{aligned} d_k &= u(t_{k+1/2}, X_{k+1/2}) Y_{k+1/2} + Z_{k+1/2} - u(t_k, X_k) Y_k - Z_k, \\ d_{k+1/2} &= u(t_{k+1}, X_{k+1}) Y_{k+1} + Z_{k+1} \\ &\quad - u(t_{k+1/2}, X_{k+1/2}) Y_{k+1/2} - Z_{k+1/2}, \quad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Напомним: $t_{k+1/2} = t_k$, $Y_{k+1/2} = Y_k$, $Z_{k+1/2} = Z_k$; $X_{k+1/2}$ принадлежит слою $t = t_k$; величина d_k может быть отлична от нуля лишь в случае $X_k \in S_{t_k, h}$; если $\varkappa > k + \frac{1}{2}$, то $X_{k+1/2} \notin S_{t_k, h}$ и все 2^d реализаций случайной величины X_{k+1} принадлежат $\overline{G}$, т.е. имеет место стандартный (неприграничный) шаг алгоритма. Ясно, что если $\varkappa \leq k + \frac{1}{2}$, то $d_{m/2} = 0$, $m \geq 2k+1$. Отметим также, что, как нетрудно показать, при достаточно малом h компонента Y_k положительна.

Лемма 2. Для целого индекса k имеет место неравенство

$$|\mathbf{E}(d_k \mid X_k, Y_k, Z_k)| \leq Ch Y_k I_{S_{t_k, h}}(X_k) \chi_{\varkappa \geq k+1/2}, \quad (3.4)$$

для полуцелого индекса $k + \frac{1}{2}$ имеет место неравенство

$$|\mathbf{E}(d_{k+1/2} \mid X_{k+1/2}, Y_{k+1/2}, Z_{k+1/2})| \leq Ch^2 Y_k \chi_{\varkappa > k+1/2}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Неравенство (3.4) вытекает из интерполяционного соотношения (2.4) и из вышеприведенного напоминания. Неравенство (3.5) является следствием того, что одношаговый порядок точности метода Эйлера (2.1)–(2.3) в слабом смысле есть $O(h^2)$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Алгоритм 1 имеет слабый порядок точности $O(h)$, т.е. выполняется соотношение

$$|\mathbf{E}(\varphi(t_\varkappa, X_\varkappa) Y_\varkappa + Z_\varkappa) - u(t_0, x_0)| \leq Ch, \quad (3.6)$$

где C не зависит от t_0, x_0, h .

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} R &:= \mathbf{E}(\varphi(t_\varkappa, X_\varkappa) Y_\varkappa + Z_\varkappa) - u(t_0, x_0) = \mathbf{E}(u(t_\varkappa, X_\varkappa) Y_\varkappa + Z_\varkappa) - u(t_0, x_0) \\ &= \mathbf{E} \sum_{m=0}^{2\varkappa-1} \left(u(t_{(m+1)/2}, X_{(m+1)/2}) Y_{(m+1)/2} + Z_{(m+1)/2} \right. \\ &\quad \left. - u(t_{m/2}, X_{m/2}) Y_{m/2} - Z_{m/2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \mathbf{E} d_{m/2} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} d_{k+1/2} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} d_k \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \mathbf{E}(d_{k+1/2} \mid X_{k+1/2}, Y_{k+1/2}, Z_{k+1/2}) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \mathbf{E}(d_k \mid X_k, Y_k, Z_k). \end{aligned}$$

В силу (3.5) модуль первой суммы оценивается величиной $Ch^2 \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}Y_k$. Нетрудно показать, что $\mathbf{E}Y_k \leq C$, $k = 0, \dots, N-1$. Так что первая сумма есть $O(h)$ равномерно по отношению к t_0, x_0, h .

Пользуясь (3.4) и леммой 1, оценим вторую сумму:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\mathbf{E}(d_k \mid X_k, Y_k, Z_k) \right| &\leq Ch \mathbf{E} \sum_{k=0}^{N-1} (Y_k I_{S_{t_k, h}}(X_k) \chi_{\mathfrak{x} \geq k+1/2}) \\ &\leq Ch \mathbf{E} \left(\max_{0 \leq k \leq N-1} Y_k \cdot \sum_{k=0}^{N-1} I_{S_{t_k, h}}(X_k) \right) = Ch \mathbf{E} \left(\max_{0 \leq k \leq N-1} Y_k \cdot \nu_{t_0, x_0} \right) \\ &\leq Ch \left(\mathbf{E} \max_{0 \leq k \leq N-1} Y_k^2 \right)^{1/2} (\mathbf{E} \nu_{t_0, x_0}^2)^{1/2} \leq Ch \left(\mathbf{E} \max_{0 \leq k \leq N-1} Y_k^2 \right)^{1/2}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Пусть $c(t, x) \leq \bar{c}$, $(t, x) \in \bar{Q}$, $\bar{c}$ — константа. Введем последовательность

$$\begin{aligned} Y'_0 &= 1, \quad Y'_k = Y'_{k-1} (1 + h\bar{c} + h^{1/2} \mu(t_{k-1}, X_{k-1/2}) \xi_{k-1}), \quad k \leq \mathfrak{x}; \\ Y'_k &= Y'_{\mathfrak{x}}, \quad k > \mathfrak{x}. \end{aligned}$$

Очевидно, $Y_k \leq Y'_k$. Нетрудно видеть, что последовательность $V_k = (1 + h\bar{c})^{-k} Y'_k$ является мартингалом. Следовательно,

$$\mathbf{E} \max_{1 \leq k \leq N-1} V_k^2 \leq 4\mathbf{E} V_{N-1}^2 \leq C$$

(здесь C , как и раньше, не зависит от h), что вместе с (3.7) приводит к (3.6). Теорема 1 доказана.

