Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Молчан, Линейные задачи для дробного броуновского движения: групповой подход, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 59–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2985>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:37:18

© 2002 г.

МОЛЧАН Г. М.*

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРОБНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ: ГРУППОВОЙ ПОДХОД¹⁾

Для дробного броуновского движения (fBm) рассмотрены задача прогноза с отрезка, каноническое представление fBm через белый шум на отрезке и их обратная связь, а также формула Гирсанова. Общий подход к задачам основан на инвариантности fBm относительно дробно-линейных преобразований времени. Этот подход практически исключает решение интегральных уравнений и объясняет эффективность решения перечисленных задач для fBm.

Ключевые слова и фразы: дробное броуновское движение, прогноз, формула Гирсанова.

1. Введение

Гауссовский процесс $w_H(t)$, $w_H(0) = 0$, со структурной функцией

$$\mathbf{E}|w_H(t) - w_H(s)|^2 = |t - s|^{2H}, \quad 0 < H < 1, \quad (1)$$

принято называть дробным броуновским движением (fBm). Он является простейшим примером случайного процесса с непрерывными траекториями, обладающего свойствами аффинной инвариантности:

$$\{w_H(\Lambda t + a) - w_H(a), t \in \mathbf{R}^1\} \stackrel{d}{=} \{\Lambda^H w_H(t), t \in \mathbf{R}^1\}, \quad \Lambda \neq 0, \quad (2)$$

и удаленного взаимодействия: при $H \neq \frac{1}{2}$ корреляции приращений w_H убывают степенным образом, т.е.

$$\mathbf{E}(w_H(t+1) - w_H(t))(w_H(s+1) - w_H(s)) \sim c|t - s|^{2H-2}, \quad |t - s| \rightarrow \infty.$$

Благодаря этим свойствам процесс w_H стал необычайно популярен в последнее десятилетие. Круг приложений (финансовая математика, телекоммуникационные сети, физические и биологические модели и т.п.)

*МИТП РАН, Варшавское шоссе, 79, корп. 2, 113556 Москва, Россия; e-mail: molchan@mitp.ru

¹⁾ Часть лекции, прочитанной на школе в Финляндии: Nauvo/Nagu Workshop, 19–22.8.2000. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №99-01-00314) и ISTC (грант №1293-99).

сейчас настолько расширился, что объективный обзор литературы вряд ли возможен. Наряду с броуновским движением ($H = \frac{1}{2}$) процесс w_H стал базовым для построения стохастического исчисления. При этом понадобилось решение простейших линейных задач для fBm. Сюда мы включаем прогноз w_H по данным на отрезке, каноническое представление fBm через белый шум и их обратную связь на полуоси $t \geq 0$, т.е.

$$w_H(t) = \int_0^t K(t, s) dw(s) \quad \text{и} \quad w(t) = \int_0^t K^-(t, s) dw_H(s),$$

где $w(s) = w_{1/2}(s)$, а также формулу Гирсанова. Все эти задачи были решены в 60-е годы и заново переоткрыты в 90-е. Причина в том, что ключевое слово «fBm» утвердилось недавно, затруднив доступ к информации о ранних работах по процессу (1) в поисковых системах. К сожалению, повторные «элементарные» решения указанных задач базируются, как и прежде, на формальной аналитике в решении интегральных уравнений первого рода со степенным разностным ядром. Ниже показано, что эффективность решения линейных задач объясняется инвариантностью приращений $w_H(t)$ относительно дробно-линейных преобразований времени. Любая упомянутая задача на отрезке редуцируется к тривиальной для fBm задаче на полупрямой. Это обстоятельство не было осознано ни в теоретико-вероятностных работах, ни в работах по интегральным уравнениям [1], [2]. В то же время групповой подход был использован автором в [3], но никогда не публиковался, за исключением финальных результатов. Повышенное внимание к fBm стимулировало написание данной заметки, включая исторические замечания.

История вопроса. В 1940 г. А. Н. Колмогоров выделил два важных свойства развитой турбулентности: локальную однородность (стационарность приращений в случае процессов) и автомодельность. В связи с этим появился новый вероятностный объект: случайный процесс со степенной структурной функцией (1), см. [4], [5]. В 1953 г. А. М. Яглом и М. Г. Пинскер совместно [6], [7] развили для процессов со стационарными n -ми приращениями спектральную теорию и теорию прогнозирования. В 1954–1955 гг. К. Ито [8] и И. М. Гельфанд [9] создали общую теорию обобщенных случайных функций, значительно расширив рамки локально-однородных случайных функций. Аппарат обобщенных процессов является естественным средством при решении линейных проблем fBm (см. ниже). Г. Хант упоминает спектральное представление для fBm в 1951 г. [10], а первые прогнозные формулы для w_H , основанные на этом представлении, появились в работе А. М. Яглома в 1955 г. [11]. Прогноз строился по данным w_H на полуоси $(-\infty, a)$, $a \geq 0$. Одновременно М. Г. Крейн опубликовал работу [1] о новом методе решения интегральных уравнений. Она содержит практически все элементы, необходимые для канонического представления w_H через белый

