Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Алешкявичене, С. В. Нагаев, Переходные явления в случайном блуждании, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 1, 3–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:53:57

© 2003 г.

АЛЕШКЯВИЧЕНЕ А. К.*, НАГАЕВ С. В.**

ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДЕНИИ¹⁾

В статье изучаются предельные распределения максимума сумм $\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{l=1}^k \xi_{n,l}$ в схеме серий $\xi_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, независимых одинаково распределенных в отдельной серии случайных величин в случаях, когда $a_n = \mathbf{E}\xi_{n,k} \rightarrow 0$ и или 1) $a_n\sqrt{n} \rightarrow \infty$, или 2) $a_n\sqrt{n} \rightarrow -\infty$, или 3) $a_n\sqrt{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Дано прямое доказательство того, что аналитические выражения для предельных законов, полученные ранее разными авторами, совпадают. Кроме того, в этих переходных случаях методом характеристических функций доказана сходимость последовательности распределений максимумов к предельным законам.

Ключевые слова и фразы: схема серий, максимум последовательных сумм, предельные распределения, метод характеристических функций.

Пусть $\xi_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность серий независимых случайных величин (сл.в.). Сл.в. $\xi_{n,k}$ одинаково распределены при фиксированном n по закону $F_n(x) = \mathbf{P}\{\xi_{n,1} < x\}$. Положим

$$S_{n,k} = \sum_{j=1}^k \xi_{n,j}, \quad \bar{S}_{n,k} = \max_{1 \leq l \leq k} S_{n,l}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$F_{n,k}(x) = \mathbf{P}\{S_{n,k} < x\}, \quad \bar{F}_{n,k}(x) = \mathbf{P}\{\bar{S}_{n,k} < x\}$$

$$a_n = \mathbf{E}\xi_{n,k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad \sigma_n^2 = \mathbf{D}\xi_{n,k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Эрдеш и Кац [1] (случай $a_n = 0$) и Вальд [2] (см. также [3]) при исследовании последовательности независимых сл.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ с $\mathbf{E}\xi_k = a_k$ и $\mathbf{D}\xi_k = 1$, $k = 1, \dots, n$, показали, что

1) если $a_n n^{1/2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\bar{S}_{n,n} < x n^{1/2}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du; \quad (1)$$

*Институт математики и информатики, ул. Академийос, 4, 2600 Вильнюс, Литва; e-mail: stat@ktl.mii.lt

**Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru

¹⁾ Второй автор проводил исследования во время пребывания в Институте математики и информатики в Вильнюсе.

2) если $a_n n^{1/2} \rightarrow d$ при $n \rightarrow \infty$ (здесь d — некоторая положительная константа), то при $x \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\bar{S}_{n,n} < x n^{1/2}\} = \int_{d^2/2}^{\infty} \frac{x d e^{xd}}{2\sqrt{\pi} u^{3/2}} e^{-x^2 d^2/(4u)-u} du; \quad (2)$$

3) если же $a_n n^{1/2} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\bar{S}_{n,n} < a_n n + x n^{1/2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (3)$$

Более общий результат был получен Ю. В. Прохоровым в работе [5]. Представим этот результат в виде теоремы, формулировка которой заимствована из монографии А. А. Боровкова ([6, гл. 4, § 24, теорема 18]).

Обозначим через $\{\xi(t), t \geq 0\}$ стандартный винеровский процесс: $\mathbf{E}\xi(t) = 0$, $\mathbf{E}\xi^2(t) = t$.

Теорема ([5], [6]). Пусть выполнены условия

$$a_n \rightarrow 0, \quad \sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 > 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

и пусть при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \varepsilon \sqrt{n}} x^2 dF_n(x) = 0. \quad (5)$$

Тогда если $a_n n^{1/2} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, $a \neq 0$ и $t = a^2$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\bar{S}_n < \frac{x}{|a_n|}\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi(u) < \frac{x - u \operatorname{sign} a}{\sigma}, 0 \leq u \leq t\right\} \quad (6)$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{x/\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{t\sigma^2/x^2}^{\infty} u^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u} + \frac{ux^2}{\sigma^4}\right]\right\} du, & a > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-2x/\sigma^2} \left[1 - \frac{e^{x/\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \right. \\ \quad \times \left. \int_{t\sigma^2/x^2}^{\infty} u^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2 u} + \frac{ux^2}{\sigma^2}\right]\right\} du, & a < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Если $a_n n^{1/2} \rightarrow -\infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\bar{S}_n < \frac{x}{|a_n|}\right\} = 1 - e^{-2x/\sigma^2}. \quad (9)$$

В случаях 1), когда $a_n n^{1/2} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и 2), когда $pa_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, имеют место соотношения (3) и (1) соответственно.

З а м е ч а н и е 1. Утверждения (2) и (7) эквивалентны. Действительно, из соотношений (6)–(8), поменяв нормировку и положив $d_n = |a_n| \sqrt{n} / \sigma_n$, $d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = |a| / \sigma$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}_{n,n}}{\sigma_n \sqrt{n}} < x \right\} &= \mathbf{P} \{ \xi(u) + u d \operatorname{sign} a < x, \ 0 \leq u \leq 1 \} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/x^2}^{\infty} u^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + u x^2 d^2 \right) \right\} du, & a > 0, \\ 1 - e^{-2xd} \left[1 - \frac{e^{xd}}{\sqrt{2\pi}} \right] \\ \quad \times \int_{1/x^2}^{\infty} u^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + u x^2 d^2 \right) \right\} du, & a < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда, сделав замену переменной $v = u x^2 d^2 / 2$, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}_{n,n}}{\sigma_n \sqrt{n}} < x \right\} = \begin{cases} \tilde{V}_1(x), & a > 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \tilde{V}_2(x), & a < 0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\tilde{V}_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x d e^{xd} \int_{d^2/2}^{\infty} u^{-3/2} e^{-x^2 d^2 / (4u) - u} du, \quad x \geq 0,$$

$$\tilde{V}_2(x) = 1 - e^{-2xd} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x d e^{xd} \int_{d^2/2}^{\infty} u^{-3/2} e^{-x^2 d^2 / (4u) - u} du, \quad x \geq 0,$$

и $\tilde{V}_1(x; d) = \tilde{V}_2(x; d) = 0$, $x < 0$. Замечаем, что соотношение (11) при $\sigma_n = 1$ совпадает с соотношением (2). Следовательно, утверждения (2) и (7) эквивалентны.