Отметим, что несмотря на то что отдельные шаги алгоритма 1 являются очень грубыми (их одношаговая погрешность $O(h)$), этот алгоритм сходится и, более того, его глобальный порядок сходимости есть $O(h)$. Такой сходимостью мы обязаны тому факту, что число грубых шагов (в среднем) ограничено сверху константой, которая не растет при $h \rightarrow 0$.

4. Другие простейшие блуждания.

4.1. Алгоритм 2. Следующий алгоритм получается путем упрощения алгоритма 1. Именно, как только X_k попадает в приграничную область $S_{t_k, h}$, блуждание прекращается, т.е. $\mathfrak{x} = k$, а в качестве финального состояния марковской цепи берется $\bar{X}_{\mathfrak{x}} = X_k^\pi$, $Y_{\mathfrak{x}} = Y_k$, $Z_{\mathfrak{x}} = Z_k$. В этом случае мы не нуждаемся в значениях цепи с полуцелыми индексами.

Запишем этот алгоритм в формальном виде.

А л г о р и т м 2.

Шаг 0. $X_0 = x_0$, $Y_0 = 1$, $Z_0 = 0$, $k = 0$.

Шаг 1. Если $X_k \notin S_{t_k, h}$, то перейти к выполнению шага 2.

Если $X_k \in S_{t_k, h}$, то алгоритм завершен и $\mathfrak{x} = k$, $\bar{X}_{\mathfrak{x}} = X_k^\pi$, $Y_{\mathfrak{x}} = Y_k$, $Z_{\mathfrak{x}} = Z_k$.

Шаг 2. Смоделировать ξ_k и определить X_{k+1} , Y_{k+1} , Z_{k+1} согласно (2.1)–(2.3) при $t = t_k$, $x = X_k$, $y = Y_k$, $z = Z_k$, $\xi = \xi_k$.

Шаг 3. Если $k + 1 = N$, то алгоритм завершен и $\mathfrak{x} = N$, $\bar{X}_{\mathfrak{x}} = X_N$, $Y_{\mathfrak{x}} = Y_N$, $Z_{\mathfrak{x}} = Z_N$, иначе $k = k + 1$ и вернуться на шаг 1.

В этом алгоритме одношаговая погрешность для всех шагов, за исключением последнего, есть $O(h^2)$. Погрешность на последнем шаге оценивается $O(\sqrt{h})$. Без труда доказывается следующая теорема (отметим попутно, что условия на гладкость решения и параметров, упомянутые во введении, могут быть ослаблены для этой теоремы).

Теорема 2. Алгоритм 2 имеет слабый порядок точности $O(\sqrt{h})$:

$$\left| \mathbf{E}(\varphi(t_{\mathfrak{x}}, \bar{X}_{\mathfrak{x}}) Y_{\mathfrak{x}} + Z_{\mathfrak{x}}) - u(t_0, x_0) \right| \leq C\sqrt{h},$$

где C не зависит от t_0, x_0, h .

Близкий метод блуждания предложен в статье [7]. В отличие от алгоритма 2, который заканчивается при попадании цепи в приграничную область $S_{t_k, h} \subset \bar{G}$, метод блуждания из [7] заканчивается при выходе цепи из области $\bar{G}$, а в качестве финального состояния цепи берется проекция точки, вышедшей из области, на границу ∂G .

4.2. Алгоритм 3. Построим блуждание с более точной одношаговой аппроксимацией для $x \in S_{t, h}$, чем у алгоритма 1. Пусть $x \in S_{t, h}$. Обозначим $\xi^{(\alpha)} = (\xi^{(\alpha), 1}, \dots, \xi^{(\alpha), d})^T$, $\alpha = 1, \dots, 2^d$ значения вектора ξ из (2.1), причем припишем индексы этим значениям так, что $\xi^{(2^{d-1} + \alpha)} = -\xi^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, 2^{d-1}$. Значение вектора X из (2.1), соответствующее $\xi^{(\alpha)}$, будем обозначать $X^{(\alpha)}$. Хотя бы одна из точек $X^{(\alpha)} \notin \bar{G}$, так как $x \in S_{t, h}$. Соединим точку x с теми $X^{(\alpha)}$, которые вне $\bar{G}$, кривыми $\eta^{(\alpha)}(\theta)$:

$$\eta^{(\alpha)}(\theta) = \left(x + \theta h (b(t, x) - \sigma(t, x) \mu(t, x)) + \sqrt{\theta h} \sigma(t, x) \xi^{(\alpha)} \right),$$

$$\theta \in [0, 1], \alpha = 1, \dots, 2^d.$$

Найдется такое значение $\theta = \theta^{(\alpha)}$, $0 < \theta^{(\alpha)} < 1$ (единственное, поскольку h достаточно мало, а ∂G — гладкая), что точка $\eta^{(\alpha)} := \eta^{(\alpha)}(\theta^{(\alpha)})$ принадлежит границе ∂G . Положим $\theta^{(\alpha)} = 1$ и $\eta^{(\alpha)} = X^{(\alpha)}$ для тех точек $X^{(\alpha)}$, которые принадлежат $\bar{G}$.

Введем пару

$$(\vartheta^{(\alpha)}, \eta^{(\alpha)}) := (t + \theta^{(\alpha)} h, \eta^{(\alpha)}). \quad (4.1)$$

Здесь α — случайная величина, принимающая значения $\{1, \dots, 2^d\}$ и распределенная по закону

$$\begin{aligned} p_i &= \mathbf{P}\{\alpha = i\} = \frac{\gamma}{\sqrt{\theta^{(i)}}(\sqrt{\theta^{(i)}} + \sqrt{\theta^{(2^{d-1}+i)}}), \quad i = 1, \dots, 2^{d-1}, \\ p_i &= \mathbf{P}\{\alpha = i\} = \frac{\gamma}{\sqrt{\theta^{(i)}}(\sqrt{\theta^{(i)}} + \sqrt{\theta^{(i-2^{d-1})}}), \quad i = 2^{d-1} + 1, \dots, 2^d, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где γ однозначно определяется из условия $\sum_{i=1}^{2^d} \mathbf{P}\{\alpha = i\} = 1$.