шум на отрезке, хотя и требует дополнительного перевода на вероятностный язык. В 1967 г. С.В. Григорьев [12], отталкиваясь от работы А.М. Яглома [11], нашел общее решение задачи прогноза fBm с произвольного отрезка. В 1968 г. Мандельброт и Ван Несс [13] предложили линейное представление приращений w_H через белый шум на всей оси, т.е. представление вида

$$w_H(t) - w_H(s) = c \int \left[(t - x)_+^{H-1/2} - (s - x)_+^{H-1/2} \right] dw(x),$$

где $a_+ = 1_{a>0}$. Эти же авторы предложили называть w_H дробным броуновским движением. В 1968 г. автором получено решение всех перечисленных линейных задач для fBm; в [14] решение основано на идеях М.Г. Крейна [1], а в [3] используется дополнительно групповой подход, излагаемый ниже. В [14] совместно с Ю.И. Голосовым рассмотрен также вопрос об эквивалентности гауссовых мер, одна из которых отвечает fBm на отрезке.

Новая волна интереса к линейным задачам для fBm возникла в последние пять лет и отражена в работах [15]–[18].

2. Групповой подход

2.1. Дробный шум. Пусть $\xi(t) = w'_H(t)$, $0 < H < 1$, — слабая производная w_H , т.е. обобщенный процесс в смысле Гельфанда–Ито $\xi(\varphi) = -\int w_H(t)\varphi'(t)dt$, $\varphi \in K$, где K — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций с обычной топологией Л. Шварца [19]. Из спектрального представления корреляционной функции w_H

$$\mathbf{E}w_H(t)w_H(s) = c_H^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{it\lambda} - 1)(e^{-is\lambda} - 1)|\lambda|^{-2H-1} d\lambda$$

с константой $c_H = -4\Gamma(-2H)\cos\pi H$ следует, что

$$\mathbf{E}|\xi(\varphi)|^2 = c_H^{-1} \int |\widehat{\varphi}(\lambda)|^2 |\lambda|^{-\mu} d\lambda = c_H^{-1} \|\varphi\|_{\mu}^2, \quad \mu = 2H - 1, \quad (3)$$

где $\widehat{\varphi}$ — преобразование Фурье функции φ . Поэтому замыкание множества $\{\xi(\varphi), \varphi \in K\}$ случайных величин в L^2 -метрике, $\|\xi\|^2 = \mathbf{E}\xi^2$, изоморфно гильбертову пространству H_{μ} , полученному замыканием K в метрике $\|\cdot\|_{\mu}^2$. Пространство H_{μ} является естественной областью определения процесса ξ . В частности, $\xi(\chi_{(0,t)}) = w_H(t)$, где χ_{Δ} — характеристическая функция отрезка Δ .

Пусть T — линейная операция в H_{μ} , а T^* — операция, формально сопряженная с T относительно билинейной формы $\int \varphi(t)\psi(t)dt$. Тогда $(T\xi)(\varphi) := \xi(T^*\varphi)$ есть новый обобщенный процесс, если отображение $T^*: K \rightarrow H_{\mu}$ непрерывно.

Обобщенный гауссовский процесс ξ_μ с корреляционным функционалом $\|\varphi\|_\mu^2$ определен для всех $\mu < 1$. В рассматриваемом случае, $0 < H < 1$, параметр $|\mu| < 1$; при $\mu = -1$ ξ_μ соответствует еще одному процессу Колмогорова [1], [2] с корреляционной функцией $\ln|t - s|^{-1}$.

Утверждение 1. *Процесс ξ_μ , $\mu < 1$, инвариантен относительно дробно-линейных преобразований оси времени:*

$$T\xi_\mu := \xi_\mu\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) \left|\frac{ct+d}{\Delta}\right|^{\mu-1} \stackrel{d}{=} \xi_\mu(t), \quad (4)$$

где $\Delta^2 = |ad - bc| \neq 0$ и T понимается в слабом смысле (см. выше).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа дробно-линейных преобразований порождается сдвигами $t \rightarrow t + a$, растяжениями $t \rightarrow \Lambda t$ и инверсией $t \rightarrow 1/t$. Инвариантность интересующего нас процесса ξ_μ , $|\mu| < 1$, относительно аффинных преобразований является прямым следствием (2). При $|\mu| < 1$ проверка аффинной инвариантности ξ_μ не составляет труда. Покажем, что процесс ξ_μ инвариантен относительно инверсии Мёбиуса:

$$\xi_\mu(t) \stackrel{d}{=} \xi_\mu(t^{-1}) |t|^{\mu-1} := J_\mu \xi_\mu. \quad (5)$$

