Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Докучаев, Параболические уравнения Ито с негладкими нелинейностями и метод двойственности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 1, 22–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:49:03

© 2003 г.

ДОКУЧАЕВ Н. Г.*

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ИТО С НЕГЛАДКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И МЕТОД ДВОЙСТВЕННОСТИ¹⁾

Рассмотрены нелинейные стохастические дифференциальные уравнения с частными производными параболического типа с негладкими нелинейностями типа максимума. Исходное уравнение изучается совместно с соответствующим сопряженным уравнением, являющимся обратным стохастическим дифференциальным уравнением, и совместно с вспомогательной задачей оптимального управления. Получены условия однозначности и разрешимости, установлена неотрицательность решения в случае неотрицательного свободного члена.

Ключевые слова и фразы: параболические уравнения Ито, обратные уравнения, стохастические задачи управления.

К настоящему времени достаточно подробно изучены краевые задачи для линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито параболического типа (см. библиографию в [1]). Известны также условия разрешимости нелинейных уравнений с гладкими нелинейностями (см. [2]–[4] и библиографию там же); предположения о гладкости были существенны для применяемых ранее методов.

В настоящей статье изучаются нелинейные параболические уравнения Ито с негладкими нелинейностями типа максимума. Рассмотрены уравнения со случайными коэффициентами и с граничными условиями на границе области и в начальный момент времени. Следуя подходу [5]–[6], такие уравнения изучаются посредством привлечения сопряженных к ним обратных стохастических дифференциальных уравнений с частными производными типа Ито–Бисмута, т.е. обратных стохастических уравнений с граничным условием в конечный момент времени. Отметим, что в [5] и [6] этот метод применялся только для линейных параболических уравнений Ито, причем предметом исследования были обратные уравнения, а вспомогательным средством — прямые уравнения. Двойственность между прямым и обратным уравнением использо-

*НИИ математики и механики им. В. И. Смирнова С.-Петербургского университета, 198904 С.-Петербург, Россия; e-mail: N_Dokuchaev@yahoo.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 99-01-00886, и гранта Австралийского Совета по исследованиям (Australian Research Council Small Grants Scheme).

валась для изучения линейных параболических уравнений Ито также в работе [7] для области без границы.

Для уравнений с нелинейностями, рассматриваемых в настоящей статье, пришлось привлечь вспомогательную задачу оптимального управления, так что исходное прямое уравнение является аналогом уравнения Беллмана. Отметим, что обычно в задачах управления уравнение Беллмана является обратным, а уравнение объекта — прямым. В случае детерминированных параболических уравнений это не существенно, так как простая замена времени превращает прямое уравнение в обратное и наоборот. Однако в случае стохастических уравнений между прямым и обратным уравнением есть принципиальная разница, связанная с условием неупреждаемости решения; обратное уравнение имеет вид уравнения Ито–Бисмута. Задача управления обратным стохастическим уравнением изучалась в [8], [9], но только для обыкновенных уравнений (т.е. без частных производных). Для уравнений с частными производными такая задача не ставилась, видимо, ввиду отсутствия применений. Здесь найдено некоторое применение: эта задача используется как вспомогательное средство для исследования разрешимости параболического уравнения Ито с негладкими нелинейностями. В результате получены достаточные условия однозначности и разрешимости нелинейного уравнения. В ходе доказательства важную роль играет неотрицательность решения в случае неотрицательного свободного члена. Для детерминированных параболических уравнений подобное свойство хорошо известно, однако для общих стохастических параболических уравнений этот факт нетривиален.

1. Постановка задачи

Рассмотрим N -мерный винеровский процесс $w(t)$ с независимыми компонентами на стандартном полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Винеровский процесс порождает поток полных σ -алгебр $\mathcal{F}_t \triangleq \overline{\sigma\{w(s), s \leq t\}}$, где $t \geq 0$; полагаем, что $w(0) = 0$ и $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Рассмотрим компактное множество $\Delta \subset \mathbf{R}^m$ и ограниченную область $D \in \mathbf{R}^n$ с C^2 -гладкой границей ∂D . Зададим число $T > 0$ и рассмотрим цилиндр $Q \triangleq D \times (0, T)$.

В Q будем рассматривать следующую краевую задачу:

$$d_t V = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, \omega) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \min_{u \in \Delta} \left\{ \frac{dV}{dx} f(x, u, t, \omega) + \lambda(x, u, t, \omega) V + \varphi(x, u, t) \right\} + \zeta \right) dt$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left(\frac{dV}{dx} \beta_i(x, t, \omega) + \bar{\beta}_i(x, t, \omega) V \right) dw_i(t), \quad (1.1)$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad V|_{x \in \partial D} = 0.$$

В (1.1) $V = V(x, t, \omega)$, $\zeta = \zeta(x, t, \omega)$, $(x, t) \in Q$ и $\omega \in \Omega$. Полагаем, что $\beta_i(x, t, \omega) \in \mathbf{R}^n$, a_{ij}, f_i, x_i — компоненты матрицы a и векторов f, x .