Построим марковскую цепь (ϑ_k, X_k) , которая останавливается по достижении границы Γ на случайном шаге $\mathfrak{x}$. Индекс k пробегает целые неотрицательные значения, не превышающие N , а $\vartheta_k = t_k$, во всяком случае для $k < \mathfrak{x}$. Положим $\vartheta_0 = t_0$, $X_0 = x_0$. Пусть $(\vartheta_k, X_k) \in Q$, т.е. $\mathfrak{x} > k$, $k \leq N-1$, $\vartheta_k = t_k$. Определим $(\vartheta_{k+1}, X_{k+1})$. Если $X_k \notin S_{t_k, h}$, то $\vartheta_{k+1} = t_{k+1}$, а X_{k+1} определяется согласно (2.1) при $t = t_k$, $x = X_k$, $\xi = \xi_k$. Если $X_k \in S_{t_k, h}$, то

$$(\vartheta_{k+1}, X_{k+1}) = (\vartheta_k^{(\alpha_k)}, \eta_k^{(\alpha_k)}),$$

где $(\vartheta_k^{(\alpha_k)}, \eta_k^{(\alpha_k)})$ определяются как $(\vartheta^{(\alpha)}, \eta^{(\alpha)})$ из (4.1) при $t = t_k$, $x = X_k$, $\alpha = \alpha_k$ (как ξ_k , так и α_k независимы от предыстории; ясно также, что на каждом шаге моделируется либо ξ_k , либо α_k). В этом случае в силу построения пары $(\vartheta_k^{(\alpha_k)}, \eta_k^{(\alpha_k)})$ точка X_{k+1} либо принадлежит ∂G с вероятностью $p \geq 1/2^d$ и блуждание заканчивается (в этом случае $\mathfrak{x} = k+1$, $(\vartheta_{\mathfrak{x}}, X_{\mathfrak{x}}) = (\vartheta_{k+1}, X_{k+1})$), либо $X_{k+1} \notin \partial G$ (это означает, что реализованное α_k таково, что $\theta_k^{(\alpha_k)} = 1$, и, следовательно, $\vartheta_{k+1} = t_{k+1}$) и при $k+1 < N$ блуждание должно быть продолжено. При $k+1 = N$ точка $(\vartheta_{k+1}, X_{k+1}) \in \Gamma$ и блуждание заканчивается с $\mathfrak{x} = N$, $(\vartheta_{\mathfrak{x}}, X_{\mathfrak{x}}) = (T, X_N)$. Таким образом, цепь (ϑ_k, X_k) построена.

Отметим, что (ϑ_k, X_k) остается в области $\bar{Q}$ с вероятностью 1; $\mathfrak{x}$ принимает целые неотрицательные значения, не превышающие N .

Теперь введем расширенную марковскую цепь $(\vartheta_k, X_k, Y_k, Z_k)$. Положим $Y_0 = 1$, $Z_0 = 0$. Пусть $\mathfrak{x} > k$ и Y_k, Z_k определены. Если $X_k \notin S_{t_k, h}$, то Y_k, Z_k определяются согласно (2.1)–(2.3) при $t = t_k$, $x = X_k$, $y = Y_k$, $z = Z_k$, $\xi = \xi_k$. Если $X_k \in S_{t_k, h}$, то

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= Y_k + \theta_k^{(\alpha_k)} h c(\vartheta_k, X_k) Y_k + \sqrt{\theta_k^{(\alpha_k)}} h \mu^T(\vartheta_k, X_k) Y_k \xi^{(\alpha_k)}, \\ Z_{k+1} &= Z_k + \theta_k^{(\alpha_k)} h g(\vartheta_k, X_k) Y_k + \sqrt{\theta_k^{(\alpha_k)}} h F^T(\vartheta_k, X_k) Y_k \xi^{(\alpha_k)}, \end{aligned}$$

где $\theta_k^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, 2^d$, и α_k те же, что при определении $(\vartheta_{k+1}, X_{k+1})$.

Не выписывая в формальном виде построенный алгоритм, назовем его *алгоритмом 3*.

Для алгоритма 3 докажем следующую лемму об одношаговой погрешности.

Лемма 3. *Имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}(u(\vartheta_{k+1}, X_{k+1}) Y_{k+1} + Z_{k+1} - u(\vartheta_k, X_k) Y_k - Z_k \mid X_k, Y_k, Z_k) \right| \\ & \leq Ch^2 Y_k I_{G \setminus S_{t_k, h}}(X_k) \chi_{\mathfrak{A} > k} + Ch^{3/2} Y_k I_{S_{t_k, h}}(X_k) \chi_{\mathfrak{A} > k}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Доказательство. Для $X_k \in G \setminus S_{t_k, h}$ неравенство (4.3) является следствием того, что одношаговый порядок точности метода Эйлера (2.1)–(2.3) в слабом смысле есть $O(h^2)$.

Пусть $X_k \in S_{t_k, h}$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho &:= \mathbf{E}(u(\vartheta_{k+1}, X_{k+1}) Y_{k+1} + Z_{k+1} - u(\vartheta_k, X_k) Y_k - Z_k \mid X_k, Y_k, Z_k) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha \left(u(\vartheta_{k+1}^{(\alpha)}, X_{k+1}^{(\alpha)}) Y_{k+1}^{(\alpha)} + Z_{k+1}^{(\alpha)} \right) - u(\vartheta_k, X_k) Y_k - Z_k, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где p_α из (4.2).