Положим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad \Psi(x) = 1 - \Phi(x).$$

Пусть $\bar{a}$ и $b > 0$ — постоянные. Тогда из (10) и из соотношения (см. [4])

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq T} (\xi(u) - \bar{a}u) \geq b \right\} \\ = \Psi \left((\bar{a}T + b) T^{-1/2} \right) + e^{-2\bar{a}b} \Phi \left((\bar{a}T - b) T^{-1/2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

вытекает (см. также [8]), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}_n}{\sigma_n \sqrt{n}} < x \right\} = \begin{cases} V_1(x; d), & a_n > 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} V_2(x; d), & a_n < 0, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$V_1(x; d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-d} e^{-u^2/2} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2xd} \int_{-\infty}^{-x-d} e^{-u^2/2} du,$$

$$V_2(x; d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x+d} e^{-u^2/2} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2xd} \int_{-\infty}^{-x+d} e^{-u^2/2} du.$$

Тем же самым способом, опираясь на соотношения (10) и (13), можно убедиться в справедливости соотношений (1), (3) и (9).

Отметим, что соотношения (7), (8), (14) и (15) были ранее доказаны прямыми вероятностными методами. Ниже мы приведем доказательство соотношений (14) и (15) методом характеристических функций (см. ниже теорему 1).

З а м е ч а н и е 2. Сравнивая соотношения (11) и (14), а также (12) и (15), получаем функциональные тождества:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x d e^{xd} \int_{d^2/2}^{\infty} u^{-3/2} e^{-x^2 d^2 / (4u) - u} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-d} e^{-u^2/2} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2xd} \int_{-\infty}^{-x-d} e^{-u^2/2} du, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & 1 - e^{-2xd} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x d e^{xd} \int_{d^2/2}^{\infty} u^{-3/2} e^{-x^2 d^2 / (4u) - u} du \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x+d} e^{-u^2/2} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2xd} \int_{-\infty}^{-x+d} e^{-u^2/2} du, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Но эти тождества означают, что функция распределения $V_1(x; d)$ совпадает с функцией распределения $\tilde{V}_1(x; d)$, а $V_2(x; d)$ совпадает с $\tilde{V}_2(x; d)$.

Естественно возникает задача: вывести тождества (16) и (17) непосредственно, не опираясь на предельные соотношения (11), (14) и (12), (15).

Мы решаем эту задачу с помощью метода характеристических функций. Конечно, хотелось бы дать более элементарное доказательство, включающее лишь интегрирование и дифференцирование, но это сделать авторам не удалось.

Д о к а з а т е л ь с т в о т о ж д е с т в а (16). Мы не будем вычислять характеристическую функцию распределения $\tilde{V}_1(x; d)$. Вместо этого мы найдем преобразование Фурье–Стилтьеса функции

$$\bar{V}_1(x; d) = \frac{x d e^{xd}}{2\sqrt{\pi}} \int_{d^2/2}^{\infty} u^{-3/2} e^{-x^2 d^2 / (4u) - u} du,$$

определенной для всех $x \in \mathbf{R}_1$ и совпадающей с $\tilde{V}_1(x; d)$ при $x \geq 0$. Затем, при переходе обратно к прообразу, возьмем только часть прообраза,

определенную для $x \geq 0$, поскольку только эта часть будет соответствовать интересующему нас распределению $\tilde{V}_1(x; d)$, $x \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\bar{V}_1(x; d) \\
 &= \frac{d}{2\sqrt{\pi}} \int_{d^2/2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{3/2}} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left[1 + x \left(d - \frac{d^2}{2u} x \right) \right] e^{xd - x^2 d^2 / (4u)} dx \\
 &= \frac{d}{2\sqrt{\pi}} \int_{d^2/2}^{\infty} u^{-3/2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left[1 + xd - \frac{x^2 d^2}{2u} \right] e^{-1/2 \frac{(x - 2u/d)^2}{2u/d^2}} dx \\
 &= \frac{d}{2\sqrt{\pi}} \int_{d^2/2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}} \left[\exp \left\{ it \frac{2u}{d} - \frac{2u}{d^2} \frac{t^2}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d}{i} \frac{d}{dt} \left(\exp \left\{ it \frac{2u}{d} - \frac{2u}{d^2} \frac{t^2}{2} \right\} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d^2}{2u} \frac{d^2}{dt^2} \left(\exp \left\{ it \frac{2u}{d} - \frac{2u}{d^2} \frac{t^2}{2} \right\} \right) \right] \frac{2\sqrt{\pi u}}{d} \\
 &= \int_{d^2/2}^{\infty} \frac{1}{u} \left[1 + \frac{d}{i} \left(i \frac{2u}{d} - \frac{2u}{d^2} t \right) + \frac{d^2}{2u} \left(-\frac{2u}{d^2} + \left(i \frac{2u}{d} - \frac{2u}{d^2} t \right)^2 \right) \right] \\
 &\quad \times \exp \left\{ it \frac{2u}{d} - \frac{2u}{d^2} \frac{t^2}{2} \right\} du \\
 &= \left(\frac{2t^2}{d^2} - \frac{2it}{d} \right) \int_{d^2/2}^{\infty} \exp \left\{ it \frac{2u}{d} - \frac{2u}{d^2} \frac{t^2}{2} \right\} du \\
 &= \left(-\frac{t^2}{itd - t^2/2} + \frac{2d}{2d + it} \right) e^{-t^2/2 + itd} = \frac{2it + 2d}{2d + it} e^{-t^2/2 + itd} \\
 &= \left(2 - \frac{2d}{2d + it} \right) e^{-t^2/2 + itd} \tag{18}
 \end{aligned}$$

Заметим, что $2d/(it + 2d)$ является характеристической функцией плотности

$$q(u) = \begin{cases} 0, & u \geq 0, \\ 2de^{2ud}, & u < 0. \end{cases}$$

Но тогда функция $2d(it + 2d)^{-1} \exp\{-t^2/2 + itd\}$ является характеристической функцией свертки

$$\frac{2d}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(x-d-u)^2/2} e^{2ud} du$$