Предполагаем, что функции $a(x, t, \omega): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$, $\beta_j(x, t, \omega): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\bar{\beta}_i(x, t, \omega): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, v, t, \omega): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\lambda(x, v, t, \omega): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ и $\varphi(x, v, t, \omega): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ прогрессивно измеримы для всех $x \in \mathbf{R}^n$, $v \in \mathbf{R}^m$ относительно потока $\mathcal{F}_t$. Функции $f(x, v, t, \omega)$, $\lambda(x, v, t, \omega)$ и $\varphi(x, v, t, \omega)$ непрерывны по $v \in \mathbf{R}^m$ для всех x, t, ω . Полагаем, что функции β_i и $\bar{\beta}_i$ ограничены и существуют ограниченные производные $\partial^k a_{ij}/\partial x^k$, $\partial f/\partial x$ и $\partial^k \beta_i/\partial x^k$ для $k = 1, 2$.

Полагаем также, что существует константа $C > 0$ такая, что $\mathbf{E} \int_Q \sup_{u \in \Delta} |\varphi(x, u, t, \omega)| dx dt \leq C$. Наконец, полагаем, что существует константа $\delta > 0$ такая, что

$$2y^\top a(x, t, \omega) y - \sum_{i=1}^N |y^\top \beta_i(x, t, \omega)|^2 \geq \delta |y|^2 \quad \forall y \in \mathbf{R}^n, (x, t) \in Q, \omega \in \Omega.$$

2. Пространства и классы функций

Для банахова пространства X знак $\|\cdot\|_X$ означает норму в X ; знак $(\cdot, \cdot)_X$ обозначает скалярное произведение в гильбертовом пространстве X .

Для дальнейшего нам понадобятся следующие пространства вещественнозначных функций.

Для нецелого $l > 0$ $H^{l, l/2}(Q)$ означает банахово пространство функций $v(x, t): Q \rightarrow \mathbf{R}$, непрерывных по Гёльдеру вместе с $[l]$ производными по x и $[l/2]$ производными по t (это пространство описано в [11]).

Через $C^k(D)$ обозначим стандартное банахово пространство функций $v(x): \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$, непрерывных вместе с k производными по x .

Обозначаем $H^0 \triangleq L_2(D)$, $H^1 \triangleq \overset{0}{W}_2^1(D)$ стандартные пространства Соболева.

Введем пространство H^{-1} , двойственное к H^1 , с нормой $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ такой, что $\|u\|_{H^{-1}}$ для $u \in H^0$ есть супремум $(u, v)_{H^0}$ по всем $v \in H^0$ таким, что $\|v\|_{H^1} \leq 1$; $H^1 \subset H^0 \subset H^{-1}$.

Через $\bar{\ell}_k$ обозначаем меру Лебега в $\mathbf{R}^k$, через $\bar{\mathcal{B}}_k$ обозначаем σ -алгебру лебеговских множеств в $\mathbf{R}^k$.

Пусть $\bar{\mathcal{P}}$ означает пополнение по мере $\bar{\ell}_1 \times \mathbf{P}$ σ -алгебры подмножеств $[0, T] \times \Omega$, порожденной случайными процессами, прогрессивно

измеримыми относительно $\mathcal{F}_t$. Введем пространства

$$X^k \triangleq L^2([0, T] \times \Omega, \overline{\mathcal{P}}, \bar{\ell}_1 \times \mathbf{P}; H^k), \quad Z_t^k \triangleq L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, H^k), \quad k = 0, \pm 1,$$

пространство $C^0 \triangleq C([0, T]; Z_T^0)$, а также пространство $Y^1 \triangleq X^1 \cap C^0$ с нормой $\|u\|_{Y^1} = \|u\|_{X^1} + \|u\|_{C^0}$. Далее, введем пространства

$$\mathcal{H}^l \triangleq L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}; H^{l, l/2}(Q)), \quad \mathcal{C}^k \triangleq L^2([0, T] \times \Omega, \overline{\mathcal{P}}, \bar{\ell}_1 \times \mathbf{P}; C^k(D)), \\ \mathcal{W}_p^k \triangleq L^2([0, T] \times \Omega, \overline{\mathcal{P}}, \bar{\ell}_1 \times \mathbf{P}; W_p^k(D)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Запись $(u, v)_{H^0}$ будем использовать для $u \in H^{-1}$ и $v \in H^1$, подразумеваемая естественное расширение билинейной формы с $u \in H^0$ и $v \in H^1$.

Через $C(\Delta)$ обозначаем банахово пространство непрерывных функций на Δ с супремум-нормой. Через $C^*(\Delta)$ обозначаем сопряженное пространство.

Введем множество

$$\Delta_R \triangleq \left\{ u \in C^*(\Delta): \langle u, 1 \rangle = 1, \langle u, \nu \rangle \geq 0 \ (\forall \nu \in C(\Delta): \nu \geq 0) \right\}$$

(очевидно, Δ_R есть множество вероятностных мер; однако приведенное выше определение удобнее для дальнейшего, так как сразу же задает топологию в Δ_R).

Область задания функций f, λ и φ расширим до $\mathbf{R}^n \times \Delta_R \times \mathbf{R}$: для $(x, u, t) \in \mathbf{R}^n \times \Delta_R \times \mathbf{R}$ положим $f_i(x, u, t) \triangleq \langle f(x, \cdot, t), u \rangle$,

$$\lambda(x, u, t) \triangleq \langle \lambda(x, \cdot, t), u \rangle, \quad \varphi(x, u, t) \triangleq \langle \varphi(x, \cdot, t), u \rangle.$$

Введем класс U_R всех функций $u: Q \times \Omega \rightarrow C^*(\Delta)$ таких, что $u(x, t, \omega) \in \Delta_R$ для п.в. (почти всех) x, t, ω и функции $u: [0, T] \times \Omega \rightarrow L^2(D, \overline{\mathcal{B}}_n, \ell_n; C^*(\Delta))$ являются $\overline{\mathcal{P}}$ -измеримыми.