Подставляя в (4.4) выражения для $\vartheta_{k+1}^{(\alpha)}, X_{k+1}^{(\alpha)}, Y_{k+1}^{(\alpha)}, Z_{k+1}^{(\alpha)}$ и разлагая $u(\vartheta_{k+1}^{(\alpha)}, X_{k+1}^{(\alpha)})$ в ряд по степеням h в точке (ϑ_k, X_k) , получим

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha Y_k \left\{ \left[u(\vartheta_k, X_k) + \frac{\partial u}{\partial t} \theta_k^{(\alpha)} h \right. \right. \\ & \quad + \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x^j} \left(\theta_k^{(\alpha)} h (b^j - (\sigma \mu)^j) + \sqrt{\theta_k^{(\alpha)}} h (\sigma \xi^{(\alpha)})^j \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^l} \theta_k^{(\alpha)} h (\sigma \xi^{(\alpha)})^j (\sigma \xi^{(\alpha)})^l + O(h^{3/2}) \left. \right] \\ & \quad \times \left(1 + \theta_k^{(\alpha)} h c + \sqrt{\theta_k^{(\alpha)}} h \mu^T \xi^{(\alpha)} \right) \\ & \quad + \left(\theta_k^{(\alpha)} h g + \sqrt{\theta_k^{(\alpha)}} h F^T \xi^{(\alpha)} \right) \left. \right\} \\ & \quad + \sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha Z_k - u(\vartheta_k, X_k) Y_k - Z_k, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где производные от u и коэффициенты b, σ, μ, c, g, F вычисляются в точке (ϑ_k, X_k) .

Перегруппировав слагаемые в (4.5), приходим к выражению

$$\begin{aligned} \rho &= Y_k h \sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha \theta_k^{(\alpha)} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^l} \sum_{m=1}^d \sigma_{jm} \sigma_{lm} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x^j} b^j + cu + g \right] \\ & \quad + Y_k \sqrt{h} \sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha \sqrt{\theta_k^{(\alpha)}} \left[\sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x^j} (\sigma \xi^{(\alpha)})^j + u \mu^T \xi^{(\alpha)} + F^T \xi^{(\alpha)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Y_k h \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x^j} (\sigma \mu)^j \sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha \theta_k^{(\alpha)} + Y_k h \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x^j} \sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha \theta_k^{(\alpha)} \mu^T \xi^{(\alpha)} (\sigma \xi^{(\alpha)})^j \\
& + \frac{1}{2} Y_k h \sum_{j,l=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^l} \sum_{n,m=1, n \neq m}^{2^d} \sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha \theta_k^{(\alpha)} \sigma_{jn} \xi^{(\alpha),n} \sigma_{lm} \xi^{(\alpha),m} \\
& + O(h^{3/2}).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Первая сумма в (4.6) равна нулю в силу того, что $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Из (4.2) имеем $p_\alpha \sqrt{\theta_k^{(\alpha)}} = p_{2^{d-1}+\alpha} \sqrt{\theta_k^{(2^{d-1}+\alpha)}}$, $\alpha = 1, \dots, 2^{d-1}$, и, стало быть, для любого $r = 1, \dots, d$ выполняется

$$\sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha \sqrt{\theta_k^{(\alpha)}} \xi^{(\alpha),r} = \sum_{\alpha=1}^{2^{d-1}} \xi^{(\alpha),r} (p_\alpha \sqrt{\theta_k^{(\alpha)}} - p_{(2^{d-1}+\alpha)} \sqrt{\theta_k^{(2^{d-1}+\alpha)}}) = 0,$$

откуда вытекает, что вторая сумма в (4.6) равна нулю.

Поскольку из (4.2) $p_\alpha \theta_k^{(\alpha)} + p_{2^{d-1}+\alpha} \theta_k^{(2^{d-1}+\alpha)} = \gamma$, то нетрудно проверить, что при $n \neq m$

$$\sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha \theta_k^{(\alpha)} \xi^{(\alpha),n} \xi^{(\alpha),m} = \gamma \sum_{\alpha=1}^{2^{d-1}} \xi^{(\alpha),n} \xi^{(\alpha),m} = \frac{\gamma}{2} \sum_{\alpha=1}^{2^d} \xi^{(\alpha),n} \xi^{(\alpha),m} = 0.$$

Отсюда последняя сумма в (4.6) равна нулю, а предпоследняя равна $Y_k h \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x^j} (\sigma \mu)^j \sum_{\alpha=1}^{2^d} p_\alpha \theta_k^{(\alpha)}$. Таким образом, $\rho = O(h^{3/2})$. Лемма 3 доказана.

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Алгоритм 3 имеет слабый порядок точности $O(h)$:

$$\left| \mathbf{E}(\varphi(\vartheta_{\mathfrak{x}}, X_{\mathfrak{x}}) Y_{\mathfrak{x}} + Z_{\mathfrak{x}}) - u(t_0, x_0) \right| \leq Ch,$$

где C не зависит от t_0, x_0, h .

Отметим, что цепь $(\theta_k, X_k, Y_k, Z_k)$ требует больших затрат при моделировании, но, благодаря меньшей ошибке в приграничной области, позволяет получать более точные результаты, чем цепь $(t_{m/2}, X_{m/2}, Y_{m/2}, Z_{m/2})$ из п. 2.

З а м е ч а н и е. Конструкция одношаговой аппроксимации алгоритма 3 использовалась в [8] при построении послойного (детерминированного) метода решения задачи Дирихле для полулинейных параболических уравнений.

5. Задача Дирихле для эллиптического уравнения. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения эллиптического типа

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^d b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x) u + g(x) = 0, \quad x \in G, \tag{5.1}$$

$$u|_{\partial G} = \varphi(x). \tag{5.2}$$

Предполагается, что коэффициенты $a^{ij} = a^{ji}$ удовлетворяют условию строгой эллиптичности в $\bar{G}$ и выполняются условия, обеспечивающие существование единственного решения $u(x)$ задачи (5.1)–(5.2), принадлежащего классу $C^4(\bar{G})$. Напомним [9], что для этого достаточно, чтобы функции $a^{ij}(x), b^i(x), c(x), g(x)$ принадлежали классу $C^2(\bar{G})$, G была открытой ограниченной областью с дважды непрерывно дифференцируемой границей ∂G , $\varphi(x) \in C^4(\bar{G})$, $c(x) \leq 0$, $x \in \bar{G}$.