двух плотностей $q(x)$ и $(1/\sqrt{2\pi}) e^{-(x-d)^2/2}$, которая после замены переменной $u - x = v + d$ преобразуется в функцию $(2d/\sqrt{2\pi}) e^{2xd} \int_{-\infty}^{-x-d} e^{-v^2/2} dv$. Тогда плотностью (положительной частью) прообраза «характеристической функции» (18), соответствующей функции распределения $\tilde{V}_1(x; d)$, $x \geq 0$, будет функция

$$\tilde{p}_1(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-d)^2/2} - \frac{2d}{\sqrt{2\pi}} e^{2xd} \int_{-\infty}^{-x-d} e^{-u^2/2} du, \quad x \geq 0.$$

Но эта функция совпадает с плотностью закона $V_1(x; d)$, т.е. с функцией

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{d}{dx} V_1(x; d) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-d} e^{-u^2/2} du - \frac{e^{2xd}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x-d} e^{-u^2/2} du \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-d)^2/2} - \frac{2d}{\sqrt{2\pi}} e^{2xd} \int_{-\infty}^{-x-d} e^{-u^2/2} du, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, законы $\tilde{V}_1(x; d)$ и $V_1(x; d)$ совпадают и тождество (16) доказано.

Доказательство тождества (17). Пусть $\tilde{p}_2(x; d)$ обозначает плотность закона $\tilde{V}_2(x; d)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2(x; d) &= \frac{d}{dx} \tilde{V}_2(x; d) = 2de^{-2xd} \\ &+ \frac{d}{dx} \left(\frac{xde^{-xd}}{2\sqrt{\pi}} \int_{d^2/2}^{\infty} u^{-3/2} e^{-(x^2 d^2 / (4u) + u)} du \right), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для преобразования второго слагаемого правой части соотношения (19), которое в дальнейшем будет обозначаться через $\tilde{p}_{2,2}(x; d)$, будем пользоваться теми рассуждениями, которые проводились при вычислении преобразования Фурье–Стилтьеса закона $\tilde{V}_1(x; d)$.

Итак, сначала найдем преобразование Фурье функции

$$\bar{p}_{2,2}(x; d) = \frac{d}{dx} \left(\frac{xde^{-xd}}{2\sqrt{\pi}} \int_{d^2/2}^{\infty} u^{-3/2} e^{-x^2 d^2 / (4u) - u} du \right),$$

определенной для всех $x \in (-\infty, \infty)$ и совпадающей с $\tilde{p}_{2,2}(x; d)$ при $x \geq 0$. Затем, при переходе обратно к прообразу, возьмем только часть прообраза, определенную для $x \geq 0$. Аналогично (18) получаем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \bar{p}_{2,2}(x; d) dx \\ &= \frac{d}{2\sqrt{\pi}} \int_{d^2/2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{3/2}} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(1 - xd - \frac{d^2}{2u} x^2 \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x + 2u/d)^2}{2u/d^2} \right\} dx \\ &= \int_{d^2/2}^{\infty} \frac{1}{u} \left[\exp \left\{ -\frac{2u}{d} it - \frac{2u}{d^2} \frac{t^2}{2} \right\} - \frac{d}{i} \frac{d}{dt} \exp \left\{ -\frac{2u}{d} it - \frac{2u}{d^2} \frac{t^2}{2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2}{2u} \frac{d^2}{dt^2} \exp \left\{ -\frac{2u}{d} it - \frac{2u}{d^2} \frac{t^2}{2} \right\} \right] du \\ &= \int_{d^2/2}^{\infty} \left(\frac{2}{d} it + \frac{2}{d^2} t^2 \right) \exp \left\{ -it \frac{2u}{d} - \frac{2u}{d^2} \frac{t^2}{2} \right\} du \\ &= \left(2 - \frac{2d}{2d - it} \right) \exp \left\{ -itd - \frac{t^2}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что функция $2d/(2d - it)$ является характеристической функцией плотности

$$q_2(x) = \begin{cases} 2de^{-2dx}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Но тогда функция $2d(2d - it)^{-1} \exp\{-itd - t^2/2\}$ является преобразованием Фурье свертки

$$\frac{2d}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(x+d-u)^2/2} e^{-2ud} du$$

двух плотностей $q_2(x)$ и $(1/\sqrt{2\pi}) e^{-(x+d)^2/2}$. Эта свертка после замены переменной $u = v - d + x$ преобразуется в функцию

$$\frac{2d}{\sqrt{2\pi}} e^{-2dx} \int_{-x+d}^\infty e^{-v^2/2} dv, \quad -\infty < x < \infty.$$

Отсюда и из соотношений (19), (20) вытекает, что плотностью закона $\tilde{V}_2(x; d)$ является функция

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2(x; d) &= 2de^{-2xd} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(x+d)^2/2} - \frac{2d}{\sqrt{2\pi}} e^{-2dx} \int_{-x+d}^\infty e^{-v^2/2} dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(x+d)^2/2} + 2de^{-2dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x+d} e^{-v^2/2} dv, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что эта функция совпадает с плотностью закона $V_2(x; d)$, т.е. с функцией

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{d}{dx} V_2(x; d) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x+d} e^{-u^2/2} du - e^{-2xd} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x+d} e^{-u^2/2} du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x+d)^2/2} + 2de^{-2xd} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x+d} e^{-u^2/2} du \\ &\quad + e^{-2xd} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-d)^2/2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(x+d)^2/2} + \frac{2d}{\sqrt{2\pi}} e^{-2xd} \int_{-\infty}^{-x+d} e^{-u^2/2} du, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, законы $V_2(x; d)$ и $\tilde{V}_2(x; d)$ совпадают и, следовательно, тождество (17) доказано.

Доказательство соотношений (14) и (15). Выше мы упомянули, что докажем соотношения (14) и (15) методом характеристических функций. Мы сформулируем наши результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4) и (5). Тогда если $a_n n^{1/2} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, $d_n := |a_n| n^{1/2} / \sigma_n$ и $d_n \rightarrow d$, то равномерно по всем $d \in [\varepsilon_1, A]$ имеют место соотношения (14) и (15) (здесь ε_1 и A — сколь угодно малое и сколь угодно большое положительные числа).

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, мы приведем несколько лемм.