Введем класс U_0 всех функций $u: Q \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ таких, что $u(x, t, \omega) \in \Delta$ для п.в. $(x, t, \omega) \in Q \times \Omega$. Полагаем, что $\Delta \subset \Delta_R$ и $U_0 \subset U_R$, подразумеваемая естественное вложение.

Через U^s будем обозначать U_R , рассматриваемое как пространство с топологией сопряженного пространства к $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; L^1(Q, \overline{\mathcal{B}}_{n+1}, \ell_{n+1}; C(\Delta)))$. Иными словами, U^s имеет топологию $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; L^\infty(Q, \overline{\mathcal{B}}_{n+1}, \ell_{n+1}; C^*(\Delta)))$.

Через U^w будем обозначать U_R , рассматриваемое как подмножество сопряженного пространства к $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; L^1(Q, \overline{\mathcal{B}}_{n+1}, \ell_{n+1}; C(\Delta)))$ и снабженное слабой со звездой топологией.

Приведем некоторые факты, полезные для дальнейшего.

Предложение 2.1. Пространство U^w компактно.

Доказательство. Пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; L^1(Q, \overline{\mathcal{B}}_{n+1}, \ell_{n+1}; C(\Delta)))$ является сепарабельным и банаховым. Множество U_R ограничено и замкнуто в слабой со звездой топологии. По следствию из теоремы 1 в [12, приложение к гл. 5], пространство U^w компактно.

Предложение 2.2. Пусть $\xi \in X^0$, $t \in [0, T]$, $j \in \{1, \dots, N\}$, и пусть задана последовательность функций $\{\xi_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset L^\infty([0, T] \times \Omega, \ell_1 \times \mathbf{P}; C(D))$ таких, что все $\xi_k(\cdot, t, \omega)$ прогрессивно измеримы относительно потока $\mathcal{F}_t$ и $\|\xi - \xi_k\|_{X^0} \rightarrow 0$. Тогда интегралы $\int_0^t \xi_k(x, s, \omega) dw_j(s)$ имеют предел в пространстве Z_t^0 при $k \rightarrow \infty$, и этот предел зависит от ξ , но не от выбора $\{\xi_k\}$.

Доказательство следует из полноты пространства X^0 и из равенства

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \int_0^t \|\xi_k(\cdot, s, \omega) - \xi_m(\cdot, s, \omega)\|_{H^0}^2 ds \\ &= \int_D dx \mathbf{E} \left(\int_0^t (\xi_k(x, s, \omega) - \xi_m(x, s, \omega)) dw_j(s) \right)^2. \end{aligned}$$

Определение 2.1. Пусть $\xi \in X^0$, $t \in [0, T]$, $j \in \{1, \dots, N\}$, тогда под интегралом $\int_0^t \xi(x, s, \omega) dw_j(s)$ понимаем элемент пространства Z_t^0 , являющийся пределом $\int_0^t \xi_k(x, s, \omega) dw_j(s)$ при $k \rightarrow \infty$ в пространстве Z_t^0 , где $\{\xi_k\}$ — такая последовательность, как указано в предложении 2.2.

Всюду ниже полагаем, что в (1.1) $\zeta \in X^{-1}$ (тем не менее, иногда будем для удобства писать $\zeta(x, t, \omega)$). Для краткости аргумент ω ниже часто будем опускать.

3. Линейные уравнения

Прежде чем перейти к нелинейным уравнениям, установим некоторые свойства линейных уравнений.

Для $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \Delta_R$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ введем дифференциальный оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, t, u, \omega) &\triangleq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, \omega) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x, u, t, \omega) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \\ &+ \lambda(x, u, t, \omega) v(x) \end{aligned}$$

и операторы

$$B_i v \triangleq \frac{dv}{dx}(x) \beta_i(x, t, \omega) + \bar{\beta}_i(x, t, \omega) v(x).$$

Как и выше, f_i, x_i — компоненты векторов f, x , функция $v(x) \in C^2(D)$.

Далее в этом разделе предполагаем, что фиксировано некоторое $u(\cdot) \in U_R$. Введем оператор

$$A = A(x, t, \omega) = \mathcal{A}(x, u(x, t, \omega), t, \omega).$$

Введем операторы, формально сопряженные операторам $\mathcal{A}$, A и B_i :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, u, t, \omega)^* v(x) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(a_{ij}(x, t, \omega) v(x) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i(x, u, t, \omega) v(x)) + \lambda(x, u, t, \omega) v(x), \\ A^* &= A(x, t, \omega)^* = \mathcal{A}(x, u(x, t, \omega), t, \omega)^*, \\ B_i^* v(x) &= -(\nabla, \beta_i(x, t, \omega) v(x)) + \bar{\beta}_i(x, t, \omega) v(x).\end{aligned}$$

3.1. Прямые уравнения. Рассмотрим в $Q = D \times [0, T]$ граничную задачу

$$\begin{aligned}d_t V &= (AV + \eta) dt + \sum_{i=1}^N B_i V dw_i(t), \quad t \geq 0, \\ V(x, 0, \omega) &= 0, \quad V(x, t, \omega)|_{x \in \partial D} = 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Говорим, что для $V \in Y^1$ выполнены уравнения (3.1), если $t \in [0, T]$

$$V(\cdot, t) = \int_0^t (AV(\cdot, s) + \eta(\cdot, s)) ds + \int_0^t \sum_{i=1}^N B_i V(\cdot, s) dw_i(s), \tag{3.2}$$

причем равенство понимается в смысле равенства элементов Z_T^{-1} .