Решение задачи (5.1)–(5.2) допускает вероятностное представление

$$u(x) = \mathbf{E}[\varphi(X_x(\tau)) Y_{x,1}(\tau) + Z_{x,1,0}(\tau)], \quad (5.3)$$

где $X_x(s), Y_{x,y}(s), Z_{x,y,z}(s)$, $s \geq 0$, — решение задачи Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dX = b(X) ds + \sigma(X) dw(s), \quad X(0) = x, \quad (5.4)$$

$$dY = c(X) Y ds, \quad Y(0) = y, \quad (5.5)$$

$$dZ = g(X) Y ds + F^T(X) Y dw(s), \quad Z(0) = z, \quad (5.6)$$

$x \in G$, $\tau = \tau_x$ — момент выхода траектории $X_x(s)$ на границу ∂G .

Обозначения здесь и далее аналогичны обозначениям в пп. 1, 2. Ограничимся случаем $\mu \equiv 0$.

Построим для задачи (5.1)–(5.2) алгоритм блуждания, аналогичный алгоритму 1. Применим явный метод слабых аппроксимаций Эйлера с простейшим моделированием шумов к системе (5.4)–(5.6):

$$X_{t,x}(t+h) \approx X = x + hb(x) + h^{1/2}\sigma(x)\xi, \quad (5.7)$$

$$Y_{t,x,y}(t+h) \approx Y = y + hc(x)y, \quad (5.8)$$

$$Z_{t,x,y,z}(t+h) \approx Z = z + hg(x)y + h^{1/2}F^T(x)y\xi. \quad (5.9)$$

Введем множество приграничных точек $S_h \subset \bar{G}$: $x \in S_h$, если хотя бы одно из 2^d значений вектора X окажется вне $\bar{G}$. Пусть постоянная $\lambda > 0$ такова, что если x находится на расстоянии от границы ∂G области G , равном или большем $\lambda\sqrt{h}$, то x не является приграничной и, следовательно, для таких x все реализации случайной величины X принадлежат $\bar{G}$.

Пусть $x \in S_h$. Введем случайный вектор $X_{x,h}^\pi$, принимающий два значения x^π и $x + h^{1/2}\lambda n(x^\pi)$ с вероятностями $p = p_{x,h}$ и $q = q_{x,h} = 1 - p_{x,h}$ соответственно, где

$$p_{x,h} = h^{1/2} \frac{\lambda}{|x + h^{1/2}\lambda n(x^\pi) - x^\pi|},$$

$x^\pi \in \partial G$ — проекция точки x на границу ∂G , $n(x^\pi)$ — единичный вектор внутренней нормали к ∂G в точке x^π .

Для аппроксимации решения системы (5.4) построим марковскую цепь $X_{m/2}$, которая останавливается по достижении границы ∂G на случайном шаге $\varkappa$. Число m пробегает целые неотрицательные значения, так что индекс $m/2$ принимает целые и полуцелые значения.

Положим $X_0 = x_0$. Пусть $\varkappa > k$ и $X_k \in G$ определено. Определим $X_{k+1/2}$ следующим образом. Если состояние $X_k \notin S_h$, то полагаем $X_{k+1/2} = X_k$ (точка остается на месте) и продолжаем блуждание, т.е. $\varkappa > k + \frac{1}{2}$. Если $X_k \in S_h$, то полагаем $X_{k+1/2} = X_{X_k, h}^\pi$. В этом случае $X_{k+1/2}$ может принять два значения: либо $X_k^\pi \in \partial G$ с вероятностью $p_{X_k, h}$, либо $X_k + h^{1/2}\lambda n(X_k^\pi) \notin S_h$ с вероятностью $q_{X_k, h}$. Если $X_{k+1/2} = X_k^\pi$ (т.е. $X_{k+1/2} \in \partial G$), мы присваиваем $\varkappa = k + \frac{1}{2}$, $X_\varkappa = X_k^\pi$ и блуждание заканчивается. Если $X_{k+1/2} = X_k + h^{1/2}\lambda n(X_k^\pi)$, то блуждание продолжается, т.е. $\varkappa > k + \frac{1}{2}$. Для $\varkappa > k + \frac{1}{2}$ значение X_{k+1} определяется согласно (5.7) при $x = X_{k+1/2}$, $\xi = \xi_k$. Таким образом, цепь $X_{m/2}$ построена.

Нетрудно видеть, что $X_{m/2}$ остается в области $\bar{G}$ с вероятностью 1, а $\varkappa$ принимает полуцелые значения.

Введем также расширенную цепь $(X_{m/2}, Y_{m/2}, Z_{m/2})$. Положим $Y_0 = 1$, $Z_0 = 0$. Пусть $\varkappa \geq k + \frac{1}{2}$ и Y_k, Z_k определены. Тогда присвоим $Y_{k+1/2} = Y_k$, $Z_{k+1/2} = Z_k$. При $\varkappa > k + \frac{1}{2}$ и Y_{k+1}, Z_{k+1} определяются системой (5.7)–(5.9) при $x = X_{k+1/2}$, $y = Y_{k+1/2} = Y_k$, $z = Z_{k+1/2} = Z_k$, $\xi = \xi_k$.

Построенный алгоритм назовем алгоритмом 1', так как он аналогичен алгоритму 1 для параболического уравнения. Подчеркнем, что, в отличие от алгоритма 1, $\varkappa$ может принимать здесь сколь угодно большие значения.

Обозначим ν_{x_0} число тех k , при которых цепь попадает в множество S_h .

Лемма 4. *Имеют место неравенства*

$$\mathbf{P}\{\nu_{x_0} = n\} \leq 2^{-(n-1)}, \quad \mathbf{E}\nu_{x_0} \leq C, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{E}\varkappa \leq \frac{C}{h}, \quad (5.11)$$

где C не зависит от x_0 и h .