Лемма 1. Для характеристической функции $f_{V_1}(t)$ распределения

$$V_1(x; d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-d} e^{-u^2/2} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2xd} \int_{-\infty}^{-x-d} e^{-u^2/2} du$$

имеет место представление

$$\begin{aligned} f_{V_1}(t) &= \left(1 - \frac{d}{it + 2d}\right) e^{itd - t^2/2} + \frac{d}{it + 2d} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^d e^{-u^2/2} du\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(it + \frac{d^2}{it + 2d}\right) e^{-d^2/2} \int_0^1 e^{(d+it)^2 u/2} \frac{du}{\sqrt{1-u}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} f_{V_1}(t) &= \int_0^\infty e^{itx} dV_1(x; d) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{itx} e^{-(x-d)^2/2} dx \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{itx} dx \left(e^{2xd} \int_{-\infty}^{-x} e^{-(u-d)^2/2} du \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{itx} e^{-(x-d)^2/2} dx \\ &\quad - \frac{2d}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{itx} e^{2dx} \left(\int_{-\infty}^{-x} e^{-(u-d)^2/2} du \right) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{d}{it + 2d}\right) \int_0^\infty e^{itx} e^{-(x-d)^2/2} dx \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{it + 2d} \int_{-\infty}^0 e^{-(u-d)^2/2} du. \end{aligned} \quad (22)$$

Для преобразования первого интеграла в правой части (22) воспользуемся следующей формулой (см. [10, с. 321, формула 3.322(2)]):

$$\int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\beta} - \gamma x \right\} dx = \sqrt{\pi\beta} \exp \{ \beta \gamma^2 \} \left[1 - \tilde{\Phi}(\gamma\sqrt{\beta}) \right], \quad (23)$$

$$\operatorname{Re} \beta > 0, \quad \tilde{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{2}x} e^{-u^2/2} du.$$

Применяя (23) при $\beta = \frac{1}{2}$ и $\gamma = -(d + it)$ и поочередно сделав три очевидные замены переменных, получаем

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^\infty e^{itx} e^{-(x-d)^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \int_0^\infty e^{-x^2/2+x(d+it)} dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{-d^2/2} e^{(d+it)^2/2} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{-(d+it)} e^{-u^2/2} du \right] \\
 &= \frac{1}{2} e^{itd-t^2/2} \left[1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 e^{-(u^2/2)(d+it)^2} (it+d) du \right] \\
 &= \frac{1}{2} e^{itd-t^2/2} \left[1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} (it+d) \int_0^1 e^{-(d+it)^2 u/2} \frac{du}{2\sqrt{u}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} e^{itd-t^2/2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (it+d) e^{-(d+it)^2/2} \int_0^1 e^{(d+it)^2 u/2} \frac{du}{\sqrt{1-u}} \right]. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Второй интеграл в правой части (22) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{it+2d} \int_{-\infty}^0 e^{-(u-d)^2/2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{it+2d} \int_{-\infty}^{-d} e^{-u^2/2} du \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{it+2d} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{2}} - \int_{-d}^0 e^{-u^2/2} du \right) \\
 &= \frac{d}{it+2d} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{it+2d} \int_0^d e^{-u^2/2} du. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Таким образом, из (22), (24) и (25) следует (21). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для характеристической функции $f_{V_2}(t)$ распределения

$$V_2(x; d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x+d} e^{-u^2/2} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2xd} \int_{-\infty}^{-x+d} e^{-u^2/2} du$$

имеет место представление

$$\begin{aligned}
 f_{V_2}(t) &= \left(1 + \frac{d}{it-2d} \right) e^{-itd-t^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(it + \frac{d^2}{it-2d} \right) e^{-d^2/2} \\
 &\quad \times \int_0^1 e^{(it-d)^2 u/2} \frac{du}{\sqrt{1-u}} - \frac{d}{it-2d} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^d e^{-u^2/2} du \right). \quad (26)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 f_{V_2}(t) &= \int_0^\infty e^{itx} dV_2(x; d) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{itx} e^{-(x+d)^2/2} dx \\
 &\quad + \frac{2d}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{itx-2xd} \left(\int_{-\infty}^{-x} e^{-(u+d)^2/2} du \right) dx
 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + \frac{d}{it - 2d} \int_0^\infty e^{itx} e^{-(x+d)^2/2} dx - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{it - 2d} \int_{-\infty}^0 e^{-(u+d)^2/2} du \right). \quad (27)$$

Аналогично преобразованию интеграла I_1 из (22) (см. (24)) получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{itx} e^{-(x+d)^2/2} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{-itd-t^2/2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (it - d) e^{-(it-d)^2/2} \int_0^1 e^{(it-d)^2/2} \frac{du}{\sqrt{1-u}} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{it - 2d} \int_{-\infty}^0 e^{-(u+d)^2/2} du = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{it - 2d} \int_{-\infty}^d e^{-u^2/2} du \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{it - 2d} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2} + \int_0^d e^{-u^2/2} du \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя (28) и (29) в (27), убеждаемся в справедливости соотношения (26). Лемма 2 доказана.

Далее, для исследования предельного поведения характеристической функции сл.в. $\bar{S}_{n,n}$ нам нужно будет знать асимптотическое поведение величин

$$\bar{a}_{n,k} = \int_{-\infty}^{0-} x d\bar{F}_{n,k}(x) \quad \text{и} \quad \bar{b}_{n,k} = \int_{-\infty}^{0-} x^2 d\bar{F}_{n,k}(x).$$

Лемма 3. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\bar{a}_{n,k} = -\frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi k}} e^{-a_n^2 k / (2\sigma_n^2)} + a_n \Phi \left(-\frac{a_n \sqrt{k}}{\sigma_n} \right) + \frac{\varepsilon_{n,k}}{\sqrt{k}},$$