В силу гауссовости процесса ξ_μ достаточно показать, что сопряженная операция $J_\mu^* \varphi(t) = -\varphi(1/t) |t|^{-\mu-1}$ является унитарной в пространстве H_μ . Из (3) имеем

$$\|\varphi\|_\mu^2 = \int |(-i\lambda)^n \widehat{\varphi}(\lambda)|^2 |\lambda|^{-\mu-2n} d\lambda. \quad (6)$$

Выберем целое n так, чтобы $0 < \mu + 2n \leq 2$. Используя преобразование Фурье обобщенной функции $|x|^p$ (см. [19]) и применяя равенство Парсеваля к (6), получим при $\mu \neq 1 - 2n$

$$\|\varphi\|_\mu^2 = c(n) \iint |t - s|^{2n+\mu-1} \varphi^{(n)}(t) \varphi^{(n)}(s) dt ds.$$

При $\mu = 1 - 2n$ ядро надо заменить на $\ln|t - s|$. Проверим изометричность J_μ^* при $\mu \neq 1 - 2n$. Без потери общности можно считать, что $|\mu| < 1$. Полагая $n = 1$, имеем для $\varphi \in K$, $\supp \varphi \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}$:

$$\|J_\mu^* \varphi\|_\mu^2 = c(1) \iint |t - s|^{\mu+1} d[\varphi(t^{-1}) |t|^{-\mu-1}] d[\varphi(s^{-1}) |s|^{-\mu-1}].$$

После замен $t \rightarrow 1/t$, $s \rightarrow 1/s$ и раскрытия дифференциалов получим

$$\begin{aligned} \|J_\mu^* \varphi\|_\mu^2 = \|\varphi\|_\mu^2 + c(1) (\mu + 1) \iint & |t - s|^{\mu+1} [\varphi(t) |t|^{-1} \varphi(s) |s|^{-1} (\mu + 1) \\ & + \varphi(t) \varphi'(s) t^{-1} + \varphi(s) \varphi'(t) s^{-1}] dt ds. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, находим, что второе слагаемое равно нулю. Множество гладких функций с носителем в $\mathbf{R}^1 \setminus \{0\}$ плотно в H_μ , что доказывает унитарность J_μ^* в H_μ . Утверждение 1 доказано.

Свойство (4) является ключевым для эффективного решения задач прогноза и канонического представления ξ_μ на отрезке Δ . Оно позволяет путем дробно-линейной замены времени свести указанные задачи к полупрямой $(-\infty, 0)$. В силу стационарности ξ_μ эти задачи на полуоси элементарно решаются с помощью разложения Волда [20]. Чтобы вернуться к отрезку Δ , надо использовать обратную замену времени. При этом отрезок $\Delta = [t_0, t_1]$ удобно рассматривать на расширенной ориентированной прямой, считая

$$\Delta = [t_0, t_1] = \begin{cases} t_0 \leq t \leq t_1, & t_0 < t_1, \\ [t_0, \infty) \cup (-\infty, t_1), & t_0 > t_1, \end{cases} \quad (7)$$

т.е. $[t_0, t_1] \cup (t_1, t_0) = \mathbf{R}^1 \cup \{\infty\}$. Тогда мы получаем единый подход к указанным задачам на любом связном множестве расширенной прямой. В частности, задача прогноза ξ_μ по данным на отрезке $[t_0, t_1]$ при $t_0 > t_1$ превращается в задачу интерполяции $\xi_\mu(t)$ с $t \in (t_1, t_0)$. Последнее означает прогноз $\xi_\mu(\varphi)$, $\text{supp } \varphi \subset (t_1, t_0)$, по данным $\{\xi_\mu(\varphi), \text{supp } \varphi \in (t_1, t_0)\}$. Сигма-алгебру событий, порожденных $\{\xi_\mu(\varphi), \text{supp } \varphi \in (a, b)\}$, будем обозначать $\mathcal{F}_a^b(\xi_\mu)$.

2.2. Каноническое представление ξ_μ . Следуя Крамеру, под каноническим представлением гауссовского процесса $\xi(t)$ через белый шум $b(t)$ будем понимать линейную связь $\xi = Tb$, для которой фильтрации $\mathcal{F}_{t_0}^t(\xi)$ и $\mathcal{F}_{t_0}^t(b)$ совпадают для всех t . При рассмотрении ξ_μ на расширенной ориентированной прямой $\mathbf{R}^1 \cup \{\infty\}$ параметр t изменяется от t_0 до ∞ и далее от $-\infty$ до t_0 . Рассмотрим операцию дробного интегрирования $I_{t_0}^\alpha$ порядка $\alpha > 0$ с начальной точкой интегрирования t_0 , т.е.

$$I_{t_0}^\alpha f(t) = \int_{[t_0, t]} \frac{|t-s|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds, \quad (8)$$

где область интегрирования понимается в смысле (7). Если $t_0 = -\infty$, операция (8) известна как дробный интеграл Вейля, а при $-\infty < t_0 < t$ — как интеграл Римана–Лиувилля. В условиях $t_0 < t$ дробный интеграл обладает групповым свойством в пространстве обобщенных функций с носителем в $[t_0, \infty)$: $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$, при этом $I^{-k+\beta} = D^k I^\beta$, $\beta \geq 0$, где $D = d/dt$, [19].