Отметим, что однородное краевое условие на ∂D учтено в том смысле, что решение $V(\cdot, t, \omega) \in H^1 \overset{0}{\Delta} W_2^1(D)$ для п.в. t, ω . Кроме того, для любого t и $V \in Y^1$ значение $V(\cdot, t)$ определено однозначно как элемент Z_T^0 , по определению соответствующих пространств; интегралы по dw_i в (3.2) также определены как элементы Z_T^0 . Интеграл по ds определен как элемент Z_T^{-1} (однако в определении 3.1 для выполнения (3.1) требуется его совпадение в Z_T^{-1} с элементом из Z_T^0).

Теорема 3.1 ([1, гл. 3.4.1]). *Задача (3.1) однозначно разрешима в классе Y^1 для $\eta \in X^{-1}$, и $\|V\|_{Y^1} \leq c\|\eta\|_{X^{-1}}$, где $c > 0$ — константа, не зависящая от η .*

О п р е д е л е н и е 3.2. Для $u(\cdot) \in U_R$ введем операторы $L(u(\cdot))$: $X^{-1} \rightarrow Y^1$ такие, что $L(u(\cdot))\eta = V$, где V — решение в Y^1 задачи (3.1).

Эти линейные операторы непрерывны в силу теоремы 3.1.

3.2. Обратные уравнения. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned}d_t p + \left(A^* p + \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i + \xi \right) dt &= \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i dw_i(t), \\ p(x, T) &= 0, \quad p(x, t)|_{x \in \partial D} = 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Говорим, что для $p \in Y^1$, $\mathcal{M}_1 \in X^0$ выполнены уравнения (3.3), если

$$p(\cdot, t) = \int_t^T \left(A^* p(\cdot, s) + \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i(\cdot, s) + \xi(\cdot, s) \right) ds - \int_t^T \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i(\cdot, s) dw_i(s) \quad (3.4)$$

для любого $t \in [0, T]$, причем равенство понимается в смысле равенства элементов Z_T^{-1} .

Теорема 3.2. Для любого $\xi \in X^{-1}$ существует такая пара $(p, \mathcal{M})$, что $p \in Y^1$, $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N)$, $\mathcal{M}_i \in X^0$ и выполнено (3.3). Эта пара определяется однозначно, и

$$\|p\|_{Y^1} + \sum_{i=1}^N \|\mathcal{M}_i\|_{X^0} \leq c \|\xi\|_{X^{-1}},$$

где константа $c > 0$ не зависит от ξ . При этом $p = L(u(\cdot))^* \xi$, где $L(u(\cdot))^*: X^{-1} \rightarrow X^1$ — оператор, сопряженный к оператору $L(u(\cdot)): X^{-1} \rightarrow X^1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\eta \in X^{-1}$ и $h_i \in X^0$, $i = 1, \dots, N$, рассмотрим в Q краевую задачу

$$d_t V = (AV + \eta) dt + \sum_{i=1}^N h_i dw_i(t), \quad (3.5)$$

$$V(x, 0, \omega) = 0, \quad V(x, t, \omega)|_{x \in \partial D} = 0.$$

Предложение 3.1 ([1, теорема 3.4.1, с. 103]). Задача (3.5) однозначно разрешима в классе Y^1 , и

$$\|V\|_{Y^1} \leq c \left(\|\eta\|_{X^{-1}} + \sum_{i=1}^N \|h_i\|_{X^0} \right),$$

где константа $c > 0$ не зависит от η и h_i .

О п р е д е л е н и е 3.4. Введем операторы $\mathcal{Q}_0: X^{-1} \rightarrow Y^1$, $\mathcal{Q}_i: X^0 \rightarrow Y^1$ такие, что $\mathcal{Q}_0 \eta + \sum_{i=1}^N \mathcal{Q}_i h_i = V$, где V — решение в Y^1 задачи (3.5).

По предложению 3.1, эти линейные операторы непрерывны.

Рассмотрим краевую задачу

$$d_t p + (A^* p + \xi) dt = \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i dw_i(t), \quad (3.6)$$

$$p(x, T) = 0, \quad p(x, t)|_{x \in \partial D} = 0.$$

Решение этой задачи понимаем аналогично определению 3.3.

Предложение 3.2. Для любого $\xi \in X^{-1}$ существует такая пара $(p, \mathcal{M})$, где $p \in Y^1$, $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N)$, $\mathcal{M}_i \in X^0$, что выполнено (3.6). Эта пара определяется однозначно, и

$$\|p\|_{Y^1} + \sum_{i=1}^N \|\mathcal{M}_i\|_{X^0} \leq c \|\xi\|_{X^{-1}},$$

где константа $c > 0$ не зависит от ξ . Кроме того, $p = \mathcal{Q}_0^* \xi$ и $\mathcal{M}_i = \mathcal{Q}_i^* \xi$, где $\mathcal{Q}_0^*: X^{-1} \rightarrow X^1$ и $\mathcal{Q}_i^*: X^{-1} \rightarrow X^0$ — операторы, сопряженные к операторам $\mathcal{Q}_0: X^{-1} \rightarrow X^1$ и $\mathcal{Q}_i: X^0 \rightarrow X^1$ соответственно.