Доказательство. Неравенства (5.10) доказываются аналогично лемме 1. Доказательство неравенства (5.11) проведем, используя технику оценки среднего числа шагов из [10], [11]. Обозначим μ_x число шагов, которое цепь $X_{m/2}$, стартующая из $x \in G \setminus S_h$, проводит в области $G \setminus S_h$ до попадания в S_h . В области $G \setminus S_h$ значение $X_{k+1/2} = X_k$, поэтому число шагов, которое X_k проводит в области $G \setminus S_h$, совпадает с $\mu_x/2$. Отметим, что X_k является цепью до момента попадания в S_h

включительно. В связи с цепью X_k рассмотрим краевую задачу

$$PV - V = -f(x), \quad x \in G \setminus S_h, \quad (5.12)$$

$$V(x) = 0, \quad x \in S_h, \quad (5.13)$$

где P — оператор перехода за один шаг: $PV(x) = \mathbf{E}V(X_1)$, $X_0 = x$.

Известно [12, с. 322], что решением этой задачи является функция

$$V(x) = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{\mu_x-1} f(X_k). \quad (5.14)$$

Если в качестве $f(x)$ взять индикатор: $f(x) = I_{G \setminus S_h}(x)$, то решением задачи (5.12)–(5.13) будет $V(x) = \mathbf{E}\mu_x$. Далее, если найти решение $V(x)$ задачи (5.12)–(5.13) с функцией $f(x)$, которая всюду в $G \setminus S_h$ удовлетворяет неравенству

$$f(x) \geq I_{G \setminus S_h}(x), \quad (5.15)$$

то в силу (5.14)

$$\mathbf{E}\mu_x \leq V(x). \quad (5.16)$$

Возьмем в качестве $V(x)$ функцию (см. [13, с. 132])

$$V(x) = \begin{cases} A^2 - |x + B|^{2n}, & x \in G \setminus S_h, \\ 0, & x \in S_h, \end{cases} \quad (5.17)$$

где B — d -мерный вектор такой, что

$$\min_{x \in \bar{G}} |x + B| \geq C > 0, \quad (5.18)$$

n — достаточно большое натуральное число (его выбор указан ниже), $A^2 = \max_{x \in \bar{G}} |x + B|^{2n}$.

Функция $V(x)$ удовлетворяет краевому условию (5.13).

Пусть $x \in G \setminus S_h$, тогда

$$X_1 = x + hb(x) + h^{1/2}\sigma(x)\xi.$$

Нетрудно подсчитать, что (напомним, что $a = \sigma\sigma^T$)

$$\begin{aligned} PV(x) - V(x) &= -hn|x + B|^{2n-4} \\ &\times \left[2|x + B|^2(x + B, b(x)) + |x + B|^2 \sum_{i=1}^d a^{ii} \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1) \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x)(x^i + B^i)(x^j + B^j) \right] + O(h^2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Поскольку коэффициенты $a^{ij} = a^{ji}$ уравнения (5.1) удовлетворяют условию строгой эллиптичности в $\overline{G}$, мы имеем для всех $x \in \overline{G}$ и произвольного d -мерного вектора y

$$\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x) y^i y^j \geq \lambda_1^2 \sum_{i=1}^d (y^i)^2, \quad \lambda_1^2 = \min_{x \in \overline{G}} \min_{1 \leq i \leq d} \lambda_i^2(x) > 0, \quad (5.20)$$

где $\lambda_1^2(x) \leq \dots \leq \lambda_d^2(x)$ — собственные значения матрицы $a(x) = \{a^{ij}(x)\}$.

Из (5.19) и (5.20) следует

$$PV - V \leq -\hbar n |x + B|^{2n-2} \left[2(x + B, b(x)) + (2n - 2 + d) \lambda_1^2 \right] + O(\hbar^2).$$

Выберем n так, чтобы для всех $x \in \overline{G}$,

$$2(x + B, b(x)) + (2n - 2 + d) \lambda_1^2 \geq C > 0,$$

что всегда возможно.

Тогда для достаточно малых $\hbar$ получим $PV - V \leq -\gamma \hbar$, где $\gamma > 0$ не зависит от $\hbar$ и x .

Очевидно, что функция $v(x) = V(x)/(\gamma \hbar)$ является решением задачи (5.12)–(5.13) с $f(x) \geq 1$. Следовательно, (см. (5.15)–(5.17)), $\mathbf{E} \mu_x \leq A^2/(\gamma \hbar)$; отсюда и из неравенств (5.10) нетрудно получить оценку (5.11). Лемма 4 доказана.

Доопределим построенную цепь для всех m по правилу: если $m/2 > \varkappa$, то $(X_{m/2}, Y_{m/2}, Z_{m/2}) = (X_\varkappa, Y_\varkappa, Z_\varkappa)$. Введем

$$d_k = u(X_{k+1/2}) Y_{k+1/2} + Z_{k+1/2} - u(t_k, X_k) Y_k - Z_k,$$

$$d_{k+1/2} = u(X_{k+1}) Y_{k+1} + Z_{k+1} - u(X_{k+1/2}) Y_{k+1/2} - Z_{k+1/2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Лемма об одношаговой погрешности доказывается так же, как лемма 2.