где $\varepsilon_{n,k} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. В работе [8, формула (1.7)] показано, что

$$\bar{a}_{n,k} = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{0-} x dF_{n,k}(x). \quad (30)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{a}_{n,k} &= -\frac{\sigma_n}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{-a_n \sqrt{k}/\sigma_n} F_{n,k}(x \sigma_n \sqrt{k} + a_n k) dx \\ &= -\frac{\sigma_n}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{-a_n \sqrt{k}/\sigma_n} \Phi(x) dx \\ &\quad + \frac{\sigma_n}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{-a_n \sqrt{k}/\sigma_n} [\Phi(x) - F_{n,k}(x \sigma_n \sqrt{k} + a_n k)] dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Интегрируя по частям, находим

$$-\frac{\sigma_n}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{-a_n \sqrt{k}/\sigma_n} \Phi(x) dx = -\frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi k}} e^{-a_n^2 k/(2\sigma_n^2)} + a_n \Phi\left(-\frac{a_n \sqrt{k}}{\sigma_n}\right). \quad (32)$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части соотношения (31). Для любого $L < -a_n \sqrt{k}/\sigma_n$ положим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-a_n \sqrt{k}/\sigma_n} |\Phi(x) - F_{n,k}(x\sigma_n \sqrt{k} + a_n k)| dx &= \int_{-\infty}^{-L} + \int_{-L}^{-a_n \sqrt{k}/\sigma_n} \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Согласно центральной предельной теореме, которая имеет место в силу условий (4) и (5), для любого фиксированного L

$$\lim_{n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty} J_2 = 0. \quad (34)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-L} \Phi(x) dx &< \frac{1}{|L|} \int_{-\infty}^{-L} |x| \Phi(x) dx < \frac{1}{|L|} \int_{-\infty}^0 |x| \Phi(x) dx \\ &= \frac{1}{2|L|} \int_{-\infty}^0 x^2 d\Phi(x) = \frac{1}{4|L|}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{-L} F_{n,k}(x\sigma_n \sqrt{k} + a_n k) dx < \frac{1}{2|L|}.$$

Таким образом,

$$J_1 < \frac{3}{4|L|}. \quad (35)$$

Так как L можно выбрать сколь угодно большим по абсолютной величине, то в силу (33)–(35) можем утверждать, что

$$\frac{\sigma_n}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{-a_n \sqrt{k}/\sigma_n} [\Phi(x) - F_{n,k}(x\sigma_n \sqrt{k} + a_n k)] dx = \frac{\sigma_n \varepsilon_{n,k}}{\sqrt{k}}, \quad (36)$$

где $\varepsilon_{n,k} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$.

Из (31), (32) и (36) следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. Если выполнены условия теоремы 1, то $|\bar{a}_{n,k}| < \sigma_n/\sqrt{k}$.

Доказательство. Согласно (30),

$$\begin{aligned} |\bar{a}_{n,k}| &< \frac{\sigma_n}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^0 F_{n,k}(x\sigma_n \sqrt{k} + a_n k) dx < \frac{\sigma_n}{\sqrt{k}} \mathbf{E} \left| \frac{S_{n,k} - a_n k}{\sigma_n \sqrt{k}} \right| \\ &\leq \frac{\sigma_n}{\sqrt{k}} \left(\mathbf{E} \left(\frac{S_{n,k} - a_n k}{\sigma_n \sqrt{k}} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. При условиях теоремы 1 $\bar{b}_{n,k} = o_k(1)$.

Доказательство. Пусть функция $\beta_n(k)$ такова, что при $k \rightarrow \infty$, $k \leq n$ справедливы соотношения $\beta_n(k) \rightarrow \infty$ и $\beta_n(k) \leq k^{1/4}$. В силу условия (4) и того, что $|a_n|\sqrt{n}/\sigma_n = d_n \rightarrow d$, $d \in [\varepsilon, A]$, функцию $\beta_n(k)$ можно выбрать так, чтобы $\beta_n(k) a_n \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $k \leq n$.

Тогда ввиду леммы 4

$$\int_{-\beta_n(k)}^0 x^2 d\bar{F}_{n,k}(x) < \beta_n(k) \int_{-\beta_n(k)}^0 |x| d\bar{F}_{n,k}(x) < \beta_n(k) |\bar{a}_{n,k}| = o_k(1).$$

С другой стороны, согласно условию (5) и тому, что $\bar{F}_{n,k}(x) < F_n(x) F(x)$ при любых $x < 0$ и $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\beta_n(k)} x^2 d\bar{F}_{n,k}(x) &= \beta_n^2(k) \bar{F}_{n,k}(-\beta_n(k)) - 2 \int_{-\infty}^{-\beta_n(k)} x \bar{F}_{n,k}(x) dx \\ &\leq \beta_n^2(k) F_n(x) F(-\beta_n(k)) + 2 \int_{-\infty}^{-\beta_n(k)} |x| F_n(x) F(x) dx = o_k(1). \end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{b}_{n,k} = \int_{-\infty}^0 x^2 d\bar{F}_{n,k}(x) = o_k(1)$.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что характеристическая функция

$$f_{\bar{S}_{n,n}}\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) = \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{it \bar{S}_{n,n}}{\sigma_n \sqrt{n}} \right\}$$

с ростом n для всех t из любого конечного интервала при $a_n > 0$ стремится к характеристической функции закона $V_1(x; d)$, а при $a_n < 0$ — к характеристической функции закона $V_2(x; d)$. Случаи $a_n > 0$ и $a_n < 0$ исследуем отдельно.

С л у ч а й $a_n > 0$, $d \in [\varepsilon_1, A]$. Известно (см. [7, формула (52)]), что

$$f_{\bar{S}_{n,n}}(t) = f_{n,1}^n(t) + \sum_{k=1}^{n-1} f_{n,1}^k(t) \bar{\varphi}_{n,n-k}(t), \quad (37)$$

где

$$f_{n,1}(t) = \mathbf{E} e^{it\xi_{n,1}}, \quad \bar{\varphi}_{n,k}(t) = \int_{-\infty}^{0-} (1 - e^{itx}) d\bar{F}_{n,k}(x).$$

Очевидно

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{n,1}^k\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) \bar{\varphi}_{n,n-k}\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} \exp \left\{ \left(itd_n - \frac{t^2}{2} \right) \frac{k}{n} \right\} \bar{\varphi}_{n,n-k}\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right), \quad d_n = \frac{|a_n|\sqrt{n}}{\sigma_n}, \\ \Sigma_2 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(f_{n,1}^k\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) - \exp \left\{ \left(itd_n - \frac{t^2}{2} \right) \frac{k}{n} \right\} \right) \bar{\varphi}_{n,n-k}\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