Утверждение 2. Процесс ξ_μ , $|\mu| < 1$, допускает следующее каноническое представление через белый шум:

$$\xi_\mu(t) = (2\pi)^{1/2} |t - t_0|^{\mu/2} I_{t_0}^{\mu/2} \left\{ |s - t_0|^{-\mu/2} b(s) \right\} (t). \quad (9)$$

При $\mu > 0$ представление верно на расширенной прямой $[t_0, \infty) \cup (-\infty, t_0)$, а при $\mu < 0$ на полупрямой $[t_0, \infty)$. Обратная связь ξ_μ и b аналогична:

$$b(t) = (2\pi)^{-1/2} |t - t_0|^{\mu/2} I_{t_0}^{-\mu/2} \left\{ |s - t_0|^{-\mu/2} \xi_\mu(s) \right\} (t). \quad (10)$$

При $\mu > 0$ $t \in (t_0, \infty)$, а при $\mu < 0$ $t \in [t_0, \infty) \cup (-\infty, t_0)$.

Доказательство. Каноническое представление стационарного процесса ξ на всей оси эквивалентно разложению Волда. Алгоритм получения этого разложения для обобщенных процессов со спектром степенного роста тот же, что и для обычных процессов, [20].

Процесс ξ_μ линейно регулярен, поскольку $|\ln f(x)|(1 + \lambda^2)^{-1} \in L^1$, где $f(\lambda) = |\lambda|^{-\mu}$ — спектр ξ_μ . Спектральная функция $|\lambda|^{-\mu}$ допускает следующую факторизацию: $|\lambda|^{-\mu} = (\lambda + i0)^{-\mu/2} (\lambda - i0)^{-\mu/2}$, где $(\lambda - i0)^{-\mu/2}$ — след на вещественной оси функции $z^{-\mu/2}$, аналитической в комплексной плоскости с разрезом $\text{Im } z > 0$ и вещественной при $z > 0$. Комплексно-сопряженная функция к $z^{-\mu/2}$ дает след на вещественной оси $(\lambda + i0)^{-\mu/2}$. Преобразование Фурье обобщенной функции $(\lambda - i0)^{-\mu/2}$ хорошо известно (см. [19]): $[(\lambda - i0)^{-\mu/2}]^\wedge(t) = 2\pi [\Gamma(\mu/2)]^{-1} e^{-i\pi\mu/4} t_+^{\mu/2-1}$, где $t_+^\alpha = |t|^\alpha \mathbf{1}_{t>0}$. Отсюда $\xi_\mu(t) = (2\pi)^{1/2} t_+^{\mu/2-1} * b(t) [\Gamma(\mu/2)]^{-1}$, где $*$ означает свертку. Следовательно,

$$\xi_\mu(t) = (2\pi)^{1/2} I_{-\infty}^{\mu/2} b(t), \quad (11)$$

$$b(t) = (2\pi)^{-1/2} I_{-\infty}^{-\mu/2} \xi_\mu(t). \quad (12)$$

Последнее равенство следует из того, что операция дробного интегрирования Вейля образует однопараметрическую группу. Подставляя (5) в (11), имеем

$$J_\mu \xi_\mu := \xi_\mu(t^{-1}) |t|^{\mu-1} = (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^{\mu/2-1}}{\Gamma(\mu/2)} (b(s^{-1}) |s|^{-1}) ds.$$

Каноническое представление ξ_μ на прямой $(0, \infty) \cup (-\infty, 0)$ получается при $\mu > 0$ отсюда формальной заменой переменных $t^{-1} \rightarrow t$, $s^{-1} \rightarrow s$. При этом надо различать два случая: $t > 0$ и $t < 0$. При строгом выводе последнее равенство надо интерпретировать в слабом смысле: $\xi(J_\mu^* \varphi) = (2\pi)^{1/2} b(J_0^*(I_{-\infty}^{\mu/2})^* \varphi)$, $\varphi \in K$, где $*$ — символ сопряженной операции. В силу (5) $J_\mu^* = (J_\mu^*)^{-1}$. Поэтому $\xi(\varphi) = (2\pi)^{1/2} b(J_0^*(I_{-\infty}^{\mu/2})^* J_\mu^* \varphi)$. Остается удостовериться, что $J_0^*(I_{-\infty}^{\mu/2})^* J_\mu^* = |t|^{-\mu/2} (I_0^{\mu/2})^* |t|^{\mu/2}$. Аналогично показывается, что из (12) при $\mu < 0$ следует (10). В свою очередь (10) влечет (9) с $\mu < 0$ и $t > t_0$, поскольку операция дробного интегрирования Лиувилля обладает групповым свойством на полуоси. Аналогично (9) влечет (10) для $\mu > 0$ и $t > t_0$.