Доказательство. Пусть $f \equiv 0$, $\lambda \equiv 0$ и $a = \{a_{ij}\} \equiv I$. В этом случае предложение 3.2 сводится к теореме 4.1 [5].

Для рассмотрения общего случая потребуется применение некоторого специального приема. Зададим оператор

$$\tilde{A}v \triangleq \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}.$$

Через $\tilde{\mathcal{Q}}_i$ будем обозначать оператор, полученный как $\mathcal{Q}_i$ при подстановке $A = \tilde{A}$. Введем операторы

$$\mathcal{U} \triangleq \tilde{\mathcal{Q}}_0(\tilde{A} - A), \quad \mathcal{U}_* \triangleq \tilde{\mathcal{Q}}_0^*(\tilde{A}^* - A^*), \quad \mathcal{U}_*^* \triangleq (\tilde{A} - A)\tilde{\mathcal{Q}}_0.$$

Очевидно, операторы $\mathcal{A}: X^1 \rightarrow X^{-1}$ и $\mathcal{A}^*: X^1 \rightarrow X^{-1}$ непрерывны. По предложению 3.1, оператор $\mathcal{Q}_0: X^{-1} \rightarrow X^1$ непрерывен, значит, сопряженный оператор $\mathcal{Q}_0^*: X^{-1} \rightarrow X^1$ непрерывен, операторы $\mathcal{U}: X^1 \rightarrow X^1$, $\mathcal{U}_*: X^1 \rightarrow X^1$ непрерывны и сопряженный к последнему оператор $\mathcal{U}_*^*: X^{-1} \rightarrow X^{-1}$ непрерывен.

1. Покажем, что оператор $(I + \mathcal{U}_*)^{-1} \tilde{\mathcal{Q}}_0^*: X^1 \rightarrow X^1$ непрерывен. Сначала докажем, что непрерывен оператор $(I + \mathcal{U})^{-1} \tilde{\mathcal{Q}}_0: X^{-1} \rightarrow X^{-1}$.

Пусть $\eta \in X^{-1}$, $h_i \in X^0$. По предложению 3.1, краевая задача

$$\begin{aligned} d_t z &= (\tilde{A}z + (A - \tilde{A})z + \eta) dt + \sum_{i=1}^N h_i dw_i(t) \\ &= (Az + \eta) dt + \sum_{i=1}^N h_i dw_i(t), \\ z(x, 0, \omega) &= 0, \quad z(x, t, \omega)|_{x \in \partial D} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

однозначно разрешима относительно $z \in Y^1$, и $\|z\|_{Y^1} \leq \text{const} (\|\eta\|_{X^{-1}} + \sum_i \|h_i\|_{X^0})$. По определению соответствующих операторов, решение z уравнения (3.7) имеет вид $z = \mathcal{Q}_0 \eta + \sum_i \mathcal{Q}_i h_i = \tilde{\mathcal{Q}}_0(\eta + (A - \tilde{A})z) + \sum_i \tilde{\mathcal{Q}}_i h_i$, или

$$z = \mathcal{Q}_0 \eta + \sum_{i=1}^N \mathcal{Q}_i h_i = (I + \mathcal{U})^{-1} \left(\tilde{\mathcal{Q}}_0 \eta + \sum_{i=1}^N \tilde{\mathcal{Q}}_i h_i \right). \quad (3.8)$$

Значит, оператор $(I + \mathcal{U})^{-1} \tilde{\mathcal{Q}}_0: X^{-1} \rightarrow X^1$ непрерывен.

Далее, заметим, что образ $\widetilde{\mathcal{Q}}_0(X^{-1})$ содержит все достаточно гладкие функции из X^1 , равные нулю при $t = T$, а следовательно, плотен в X^{-1} . Очевидно, $\widetilde{\mathcal{Q}}_0 y = 0$ влечет $y = 0$. Пусть $y \in \widetilde{\mathcal{Q}}_0(X^{-1})$, $y = \widetilde{\mathcal{Q}}_0 z$. Тогда из уравнения $\widetilde{\mathcal{Q}}_0(I + \mathcal{U}_*)^{-1}x = y$ следует, что $(I + \mathcal{U}_*)^{-1}x = z$, $(I + \mathcal{U}_*)z = x$, $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{-1}y + \mathcal{U}_* \widetilde{\mathcal{Q}}_0^{-1}y = x$, $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{-1}y + (\tilde{A} - A)y = x$, $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{-1}y + \widetilde{\mathcal{Q}}_0^{-1}\mathcal{U}y = x$, $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{-1}(I + \mathcal{U})y = x$, т.е.

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_0(I + \mathcal{U}_*)^{-1} = (I + \mathcal{U})^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}}_0. \quad (3.9)$$

Отсюда и из непрерывности оператора $(I + \mathcal{U})^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}}_0: X^{-1} \rightarrow X^1$ следует, что оператор $\widetilde{\mathcal{Q}}_0(I + \mathcal{U}_*)^{-1}: X^{-1} \rightarrow X^1$ непрерывен. Следовательно, сопряженный оператор $(I + \mathcal{U}_*)^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}}_0^*: X^{-1} \rightarrow X^1$ непрерывен.