В силу леммы 4 при конечных t

$$|\Sigma_2| < \frac{|t|^3}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)^{-1/2} o\left(\frac{1}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) = |t|^3 o_n(1). \quad (39)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{it}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \exp \left\{ \left(itd_n - \frac{t^2}{2} \right) \frac{k}{n} \right\} (-\bar{a}_{n,n-k}) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \exp \left\{ \left(itd_n - \frac{t^2}{2} \right) \frac{k}{n} \right\} \left(\bar{\varphi}_{n,n-k} \left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}} \right) - \left(-\frac{it}{\sigma_n \sqrt{n}} \bar{a}_{n,n-k} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, используя леммы 3 и 5, находим

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} \exp \left\{ \left(itd_n - \frac{t^2}{2} \right) \frac{k}{n} \right\} \frac{it}{\sigma \sqrt{n}} \\ &\times \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi(n-k)}} e^{-d_n(1-k/n)/2} - a_n \Phi \left(-d_n \sqrt{\frac{k}{n}} \right) \right) + \Sigma_3 + \Sigma_4, \quad (40) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |\Sigma_3| &\leq \frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-kt^2/(2n)} \frac{|\varepsilon_{n,n-k}|}{\sqrt{n-k}} \leq \frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=n-\sqrt{n}+1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-k}} \\ &+ \frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} |\varepsilon_{n,\sqrt{n}}| \sum_{k=1}^{n-\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n-k}} = o_n(|t|), \quad (41) \end{aligned}$$

$$|\Sigma_4| \leq \left(\sum_{k=1}^{n-\sqrt{n}} + \sum_{k=n-\sqrt{n}+1}^{n-1} \right) \frac{t^2}{\sigma_n^2 n} e^{-t^2 k/(2n)} \bar{b}_{n,n-k} = o_n(t^2). \quad (42)$$

В силу (38)–(42) имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} f_{n,1}^k \left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}} \right) \bar{\varphi}_{n,n-k} \left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \exp \left\{ \left(itd_n - \frac{t^2}{2} \right) \frac{k}{n} \right\} \frac{it}{\sigma_n \sqrt{n}} \\ &\times \left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi(n-k)}} e^{-d_n(1-k/n)/2} - a_n \Phi \left(-d_n \sqrt{\frac{k}{n}} \right) \right) \\ &+ o_n(|t| + |t|^3). \quad (43) \end{aligned}$$

Из (37) и (43) вытекает, что для всех t из любого конечного интервала

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{S}_{n,n}} \left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}} \right) = e^{itd-t^2/2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} it \exp \left\{ \left(itd_n - \frac{t^2}{2} \right) \frac{k}{n} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k/n)}} e^{-d^2(1-k/n)/2} - d_n \Phi \left(-d_n \sqrt{\frac{k}{n}} \right) \frac{1}{n} \right) \\
& = e^{itd-t^2/2} + it \int_0^1 \exp \left\{ \left(itd - \frac{t^2}{2} \right) u \right\} \\
& \quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-u)}} e^{-d^2(1-u)/2} - d \Phi \left(-d\sqrt{u} \right) \right) du.
\end{aligned}$$

Отсюда, так как

$$\begin{aligned}
& -itd \int_0^1 e^{(itd-t^2/2)u} \Phi(-d\sqrt{1-u}) du \\
& = -itd \int_0^1 e^{(itd-t^2/2)u} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{d\sqrt{1-u}} e^{-z^2/2} dz \right) du \\
& = -\frac{d}{2d+it} (e^{itd-t^2/2} - 1) - \frac{d^2}{\sqrt{2\pi}(2d+it)} \int_0^1 e^{-d^2u/2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\
& \quad + \frac{d^2 e^{-d^2/2}}{\sqrt{2\pi}(2d+it)} \int_0^1 e^{(d+it)^2u/2} \frac{du}{\sqrt{1-u}}
\end{aligned}$$

и

$$-\frac{d^2}{\sqrt{2\pi}(2d+it)} \int_0^1 e^{-d^2u/2} \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{d}{2d+it} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^d e^{-u^2/2} du,$$

получаем

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{s}_{n,n}} \left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}} \right) \\
& = \left(1 - \frac{d}{it+2d} \right) e^{itd-t^2/2} + \frac{d}{it+2d} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^d e^{-u^2/2} du \right) \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(it + \frac{d^2}{it+2d} \right) e^{-d^2/2} \int_0^1 e^{(d+it)^2u/2} \frac{du}{\sqrt{1-u}}. \quad (44)
\end{aligned}$$

Наконец, сравнивая (44) с (21), убеждаемся, что $f_{\bar{s}_{n,n}}(t/(\sigma_n \sqrt{n})) \rightarrow f_{V_1}(t)$, $n \rightarrow \infty$, равномерно по t из любого конечного интервала. Значит, соотношение (14) доказано.

С л у ч а й $a_n < 0$, $d \in [\varepsilon_1, A]$. Поступая аналогично случаю $a_n > 0$, $d \in [\varepsilon_1, A]$ и учитывая, что теперь $a_n < 0$ и что, согласно лемме 3,

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{n,k} & = -\frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi k}} e^{-a_n^2 k/(2\sigma_n^2)} - |a_n| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{|a_n| \sqrt{k}/\sigma_n} e^{-u^2/2} du \right) + \frac{\varepsilon_{n,k}}{\sqrt{k}} \\
& = -\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k/n}} e^{-d_n^2 k/(2n)} \right. \\
& \quad \left. + d_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{|a_n| \sqrt{k}/\sigma_n} e^{-u^2/2} du \right) \right) + \frac{\varepsilon_{n,k}}{\sqrt{k}}, \quad (45)
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{S}_{n,n}} \left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}} \right) &= e^{-itd-t^2/2} + \int_0^1 \exp \left\{ - \left(itd + \frac{t^2}{2} \right) u \right\} \\
 &\times \left[\frac{it}{\sqrt{2\pi(1-u)}} e^{-d^2(1-u)/2} \right. \\
 &\quad \left. + itd \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{d\sqrt{1-u}} e^{-z^2/2} dz \right) \right] du \\
 &= e^{-itd-t^2/2} + \frac{it}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \int_0^1 e^{(it-d)^2 u/2} \frac{du}{\sqrt{1-u}} \\
 &\quad - \frac{itd}{2(itd+t^2/2)} (e^{-itd-t^2/2} - 1) + \frac{itd}{(itd+t^2/2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^d e^{-z^2/2} dz \\
 &\quad - \frac{itd^2}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{itd+t^2/2} \int_0^1 e^{-(itd+t^2/2)u} e^{-d^2(1-u)/2} \frac{du}{\sqrt{1-u}} \\
 &= \left(1 + \frac{d}{it-2d} \right) e^{-itd-t^2/2} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(it + \frac{d^2}{it-2d} \right) e^{-d^2/2} \int_0^1 e^{(it-d)^2 u/2} \frac{du}{\sqrt{1-u}} \\
 &\quad - \frac{d}{it-2d} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^d e^{-u^2/2} du \right). \tag{46}
 \end{aligned}$$

Сравнение (46) с (26) показывает, что при $a_n < 0$, $d \in [\varepsilon_1, A]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{S}_{n,n}} \left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}} \right) = f_{V_2}(t)$$

равномерно по t из любого конечного интервала. Это, в свою очередь, подтверждает справедливость соотношения (15). Теорема 1 доказана.