2.3. Прогнозирование ξ_μ . Обобщенный процесс $(\pi_{t_0}^{t_1} \xi_\mu)(\varphi) = \mathbf{E}\{\xi_\mu(\varphi) | \mathcal{F}_{t_0}^{t_1}(\xi_\mu)\}$, $\varphi \in K$, будем называть прогнозом ξ_μ по данным в интервале (t_0, t_1) расширенной прямой.

Утверждение 3. Прогноз ξ_μ , $|\mu| < 1$, по данным в (t_0, t_1) есть обычный процесс в дополнительном интервале, (t_1, t_0) , и имеет вид

$$\pi_{t_0}^{t_1} \xi_\mu(t) = \frac{\sin(\pi \mu/2)}{\pi} \int_{(t_0, t_1)} \left[\frac{(t-t_1)(t-t_0)}{(t_1-s)(s-t_0)} \right]^{\mu/2} \frac{\bar{\xi}_\mu(ds)}{|t-s|}, \quad t \in (t_1, t_0), \quad (13)$$

где $\bar{\xi}_\mu(ds) = d\xi_\mu(\chi_{[0,s]})$ и интеграл понимается в среднем квадратичном.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем прогноз $\xi_\mu(t+\tau)$ в случае $(t_0, t_1) = (-\infty, t)$. Из (11), (12)

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \pi_{-\infty}^t \xi_\mu(t+\tau) &= \left[(2\pi)^{1/2}(t+\tau)_+^{\mu/2-1} \theta(t)\right] * b(t) \\ &= \left[(t+\tau)^{\mu/2-1} \theta(t)\right] * (I_{-\infty}^{-\mu/2} \xi_\mu(t)) = I_{-\infty}^{-\mu/2} \left\{ (s+\tau)^{\mu/2-1} \theta(s) \right\} (t) * \xi_\mu(t). \end{aligned}$$

Здесь $\theta(t) = 1_{t>0}$; в последнем равенстве была использована коммутативность свертки. Первый элемент свертки в последнем равенстве легко вычисляется при $-1 < \mu < 0$ после замены переменных $(t-s)^{-1} \rightarrow s$; это дает

$$\pi_{-\infty}^t \xi_\mu(t+\tau) = \frac{\sin(\pi \mu/2)}{\pi} \left[\left(\frac{\tau}{t} \right)^{\mu/2} (t+\tau)^{-1} \right] * \xi_\mu(t). \quad (14)$$

В случае $\mu > 0$ вычисления аналогичны; надо учесть только, что $I_{-\infty}^{-\mu/2} = D I_{-\infty}^{1-\mu/2}$ и использовать разложение $(s+\tau)^{\mu/2-1} = (s+\tau)^{\mu/2-2}(t+\tau) - (s+\tau)^{\mu/2-2}(t-s)$.

В интеграле (14) расходимости могут возникать в окрестности точек t и $-\infty$. Но в точке t особенность имеет тип

$$(t-s)^{-\mu/2} (\bar{\xi}_\mu(s) - \bar{\xi}_\mu(t)) = |t-s|^{-H+1/2} O(|t-s|^{H-\varepsilon}) = O(|t-s|^{1/2-\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое малое число.

В окрестности ∞ интегральный хвост в свертке (14) имеет тип $I = \int_{-\infty}^1 s^{-1-\mu/2} \bar{\xi}_\mu(ds)$. В силу (5)

$$I \stackrel{d}{=} \int_0^1 s^{1+\mu/2} s^{-\mu-1} \bar{\xi}_\mu(ds) = \int_0^1 s^{-\mu/2} \bar{\xi}_\mu(ds).$$

Но, как мы уже показали, этот интеграл конечен.

Общая формула прогноза получается из (14) применением операций инверсии (5) и сдвига. Продемонстрируем это, используя формальную замену переменных.

Если J_μ — операция инверсии (5), то из (14) для $t > t_1$ имеем

$$J_\mu \pi_{-\infty}^{t_1} \xi_\mu(t) = \frac{\sin(\pi \mu/2)}{\pi} \int_{(-\infty, t)} \left[\frac{t - t_1}{t_1 - s} \right]^{\mu/2} \frac{J_\mu \xi_\mu(s)}{|t - s|} ds$$

или

$$\pi_{t_1^{-1}}^0 \xi_\mu\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sin(\pi \mu/2)}{\pi} \int_{(-\infty, t)} \left[\frac{t - t_1}{t_1 - s} \right]^{\mu/2} \left| \frac{s}{t} \right|^{\mu-1} \frac{\xi_\mu(1/s)}{|t - s|} ds.$$

Замена переменных $t_1^{-1} = t_0$, $t \rightarrow t^{-1}$, $s \rightarrow s^{-1}$ приводит нас к формуле (13) с $t_1 = 0$.