2. Установим связь решения задачи (3.6) с операторами $\mathcal{Q}_i$, $i = 0, \dots, N$. Как показано выше, оператор $(I + \mathcal{U}_*)^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}}_0^*: X^{-1} \rightarrow X^1$ непрерывен. Из (3.8) видно, что $\mathcal{Q}_0\xi = (I + \mathcal{U})^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}}_0\xi$ и $\mathcal{Q}_i h_i = (I + \mathcal{U})^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}}_i h_i$, $i > 0$. Из (3.9) получаем, что

$$(I + \mathcal{U}_*)^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}}_0^* = \widetilde{\mathcal{Q}}_0^*(I + \mathcal{U}^*)^{-1}. \quad (3.10)$$

Положим $p \triangleq (I + \mathcal{U}_*)^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}}_0^*\xi$. Очевидно, $(I + \mathcal{U}_*)p = \widetilde{\mathcal{Q}}_0^*\xi$, т.е. $p = \widetilde{\mathcal{Q}}_0^*(\xi + (A^* - \tilde{A}^*)p) = \widetilde{\mathcal{Q}}_0^*\xi - \mathcal{U}_*p$. Для этого p положим $\mathcal{M}_i \triangleq \widetilde{\mathcal{Q}}_i^*(\xi + (A^* - \tilde{A}^*)p)$. Как видно из определений соответствующих операторов, $(p, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N) \in Y^1 \times (X^0)^N$ удовлетворяет (3.6). В силу (3.10), $p = (I + \mathcal{U}_*)^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}}_0^*\xi$ удовлетворяет равенству $p = \widetilde{\mathcal{Q}}_0^*(I + \mathcal{U}^*)^{-1}\xi = \mathcal{Q}_0^*\xi$. Далее, $\mathcal{M}_i \triangleq \widetilde{\mathcal{Q}}_i^*(\xi + (A^* - \tilde{A}^*)p)$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &= \widetilde{\mathcal{Q}}_i^*(\xi + (A^* - \tilde{A}^*)\mathcal{Q}_0^*\xi) = \widetilde{\mathcal{Q}}_i^*(\xi + (A^* - \tilde{A}^*)\widetilde{\mathcal{Q}}_0^*(I + \mathcal{U}^*)^{-1}\xi) \\ &= \widetilde{\mathcal{Q}}_i^*(\xi - \mathcal{U}^*(I + \mathcal{U}^*)^{-1}\xi) = \widetilde{\mathcal{Q}}_i^*\mathcal{U}^*(I + \mathcal{U}^*)^{-1}\xi = \mathcal{Q}_i^*\xi. \end{aligned}$$

Предложение 3.2 доказано.

Зададим операторы

$$P \triangleq \sum_{i=1}^N \mathcal{Q}_i B_i, \quad P^* \triangleq \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{Q}_i^*.$$

Очевидно, оператор $P: X^1 \rightarrow X^1$ непрерывен, следовательно, сопряженный оператор $P^*: X^{-1} \rightarrow X^{-1}$ непрерывен.

Предложение 3.3. Оператор $(I - P^*)^{-1}: X^{-1} \rightarrow X^{-1}$ непрерывен, а оператор $\mathcal{Q}_0^*(I - P^*)^{-1}: X^{-1} \rightarrow Y^1$ совпадает с оператором $L(u(\cdot))^*$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in X^1$. Тогда решение задачи (3.5) с $h_i \triangleq \mathcal{Q}_i B_i \gamma$ имеет вид $V = \sum_{i=1}^N \mathcal{Q}_i B_i (\gamma + V)$, т.е. $V = P(\gamma + V)$. По предложению 3.1, $\|V\|_{Y^1} \leq \text{const} \|\gamma\|_{X^1}$. Значит, задача

$$V = P(\gamma + V) \quad (3.11)$$

однозначно разрешима относительно $V \in Y^1$. Введем оператор $\widehat{\mathcal{Q}}: X^1 \rightarrow Y^1$ такой, что $V = \widehat{\mathcal{Q}}\gamma = P(\gamma + V)$ является решением задачи (3.11).

Зададим произвольное $\gamma \in X^1$ и положим $z \triangleq \widehat{\mathcal{Q}}\gamma$, $h \triangleq \gamma + z$. Очевидно, $\|h\|_{Y^1} \leq \text{const} (\|\gamma\|_{X^1} + \|\zeta\|_{X^1})$. По определению, $z = Ph$, $\gamma = h - Ph$ и $h = (I - P)^{-1}\gamma$. Как отмечалось, $\|z\|_{Y^1} \leq \text{const} \|\gamma\|_{X^1}$. Значит, $\|h\|_{Y^1} \leq \text{const} \|\gamma\|_{X^1}$, и оператор $(I - P)^{-1}: X^1 \rightarrow X^1$ непрерывен. Следовательно, непрерывен сопряженный оператор $(I - P^*)^{-1}: X^{-1} \rightarrow X^{-1}$.

По определению соответствующих операторов, для любого $\eta \in X^{-1}$ решение задачи (3.1) имеет вид $V = L(u(\cdot))\eta = \mathcal{Q}_0\eta + \sum_{i=1}^N \mathcal{Q}_i B_i V = \mathcal{Q}_0\eta + PV \in Y^1$. Значит, $L(u(\cdot)) = (I - P)^{-1}\mathcal{Q}_0$, т.е. $L(u(\cdot))^* = \mathcal{Q}_0^*(I - P^*)^{-1}$. Предложение 3.3 доказано.