Для полноты изложения приведем доказательство соотношений (1), (3) и (9) методом характеристических функций. Конечно, будем считать, что выполнены условия (4) и (5).

Доказательство соотношения (9). Имеем $d_n \rightarrow \infty$, $a_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$. Согласно (37),

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}_{n,n}}{|a_n|} < x \right\} &= f_{\bar{S}_{n,n}} \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) \\
 &= f_{n,1}^n \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} f_{n,1}^k \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) \bar{\varphi}_{n,n-k} \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right). \tag{47}
 \end{aligned}$$

Так как в окрестности точки $t = 0$

$$f_{n,1}(t) = 1 - it|a_n| - \frac{\sigma_n^2 t^2}{2} + o(t^2), \tag{48}$$

то при $|t| \leq \varepsilon$ и достаточно малом ε

$$|f_{n,1}(t)| \leq 1 - \frac{\sigma_n^2 t^2}{4} < e^{-\sigma_n^2 t^2/4}. \quad (49)$$

Следовательно, для $t \neq 0$ из любого конечного интеграла и достаточно большого n

$$\left| f_{n,1}^n \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) \right| \leq e^{-a_n^2 n t^2 / (4\sigma_n^2)} = e^{-d_n^2 t^2 / 4} = o_n(1). \quad (50)$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{n,1}^k \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) \bar{\varphi}_{n,n-k} \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) = \sum_{k=1}^{n-n_A} + \sum_{k=n-n_A+1}^{n-1} = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad (51)$$

где $n_A = [A\sigma_n^2/a_n^2]$, A — сколь угодно большое постоянное число и $[x]$ — целая часть числа x . Далее,

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-n_A} f_{n,1}^k \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) \left(\frac{ita_n^2}{\sigma_n^2} \right) + \Sigma'_1 + \Sigma''_1, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma'_1 &= \sum_{k=1}^{n-n_A} f_{n,1}^k \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) \left[\bar{\varphi}_{n,n-k} \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) - \frac{ita_n}{\sigma_n^2} \bar{a}_{n,n-k} \right], \\ \Sigma''_1 &= \sum_{k=1}^{n-n_A} f_{n,1}^k \left(\frac{t|a_n|}{\sigma_n^2} \right) \frac{ita_n}{\sigma_n^2} [\bar{a}_{n,n-k} - a_n]. \end{aligned}$$

В силу (49) и леммы 5

$$|\Sigma'_1| \leq \frac{a_n^2 t^2}{\sigma_n^4} \sum_{k=1}^{n-n_A} e^{-ka_n^2 t^2 / (4\sigma_n^2)} \bar{b}_{n,n-k} = o_{n_A} \left(\frac{a_n^2 t^2}{\sigma_n^4} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ka_n^2 t^2 / (4\sigma_n^2)} \right) = o_n(1). \quad (53)$$

Далее, имея в виду (45) и равенство

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right), \quad x \rightarrow \infty,$$

находим, что при $n_A \leq k \leq n-1$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{n,k} &= -\frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi k}} \exp \left\{ -\frac{a_n^2 k}{2\sigma_n^2} \right\} - |a_n| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|a_n|\sqrt{k}/\sigma_n}^{\infty} e^{-u^2/2} du \right) + \frac{\varepsilon_{n,k}}{\sqrt{k}} \\ &= -|a_n| + r_{n,k} + \frac{\varepsilon_{n,k}}{\sqrt{k}}, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} r_{n,k} &= \frac{|a_n|}{\sqrt{2\pi}} \int_{|a_n|\sqrt{k}/\sigma_n}^{\infty} e^{-u^2/2} du - \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{a_n^2 k}{2\sigma_n^2} \right\} \\ &= O \left(\frac{\sigma_n^3}{a_n^2 k^{3/2}} e^{-a_n^2 k / (2\sigma_n^2)} \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Тогда, учитывая (49), (55) и неравенство

$$x^\alpha e^{-x} \leq e^{-\alpha} \alpha^\alpha, \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad (56)$$

имеем

$$\begin{aligned} |\Sigma_1''| &\leq \frac{|a_n||t|}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{n-n_A} \left(|r_{n,n-k}| + e^{-ka_n^2 t^2 / (4\sigma_n^2)} \frac{|\varepsilon_{n,n-k}|}{\sqrt{n-k}} \right) \\ &= \frac{|a_n||t|}{\sigma_n^2} O \left(\sum_{k=n_A}^{n-1} \frac{\sigma_n^3}{a_n^2 k^{3/2}} e^{-a_n^2 k / (2\sigma_n^2)} \right) + \frac{|\varepsilon_{n,n_A}|}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \\ &= O \left(\frac{|a_n||t|}{\sigma_n n_A} \sum_{k=n_A}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-a_n^2 k / (2\sigma_n^2)} \right) + o_n(1) \\ &= O \left(\frac{|a_n||t|}{\sigma_n n_A} \left(1 - e^{-a_n^2 / (2\sigma_n^2)} \right)^{-1/2} \right) + o_n(1) \\ &= O \left(\frac{|t|}{n_A} \right) + o_n(1) = o_n(1 + A|t|). \end{aligned} \quad (57)$$

Из (52), (53) и (57) вытекает, что

$$\Sigma_1 = \frac{ita_n^2}{\sigma_n^2} \left(\frac{1 - f_{n,1}^{n-n_A+1}(|a_n|t/\sigma_n^2)}{1 - f_{n,1}(|a_n|t/\sigma_n^2)} - 1 \right) + o_n(1 + A|t|).$$