3. Дробное броуновское движение

Приведем следствия для fBm, вытекающие из предыдущих утверждений. По определению

$$w_H(t) = c_H^{-1/2} \xi_\mu(\chi_{(0,t)}), \quad \mu = 2H - 1. \quad (15)$$

Отсюда следует равенство фильтраций $\mathcal{F}_0^t(w_H) = \mathcal{F}_0^t(\xi_H)$, $t \in (0, \infty)$, и, в частности, тривиальность предельной σ -алгебры $\bigcap_{t \downarrow 0} \mathcal{F}_0^t(w_H)$. В противном случае будет нетривиальна аналогичная σ -алгебра для ξ_μ , а в силу (5) и σ -алгебра $\bigcap_{t \downarrow -\infty} \mathcal{F}_{-\infty}^t(\xi_\mu)$. Последнее противоречит линейной регулярности ξ_μ .

Утверждение 2 с учетом (15) дает связь w_H с белым шумом dw .

Утверждение 4. а) *Имеет место соотношение*

$$w_H(t) = \frac{(2\pi/c_H)^{1/2}}{\Gamma(H - 1/2)} \int_0^t K_H(t, s) dw(s), \quad 0 < t < \infty, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} K_H(t, s) &= \int_s^t (\tau - s)^{H-3/2} \left[\left(\frac{\tau}{s} \right)^{H-1/2} - 1 \right] d\tau + \frac{(t-s)^{H-1/2}}{H-1/2} \\ &= O\left((t-s)^{H-1/2} \left(\frac{t}{s} \right)^{|H-1/2|} \right), \quad 0 < s < t < t_0. \end{aligned} \quad (17)$$

б) *Гауссовский процесс*

$$M_H(t) = \int_0^t [(t-s)s]^{1/2-H} dw_H(s), \quad t > 0, \quad (18)$$

является мартингалом относительно естественной фильтрации, порожденной процессом w_H , и

$$\mathbf{E} |dM_H(t)|^2 = c|t|^{1-2H} dt, \quad c = 2\pi\Gamma^2(3/2 - H) c_H^{-1}. \quad (19)$$

При $H < \frac{1}{2}$ независимые приращения M_H можно доопределить при $t < 0$:

$$M_H(s) - M_H(t) = \int \left([(x-t)x]_+^{1/2-H} - [(x-s)x]_+^{1/2-H} \right) \text{sign } x dw_H(x), \quad t, s < 0. \quad (20)$$

При этом сохраняется свойство (19) и равенство фильтраций $\mathcal{F}_0^t(dM_H) = \mathcal{F}_0^t(w_H)$ для всех t расширенной прямой $[0, \infty) \cup (-\infty, 0)$.

Доказательство. а) Оценка (17) очевидна после замен переменных $\tau = s + x(t-s)$ при $s \rightarrow t$ и $\tau = xs$ при $s \rightarrow 0$; она доказывает существование стохастического интеграла в правой части (16) и равенство (16) при $t = 0$. В силу (9) достаточно проверить теперь, что

$$\left(H - \frac{1}{2}\right) \int_0^\infty \varphi'(t) K_H(t, s) ds = \int_0^\infty (t-s)_+^{H-1/2} \left[\left(\frac{t}{s}\right)^{H-1/2} \varphi(t) \right]' dt$$

для любой гладкой финитной φ на $(0, \infty)$. Если из обеих частей этого соотношения вычесть $\int_0^\infty (t-s)_+^{H-1/2} (t/s)^{H-1/2} \varphi'(t) dt$, то оно проверяется интегрированием по частям левой части.

б) Перепишем (10) в форме

$$(2\pi c_H^{-1})^{1/2} |t|^{1/2-H} w'(t) = I_0^{(1/2-H)} \left(|s|^{1/2-H} w'_H(s) \right)$$

и найдем значения этих обобщенных процессов на характеристической функции $\chi_{(0,t)}$, $t > 0$, при $0 < H < 1$ и на $\chi_{(t,s)}$, $t < s < 0$, при $H < \frac{1}{2}$. В обоих случаях учтем, что $I^\alpha = DI^{(1+\alpha)}$ для интегралов Вейля и Лиувилля. Получим (18)–(20). Утверждение 4 доказано.