Лемма 5. Для целого индекса k имеет место неравенство

$$|\mathbf{E}(d_k \mid X_k, Y_k, Z_k)| \leq Ch Y_k I_{S_h}(X_k) \chi_{\varkappa \geq k+1/2}, \quad (5.21)$$

для полуцелого индекса $k + \frac{1}{2}$ имеет место неравенство

$$|\mathbf{E}(d_{k+1/2} \mid X_{k+1/2}, Y_{k+1/2}, Z_{k+1/2})| \leq Ch^2 Y_k \chi_{\varkappa > k+1/2}. \quad (5.22)$$

Теорема 4. Алгоритм 1' имеет слабый порядок точности $O(\hbar)$:

$$|\mathbf{E}(\varphi(X_\varkappa) Y_\varkappa + Z_\varkappa) - u(x_0)| \leq Ch, \quad (5.23)$$

где C не зависит от $x_0, \hbar$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 R &:= \mathbf{E}(\varphi(X_{\mathfrak{x}}) Y_{\mathfrak{x}} + Z_{\mathfrak{x}}) - u(x_0) = \mathbf{E}(u(X_{\mathfrak{x}}) Y_{\mathfrak{x}} + Z_{\mathfrak{x}}) - u(x_0) \\
 &= \mathbf{E} \sum_{m=0}^{2\mathfrak{x}-1} \left(u(X_{(m+1)/2}) Y_{(m+1)/2} + Z_{(m+1)/2} - u(X_{m/2}) Y_{m/2} - Z_{m/2} \right) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E} d_{m/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} d_{k+1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} d_k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \mathbf{E}(d_{k+1/2} \mid X_{k+1/2}, Y_{k+1/2}, Z_{k+1/2}) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \mathbf{E}(d_k \mid X_k, Y_k, Z_k).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что $Y_k > 0$ и (поскольку $c(x) \leq 0$) $Y_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots$. Пользуясь леммами 4 и 5, получим

$$\begin{aligned}
 |R| &\leq Ch^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(Y_k \chi_{\mathfrak{x} > k+1/2}) + Ch \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(Y_k I_{S_h}(X_k) \chi_{\mathfrak{x} \geq k+1/2}) \\
 &\leq Ch^2 \mathbf{E} \mathfrak{x} + Ch \mathbf{E} \nu_{x_0} \leq Ch,
 \end{aligned}$$

где C не зависит от x_0, h . Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е. Можно построить для эллиптической задачи (5.1)–(5.2) алгоритмы блуждания, аналогичные алгоритмам 2 и 3.

6. Численный эксперимент. Рассмотрим задачу Дирихле для параболического уравнения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} (1.21 - x_2^2 - x_3^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} [3pt] \\
 &\quad + 6(1 - 0.5e^{-t})(x_1^2(1.21 - x_2^2 - x_3^2) + x_2^2) \\
 &\quad + 0.5e^{-t}(1.21 - x_1^4 - x_2^4), \quad t \in (0, T], \quad x \in U_1,
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
 u(0, x) &= \frac{1}{2}(1.21 - x_1^4 - x_2^4), \quad x \in \bar{U}_1, \\
 u(t, x) &= (1.21 - x_1^4 - x_2^4)(1 - 0.5e^{-t}), \quad t \in (0, T], \quad x \in \partial U_1,
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $U_1 \subset \mathbf{R}^3$ — единичный шар с центром в начале координат.

Решением (6.1)–(6.2) является функция

$$u(t, x) = (1.21 - x_1^4 - x_2^4)(1 - 0.5e^{-t}).$$

С помощью замены $t = T - s$ задача (6.1)–(6.2) запишется в виде (1.1)–(1.2), удобном для вероятностного подхода.

В табл. 1 приведены результаты вычисления $u(0.6, 0, 0, 0)$ и $u(15, 0, 0, 0)$ согласно алгоритмам 1 и 2. Числа, внесенные в табл. 1,

представляют собой приближения для $\bar{u} = \mathbf{E}(\varphi(t_{\mathfrak{x}}, X_{\mathfrak{x}}) Y_{\mathfrak{x}} + Z_{\mathfrak{x}})$, подсчитанные по формуле

$$\bar{u} \doteq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\varphi(t_{\mathfrak{x}}^{(m)}, X_{\mathfrak{x}}^{(m)}) Y_{\mathfrak{x}}^{(m)} + Z_{\mathfrak{x}}^{(m)} \right) \pm 2\sqrt{\frac{\bar{D}_M}{M}}, \quad (6.3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{D}_M = & \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\varphi(t_{\mathfrak{x}}^{(m)}, X_{\mathfrak{x}}^{(m)}) Y_{\mathfrak{x}}^{(m)} + Z_{\mathfrak{x}}^{(m)} \right]^2 \\ & - \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\varphi(t_{\mathfrak{x}}^{(m)}, X_{\mathfrak{x}}^{(m)}) Y_{\mathfrak{x}}^{(m)} + Z_{\mathfrak{x}}^{(m)} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Таким образом, в предположении, что выборочная дисперсия достаточно близка к $\bar{D}_M$, $\bar{u}$ с вероятностью 0.95 находится в указанных границах. Для приведенных в табл. 1 значений ошибка метода Монте-Карло не превосходит ошибку численного интегрирования. Как следует из таблицы, экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими. Алгоритм 3 также проходил тестирование, которое дало результаты, соответствующие теории.

Таблица 1. Параболическая задача. Результаты приближенного решения задачи (6.1)–(6.2) согласно алгоритмам 1 (верхняя таблица) и 2 (нижняя таблица) при $\mu \equiv 0$, $F \equiv 0$; точное решение $u(0.6, 0, 0, 0) \doteq 0.87797$, $u(15, 0, 0, 0) \doteq 1.21000$.

h	M	$\bar{u}(0.6, 0, 0, 0)$	$\approx \mathbf{E}\mathfrak{x}$	$\bar{u}(15, 0, 0, 0)$	$\approx \mathbf{E}\mathfrak{x}$
0.04	$1 \cdot 10^3$	0.7756 ± 0.0127	7.4	1.0337 ± 0.0180	7.8
0.01	$4 \cdot 10^4$	0.8444 ± 0.0022	30.6	1.1504 ± 0.0035	32.7
0.0016	$1 \cdot 10^6$	0.8722 ± 0.0005	194	1.1999 ± 0.0007	207
0.0001	$4 \cdot 10^6$	0.8775 ± 0.0002	3111	1.2093 ± 0.0004	3325

h	M	$\bar{u}(0.6, 0, 0, 0)$	$\approx \mathbf{E}\mathfrak{x}$	$\bar{u}(15, 0, 0, 0)$	$\approx \mathbf{E}\mathfrak{x}$
0.04	$1 \cdot 10^3$	0.7127 ± 0.0115	6.3	0.9560 ± 0.0167	6.3
0.01	$4 \cdot 10^4$	0.7941 ± 0.0020	27.0	1.0719 ± 0.0030	27.7
0.0016	$1 \cdot 10^6$	0.8440 ± 0.0004	183	1.1526 ± 0.0007	193
0.0001	$4 \cdot 10^6$	0.8695 ± 0.0002	3064	1.1955 ± 0.0004	3262

Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1.21 - x_2^2 - x_3^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \\ + 6x_1^2 (1.21 - x_2^2 - x_3^2) + 6x_2^2 = 0, \quad x \in U_1, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$u|_{\partial U_1} = 1.21 - x_1^4 - x_2^4. \quad (6.5)$$

Решением (6.4)–(6.5) является функция

$$u(x) = 1.21 - x_1^4 - x_2^4.$$

Этот пример использовался при тестировании метода блуждания по касательным эллипсоидам в [14].

В табл. 2 приведены результаты вычисления $u(0, 0, 0)$ и $u(0.5, 0, 0)$ согласно алгоритму 1'. Числа, внесенные в табл. 2, представляют собой приближения для $\bar{u} = \mathbf{E}(\varphi(X_{\mathfrak{x}}) Y_{\mathfrak{x}} + Z_{\mathfrak{x}})$, подсчитанные по формуле, аналогичной (6.3). Для приведенных в табл. 2 значений ошибка метода Монте-Карло не превосходит ошибку численного интегрирования. Анализируя табл. 2, убеждаемся, что ошибка численного интегрирования пропорциональна Ch , а среднее число шагов $\mathbf{E}\mathfrak{x}$ пропорционально K/h .

Обратим внимание, что метод блуждания по касательным эллипсоидам из [14] также имеет первый порядок точности по h и $\mathbf{E}\mathfrak{x} = O(1/h)$. Сравнение результатов тестов, представленных в [14], с результатами табл. 2 показывает, что в ошибке численного интегрирования константа C при h больше для алгоритма 1', а константа K при $1/h$ в оценке среднего числа шагов $\mathbf{E}\mathfrak{x}$ больше для метода блуждания по касательным эллипсоидам.

Таблица 2. Эллиптическая задача. Результаты приближенного решения задачи (6.4)–(6.5) согласно алгоритму 1' при $F \equiv 0$; точное решение $u(0, 0, 0) = 1.21$, $u(0.5, 0, 0) = 1.1475$.

h	M	$\bar{u}(0, 0, 0)$	$\approx \mathbf{E}\mathfrak{x}$	$\bar{u}(0.5, 0, 0)$	$\approx \mathbf{E}\mathfrak{x}$
0.04	$1 \cdot 10^3$	1.0337 ± 0.0180	7.8	0.9361 ± 0.0239	5.9
0.01	$4 \cdot 10^4$	1.1504 ± 0.0035	32.7	1.0810 ± 0.0042	24.3
0.0016	$1 \cdot 10^6$	1.1999 ± 0.0007	207	1.1359 ± 0.0009	155
0.0001	$4 \cdot 10^6$	1.2093 ± 0.0004	3325	1.1467 ± 0.0004	2477

Отметим (см. введение), что возможно подобрать функцию F так, чтобы уменьшить дисперсию $\bar{D}$ случайной величины $\bar{\eta} = \varphi(X_{\mathfrak{x}}) Y_{\mathfrak{x}} + Z_{\mathfrak{x}}$, связанной с дискретной системой. Такой выбор позволит сократить объем вычислений. Например, если взять

$$F^T = \left(4x_1^3 \sqrt{1.21 - x_2^2 - x_3^2}, 4x_2^3, 0 \right),$$

то можно показать, что дисперсия D случайной величины $\eta = \varphi(X_x(\tau)) Y_{x,1}(\tau) + Z_{x,1,0}(\tau)$, связанной с системой стохастических дифференциальных уравнений, будет равна нулю. Поскольку порядок точности метода есть $O(h)$, то дисперсия $\bar{D}$ удовлетворяет неравенству: $\bar{D} \leq Ch$, где C не зависит от x, h . Следовательно, ошибка метода Монте-Карло ограничена сверху величиной $C\sqrt{h/M}$. В численном эксперименте использование так выбранной функции F позволило существенно уменьшить объем вычислений по сравнению с моделированием при $F \equiv 0$.

Тестирование алгоритма 2' также дало результаты, соответствующие теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968, 427 с.
2. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963, 859 с.
3. Гитман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 354 с.
4. Мильштейн Г. Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988, 224 с.
5. Newton N. J. Variance reduction for simulated diffusions. — SIAM J. Appl. Math., 1994, v. 54, № 6, p. 1780–1805.
6. Мильштейн Г. Н. Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 657–665.
7. Costantini C., Pacchiarotti B., Sartoretto F. Numerical approximation for functionals of reflecting diffusion processes. — SIAM J. Appl. Math., 1998, v. 58, № 1, p. 73–102.
8. Milstein G. N., Tretyakov M. V. Numerical solution of Dirichlet problems for nonlinear parabolic equations by a probabilistic approach. — IMA J. Num. Anal., 2001, v. 21, № 4, p. 887–917.
9. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957, 256 с.
10. Мильштейн Г. Н. Применение численного интегрирования стохастических уравнений для решения краевых задач с граничными условиями Неймана. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 210–218.
11. Milstein G. N. Weak approximation of a diffusion process in a bounded domain. — Stochastics Stochastics Rep., 1997, v. 62, № 1–2, p. 147–200.
12. Винтцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996, 399 с.
13. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969, 367 с.
14. Мильштейн Г. Н., Рыбкина Н. Ф. Алгоритм метода блуждания по малым эллипсоидам для решения общей задачи Дирихле. — Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1993, т. 33, с. 704–725.

Поступила в редакцию
16.XI.1999