В силу (48) при фиксированном t , $t \neq 0$, и $a_n \rightarrow 0$

$$\frac{ita_n^2}{\sigma_n^2} \left(1 - f_{n,1} \left(\frac{|a_n|t}{\sigma_n^2} \right) \right)^{-1} = \frac{2}{2 - it\sigma_n^2} (1 + o_n(1)).$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 = \frac{2}{2 - it\sigma_n^2} (1 + o_n(1)) \left[1 - f_{n,1}^{n-n_A+1} \left(\frac{|a_n|t}{\sigma_n^2} \right) \right] + o_n(1 + A|t|).$$

Отсюда, согласно (49), находим

$$\Sigma_1 = \frac{2}{2 - it\sigma_n^2} + O \left(\exp \left\{ -\frac{a_n^2 t^2}{4\sigma_n^2} (n - n_A + 1) \right\} \right) + o_n(1 + A|t|).$$

Это означает, что при фиксированных t , $t \neq 0$, и A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_1 = \frac{2}{2 - it\sigma^2}. \quad (58)$$

Далее, учитывая (54)–(56), получаем

$$\begin{aligned} |\Sigma_2| &\leq \frac{|a_n||t|}{\sigma_n^2} \sum_{k=n-n_A+1}^{n-1} e^{-ka_n^2 t^2 / (4\sigma_n^2)} \left(|a_n| + |r_{n,n-k}| + \frac{|\varepsilon_{n,n-k}|}{\sqrt{n-k}} \right) \\ &\leq \sum_{k=n-n_A}^{n-1} \frac{1}{\sigma_n \sqrt{k}} \left(|a_n| + \frac{\sigma_n^3}{a_n^2 (n-k)^{3/2}} + \frac{|\varepsilon_{n,n-k}|}{\sqrt{n-k}} \right) = o_n(1). \end{aligned} \quad (59)$$

Наконец, из соотношений (47), (50), (51), (58) и (59) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}_{n,n}}{|a_n|} < x \right\} = \frac{2}{2 - it\sigma^2}. \quad (60)$$

Так как функция $2/(2 - it\sigma^2)$ является характеристической функцией закона $1 - e^{-2x/\sigma^2}$, $x > 0$, то (60) завершает доказательство соотношения (9).

Доказательство соотношений (1) и (3). Пусть сначала $d_n \rightarrow \infty$, $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Покажем, что тогда выполняется (3). Ввиду (37) имеем

$$\mathbf{E} \exp \left\{ it \frac{\bar{S}_{n,n} - a_n n}{\sigma_n \sqrt{n}} \right\} = e^{-ita_n n f_{n,1}^n \left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}} \right)} + O \left(\frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{a}_{n,k}| \right). \quad (61)$$

Так как, согласно условиям (4) и (5), $e^{-ita_n n f_{n,1}^n(t/(\sigma_n \sqrt{n}))} \rightarrow e^{-t^2/2}$, $n \rightarrow \infty$, то для доказательства соотношения (3) остается показать, что второе слагаемое правой части соотношения (61) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Ввиду леммы 3 находим

$$\frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{a}_{n,k}| \leq \frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi k}} e^{-a_n^2 k/(2\sigma_n^2)} + a_n \Phi \left(-\frac{a\sqrt{k}}{\sigma_k} \right) + \frac{|\varepsilon_{n,k}|}{\sqrt{k}} \right).$$

Отсюда, учитывая неравенство $\Phi(-x) < (x\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}$, $x > 0$, получаем

$$\frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{a}_{n,k}| \leq \frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2\sigma_n}{\sqrt{2\pi k}} e^{-a_n^2 k/(2\sigma_n^2)} + \frac{|\varepsilon_{n,k}|}{\sqrt{k}} \right). \quad (62)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1-z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k z^k, \quad \rho_k = O(k^{-3/2}),$$

находим, что при $d_n \rightarrow \infty$

$$\frac{|t|}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-a_n^2 k/(2\sigma_n^2)} < \frac{|t|}{d_n} + O \left(\frac{|t|}{\sqrt{n}} \right) = o_n(|t|). \quad (63)$$

Далее, аналогично (59)

$$\frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_{n,k}|}{\sqrt{k}} = o_n(1). \quad (64)$$

Из (62)–(64) вытекает, что при фиксированном t

$$\frac{|t|}{\sigma_n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{a}_{n,k}| = o_n(1).$$

Таким образом, соотношение (3) доказано.

Пусть теперь $d_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Покажем, что выполняется соотношение (1). Доказательство соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{S}_{n,n}} \left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}} \right) = \int_0^\infty e^{itz} dV_i(x; 0),$$

где $i = 1$ при $a_n > 0$ и $i = 2$ при $a_n < 0$, совпадает с доказательством соответствующих соотношений при $d \in [\varepsilon_1, A]$. Далее, так как при $d = 0$

$$V_i(x; 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du,$$

$i = 1, 2$, то при $d_n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}_{n,n}}{\sigma_n \sqrt{n}} < x \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du,$$

и соотношение (1) доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erdős P., Kac M. On certain limit theorems of the theory of probability. — Bull. Amer. Math. Soc., 1946, v. 52, p. 292–302.
2. Wald A. Limit distribution of the maximum and minimum of successive cumulative sums of random variables. — Bull. Amer. Math. Soc., 1947, v. 53, p. 142–153.
3. Chung K. L. Asymptotic distribution of the maximum cumulative sum of independent random variables. — Bull. Amer. Math. Soc., 1948, v. 54, p. 1162–1170.
4. Malmquist S. On certain confidence contours for distribution functions. — Ann. Math. Statist., 1954, v. 25, p. 523–533.
5. Прохоров Ю. В. Переходные явления в процессах массового обслуживания. — Литов. матем. сб., 1963, т. 3, № 1, с. 199–205.
6. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
7. Нагаев С. В. Оценка скорости сходимости распределения максимума сумм независимых случайных величин. — Сиб. матем. журн., 1969, т. 10, № 3, с. 614–633.
8. Нагаев С. В. О скорости сходимости в одной граничной задаче. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 2, с. 179–199.
9. Алешкявичене А. К. Об аппроксимации распределения максимума сумм случайных величин с малым по абсолютной величине средним. — Литов. матем. сб., 1978, т. 18, № 2, с. 5–20.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
17.XI.1998