Взаимная плотность мер, отвечающих гауссовским процессам $x(t) + \varphi(t)$ и $x(t)$ на отрезке Δ , где φ — неслучайная функция, эффективно решается в терминах метрики пространства $H_B(\Delta)$ с воспроизводящим ядром $B(t, s) = \mathbf{E}x(t)x(s)$, [21]. Часто плотность называют формулой Гирсанова.

Пространство $H_B(\Delta)$ состоит из замыкания множества функций $\varphi_\eta(t) = \mathbf{E}x(t)\eta$, где η принадлежит линейной оболочке $\{x(t), t \in \Delta\}$, по норме $\|\varphi\|_B = \mathbf{E}|\eta|^2$. Линейная связь $b = Aw'_H$ белого шума с w_H , см. (10), в которой $\mathcal{F}_0^t(b) = \mathcal{F}_0^t(w_H)$, немедленно решает вопрос о метрике для ядра $\mathbf{E}w_H(t)w_H(s)$ на отрезке $\Delta = (0, T)$, поскольку оператор

$$A: H_B(\Delta) \ni \varphi \longrightarrow \left(\frac{c_H}{2\pi}\right)^{1/2} |t|^{H-1/2} I_0^{1/2-H} (|s|^{1/2-H} \varphi') \in L^2(\Delta)$$

устанавливает изометрию пространств $H_B(\Delta)$ и $L_2(\Delta)$. Отсюда имеем

Утверждение 5. Пространство, воспроизводимое ядром

$$B(t, s) = \frac{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}}{2}$$

на отрезке $(0, T)$, обладает метрикой

$$\|m\|_T^2 = \frac{c_H}{2\pi} \int_0^T |\tilde{m}(t)|^2 |t|^{2H-1} dt,$$

где

$$\tilde{m}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-s)^{1/2-H}}{\Gamma(3/2-H)} s^{1/2-H} m'(s) ds.$$

Пространство получается замыканием гладких функций $m(t)$, $m(0) = 0$, в указанной метрике.

Утверждение 6. Прогноз $w_H(t)$, $t > t_0$, $0 < H < 1$, по данным на отрезке $[0, t_0]$ есть

$$\begin{aligned} \pi_0^{t_0} w_H(kt_0) = c \int_0^1 [w_H(t_0 s) - s^{2H} w_H(t_0)] & \left(\frac{(k-1)k}{(1-s)s} \right)^{H+1/2} \\ & \times ((k-s)^{-1} - a(k)) ds \\ & + (k^{2H} - (k(k-1))^{H+1/2} a(k)) w_H(t_0), \end{aligned} \quad (21)$$

где $k > 1$, $c = \pi^{-1} \cos \pi H$, $a(k) = 2H(H + \frac{1}{2})^{-1} k^{-1} F(1, \frac{1}{2} - H, H + \frac{3}{2}; 1 - k^{-1})$ и F — гипергеометрическая функция. При $0 < H < \frac{1}{2}$ формула (21) упрощается, поскольку можно формально положить $w_H(t_0) = 0$.

З а м е ч а н и е. Утверждение 6 является модификацией прогнозной формулы Григорьева [12], найденной для произвольного отрезка Δ и $0 < H < \frac{1}{2}$. Заново предложенные решения задачи прогноза в [15] содержат w_H в дифференциальной форме и сложное ядро линейного преобразования dw_H , см. (22) ниже. Регуляризация (21) в виде членов, включающих $w_H(t_0)$, распространяет формулу Григорьева на все H .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (15) имеем $w_H(t) = w_H(t_0) + c_H^{-0.5} \xi_\mu(\chi_{(t_0, t)})$, $\mu = 2H - 1$ и $\mathcal{F}_0^{t_0}(w_H) = \mathcal{F}_0^{t_0}(\xi_\mu)$. Поэтому

$$\pi_0^{t_0} w_H(t) = w_H(t_0) + c_H^{-0.5} \pi_0^{t_0} \xi_\mu(\chi_{(t_0, t)}).$$

В силу (13) имеем

$$\pi_0^{t_0} w_H(t) = w_H(t_0) - \int_0^1 K(k, s) dw_H(st_0), \quad (22)$$

где

$$K(k, s) = \frac{\cos \pi H}{\pi} \int_1^k \left[\frac{(\tau-1)\tau}{(1-s)s} \right]^{H-1/2} \frac{d\tau}{\tau-s}.$$

Нетрудно видеть, что в области $T^{-1} < t_0 < t < T$, $0 < s < t_0$ при $H \neq \frac{1}{2}$ $K(t, s)s^{H-1/2}$ имеет порядок $o(1)$, если $t - t_0 = o(t_0 - s)$, и $[(t - t_0)/(t_0 - s)]^{(H-1/2)+}$ в противном случае. Остается проинтегрировать полученное соотношение по частям. Все формальные действия будут законными при всех H , если использовать следующую регуляризацию: вместо $dw_H(st_0)$ подставить $d[w_H(st_0) - s^{2H}w_H(t_0)]$. Но тогда надо изменить коэффициент при $w_H(t_0)$. Окончательный результат приведен в (21). Его легко проверить, сравнив производные по k для выражения (21) и регуляризованного (22); при этом надо учесть, что $[(k(k-1))^{H+1/2}a(k)]' = 2H(k(k-1))^{H-1/2}$. Утверждение 6 доказано.