Теперь завершим доказательство теоремы 3.2. Прежде всего, из предложения 3.3 следует, что существует $\zeta \in X^{-1}$ такое, что $\zeta = P^*(\xi + \zeta)$. Положим $p \triangleq \mathcal{Q}_0^*(\xi + \zeta)$, $\mathcal{M}_i \triangleq \mathcal{Q}_i^*(\xi + \zeta)$, $\mathcal{M} \triangleq (\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N)$. Очевидно, $(p, \mathcal{M}) \in Y^1 \times (X^0)^N$. Докажем, что пара $(p, \mathcal{M})$ является решением задачи (3.3). Непосредственно из определений операторов $\mathcal{Q}_i^*$ видно, что для этого достаточно доказать, что $\zeta = \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i$.

Пусть $\bar{\zeta} \triangleq \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i$. Из уравнений для $\mathcal{M}_i$ видно, что $\sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i = \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{Q}_i^*(\xi + \zeta)$, или $\bar{\zeta} = P^*(\xi + \zeta)$. Из определения ζ следует, что $\bar{\zeta} = \zeta$. Значит, пара $(p, \mathcal{M})$ есть решение задачи (3.3). Теорема 3.2 доказана.

3.3. Неотрицательность решения обратного уравнения.

Теорема 3.3. Пусть $\xi \in X^0$ и $u(\cdot) \in U_R$ заданы, $p \triangleq L(u(\cdot))^*\xi$. Тогда:

- (а) если $\xi(x, t, \omega) \geq 0$ для всех x, t, ω , то $p(x, s, \omega) \geq 0$ для п.в. x, t, ω ;
- (б) если $\xi(x, t, \omega) > 0$ для п.в. x, t, ω , то $p(x, s, \omega) > 0$ для п.в. x, t, ω .

Доказательство. 1. Докажем утверждение (а) при следующем дополнительном предположении: существует такое нецелое $l > n/2 + n + 3$, что $a(x, t, \omega) \in \mathcal{H}^l$, $f(x, t, \omega) = f(x, u(x, t, \omega), \omega) \in \mathcal{H}^l$, $\beta_i(x, t, \omega) \in \mathcal{H}^l$, $\lambda(x, t, \omega) \in \mathcal{H}^l$ и $g \triangleq (I - P^*)^{-1}\xi \in \mathcal{H}^l$, где оператор $(I - P^*)^{-1}$ описан в предложении 3.3.

Пусть $p \triangleq \mathcal{Q}_0^*g$, тогда $p(x, t, \omega) = \mathbf{E}\{\bar{p}(\cdot, t, \cdot) | \mathcal{F}_t\}$, где $\bar{p}$ является решением задачи

$$\frac{d\bar{p}}{dt} + A^*\bar{p} = -g,$$

$$\bar{p}(x, T, \omega) = 0, \quad \bar{p}(x, t, \omega)|_{x \in \partial D} = 0$$

(см. [5]). Из классической теории детерминированных параболических уравнений следует, что существует модификация (представитель класса эквивалентности) $\bar{p} \in \mathcal{H}^l$ (см. [11]), следовательно, $p \in \mathcal{C}^{[l]}$. Обозначим через e_j векторы в $\mathbf{R}^n$ вида $e_i = (\delta_{1j}, \dots, \delta_{nj})$, где δ_{ij} — символы

Кронекера. Для $u \in X^0$ будем обозначать через $\mathcal{D}_j u$ предел в X^0 разностей $\varepsilon^{-1}\{u(x + \varepsilon e_j, t, \omega) - u(x, t, \omega)\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (если предел существует). Для $\mathcal{M}_i = \mathcal{Q}_i g$ выполнено

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \mathcal{M}_i(t) dw_i(t) = p(x, T) - p(x, 0) + \int_0^T (A^* p(t) + g(t)) dt.$$

Отсюда следует, что существуют пределы $\mathcal{D}_{j_1} \mathcal{D}_{j_2} \dots \mathcal{D}_{j_m} \mathcal{M}_i$ для $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, n\}$, $i = 1, \dots, N$ и $m \leq l - 2$. Таким образом, $\mathcal{M}_j$ можно аппроксимировать в банаховом пространстве $\mathcal{W}_2^r$ для целого $r \in (l - 3, l - 2)$. Следовательно, существует модификация $\mathcal{M}_i \in \mathcal{W}_2^r$, и при этом $\mathcal{M}_i \in \mathcal{C}^2$, поскольку $\mathcal{W}_2^r \subset \mathcal{C}^2$.

Очевидно, существуют такие функции $\hat{f}(x, t, \omega): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\hat{\lambda}(x, t, \omega): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ и $\hat{\beta}_i(x, t, \omega): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, что

$$A^* p = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, \omega) \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(x, t, \omega) \frac{\partial p}{\partial x_i}(x) - \hat{\lambda}(x, t, \omega) p(x),$$

$$B_i^* p = \frac{dp}{dx}(x) \beta_i(x, t, \omega) + \hat{\beta}_i(x, t, \omega) p(x).$$

При этом $\hat{f}_i \in \mathcal{H}^{l-1} \cap \mathcal{C}^0$, $\hat{g} \in \mathcal{H}^{l-2} \cap \mathcal{C}^0$ и $\hat{\beta} \in \mathcal{W}_\infty^1 \cap X^0$. Здесь $a_{ij}, \hat{f}_i, x_i$ — компоненты матрицы a и векторов $\hat{f}, x$.