Преобразование $x_H(t) = e^{-Ht}w_H(e^t)$ переводит $w_H(t)$, $t > 0$, в стационарный процесс, который по аналогии со случаем $H = \frac{1}{2}$ можно назвать дробным процессом Орнштейна-Уленбека. Каноническое представление (17) для $w_H(t)$, $t > 0$, легко трансформируется в разложение Волда для x_H . Отсюда с помощью преобразования Фурье получаем

Утверждение 7. Процесс $x_H(t)$ имеет спектральную функцию

$$f_H(\lambda) = \frac{2\pi}{c_H} \left| \frac{\Gamma(-H - i\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} - i\lambda)} \right|^2 = O(|\lambda|^{-2H-1}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Линейная регулярность $x_H(t)$ является источником другого доказательства закона 0-1 для событий $\bigcap_{t \downarrow 0} \mathcal{F}_0^t(w_H)$.

Линейное неупреждающее преобразование $w_H(t)$ со спектральной характеристикой $\varphi(\lambda) = 1 - 2H/(H - i\lambda)$, $|\varphi(\lambda)| = 1$, не меняет спектра гауссовского процесса $x_H(t)$ и, следовательно, не меняет его конечномерные распределения. Если перевести это замечание в термины w_H , то получим утверждение, впервые отмеченное в [22] для $H = \frac{1}{2}$.

Утверждение 8. На полупрямой $t > 0$

$$\tilde{w}_H(t) = w_H(t) - 2H \int_0^t w_H(s) s^{-1} ds$$

является FBM-процессом и $\mathcal{F}_0^T(\tilde{w}_H) = \mathcal{F}_0^T(M_H(t) - t/T \eta_T)$, где $\eta_T = 2H \int_0^T (s/T)^{2H-1} dM_H(s)$ не зависит от $\mathcal{F}_0^T(\tilde{w}_H)$. При $H = \frac{1}{2}$ имеем $\eta_t = M_H(t) = w_H(t)$.

И. Норрос и Е. Валкейла стимулировали написание данной заметки, за что автор им глубоко признателен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. — Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3, с. 413-416.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967, 508 с.

3. Молчан Г. М. Гауссовские процессы с асимптотически степенным спектром. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 3, с. 556–559.
4. Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений. — Докл. АН СССР, 1940, т. 26, № 1, с. 6–9.
5. Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. — Докл. АН СССР, 1940, т. 26, № 2, с. 115–118.
6. Яглом А. М., Пинскер М. С. Случайные процессы со стационарными приращениями n -го порядка. — Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5, с. 731–734.
7. Пинскер М. С., Яглом А. М. О линейном экстраполировании случайных процессов со стационарными n -ми приращениями. — Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 3, с. 385–388.
8. Ito K. Stationary random distributions. — Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, v. 28, p. 209–223.
9. Гельфанд И. М. Обобщенные случайные процессы. — Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 5, с. 853–856.
10. Hunt G. A. Random Fourier transforms. — Trans. Amer. Math. Soc., 1951, v. 71, p. 38–69.
11. Яглом А. М. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n -ми приращениями. — Матем. сб., 1955, т. 37, с. 141–196.
12. Григорьев С. В. Решение задач экстраполяции и интерполяции для одного нестационарного процесса. — Уч. записки Казанского гос. ун-та, 1967, т. 127, № 3, с. 49–61.
13. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. — SIAM Rev., 1968, v. 10, № 4, p. 422–437.
14. Молчан Г. М., Голосов Ю. И. Гауссовские стационарные процессы с асимптотически степенным спектром. — Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3, с. 546–549.
15. Gripenberg G., Norros I. On the prediction of fractional Brownian motion. — J. Appl. Probab., 1996, v. 33, № 2, p. 400–410.
16. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions. — Bernoulli, 1999, v. 5, № 4, p. 571–587.
17. Decreusefond L., Üstünel A. S. Fractional Brownian Motion: Theory and Applications. — ESAIM: Proceedings. Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications, 1998, v. 5, p. 75–86.
18. Decreusefond L., Üstünel A. S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. — Potential Anal., 1999, v. 10, № 2, p. 177–214.
19. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958, 470 с.
20. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 605 с.
21. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970, 384 с.
22. Jeulin T., Yor M. Filtration des ponts browniens et équations différentielles stochastiques linéaires. — Lecture Notes in Math., 1990, v. 1426, p. 227–265.

Поступила в редакцию
8.IX.2000