Кроме того, существуют функции $\tilde{\beta}_i: Q \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, $i = 1, \dots, M$, такие, что

$$a(x, t, \omega) = \sum_{i=1}^N \beta_i(x, t, \omega) \beta_i(x, t, \omega)^\top + \sum_{i=1}^M \tilde{\beta}_i(x, t, \omega) \tilde{\beta}_i(x, t, \omega)^\top,$$

и $\tilde{\beta}_i$ имеют такие же свойства, как и β_i . Введем стандартный винеровский процесс $\tilde{w}(t) = (\tilde{w}_1(t), \dots, \tilde{w}_M(t))$, не зависящий от $w(t)$.

Зададим $(x, s) \in Q$ и рассмотрим уравнение Ито

$$dy(t) = \tilde{f}(y(t), t) dt + \sum_{i=1}^N \beta_i(y(t), t) dw_i(t) + \sum_{i=1}^M \tilde{\beta}_i(y(t), t) d\tilde{w}(t) dt,$$

$$y(s) = x, \tag{3.12}$$

где $\tilde{f} \triangleq \hat{f} - \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i \beta_i$. Имеем

$$d_t p = \mathcal{J}(p) dt + \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i dw_i(t),$$

где

$$\mathcal{J}(p) \triangleq -A^* p - g = -A^* p - \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i - \xi.$$

Обозначим $\psi(t) \triangleq p(y(t, \omega), t, \omega)$.

По формуле Ито–Вентцеля (см. [1, гл. 1, с. 31]),

$$\begin{aligned}
 d\psi(t) &= \left(\mathcal{J}(p) + A^*p + \hat{\lambda}p - \frac{\partial p}{\partial x} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i \beta_i \right) (y(t), t) dt \\
 &+ \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i(y(t), t) dw_i(t) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial M_i}{\partial x} \beta_i \right) (y(t), t) dt \\
 &+ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial p}{\partial x} \beta_i \right) (y(t), t) dw_i(t) + \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial p}{\partial x} \tilde{\beta}_i \right) (y(t), t) d\tilde{w}_i(t) \\
 &= \left(-\xi + \hat{\lambda}p - \frac{\partial p}{\partial x} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i \beta_i + \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \mathcal{M}_i \right) (y(t), t) dt \\
 &+ \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i(y(t), t) dw_i(t) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial p}{\partial x} \beta_i \right) (y(t), t) dw_i(t) \\
 &+ \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial p}{\partial x} \tilde{\beta}_i \right) (y(t), t) d\tilde{w}_i(t).
 \end{aligned}$$

Обозначим $\hat{\psi}(t) \triangleq \psi(t) \gamma(t)$, где $t \geq s$,

$$\begin{aligned}
 \gamma(t) &\triangleq \exp \left(- \int_s^t \hat{\lambda}(y(t), t) dt + \sum_{i=1}^N \int_s^t \hat{\beta}_i(y(s), s) dw_i(s) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_s^t \hat{\beta}_i(y(s), s)^2 ds \right).
 \end{aligned}$$

При помощи формулы Ито непосредственно проверяется, что

$$d\hat{\psi}(t) = -\gamma(t) \xi(y(t), t, \omega) + \sum_{i=1}^N \mu_i(t) dw_i(t) + \sum_{i=1}^M \tilde{\mu}_i(t) d\tilde{w}_i(t),$$

где $\mu_i(t)$ и $\tilde{\mu}_i(t)$ — некоторые L_2 -интегрируемые процессы, не зависящие от $w_j(r) - w_j(t)$ и от $\tilde{w}_k(r) - \tilde{w}_k(t)$ для всех $r > t$, j, k .

Пусть $\tau^{x,s} \triangleq \min \{t \leq T: y^{x,s}(t) \notin D\}$, где $y(t) = y^{x,s}(t)$ — решение уравнения (3.12). Имеем $\xi = g - P^*g \in \mathcal{C}^0$ и

$$\begin{aligned}
 p(x, s, \omega) &= -\mathbf{E} \left\{ (p(y(\tau^{x,s}), \tau^{x,s}, \omega) - p(x, s, \omega)) \mid \mathcal{F}_s \right\} \\
 &= \mathbf{E} \left\{ \int_s^{\tau^{x,s}} \gamma(t) \xi(y(t), t, \omega) dt \mid \mathcal{F}_s \right\}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $p(x, s, \omega) \geq 0$ почти всюду.

2. Докажем (а) для случая a, f, λ, β_i и ξ общего вида. Фиксируем $l > n/2 + n + 3$.

Введем множество $\mathcal{X} \triangleq \{\xi \in \mathcal{X}^{-1}: \xi = g - P^*g, g \in \mathcal{H}^l \cap X^0\}$. Докажем, что множество $\mathcal{X}$ плотно в X^{-1} . Пусть $\varepsilon > 0$ и $\xi \in X^{-1}$ произвольные. Требуется найти $\xi_0 \in \mathcal{X}$ такое, что $\|\xi - \xi_0\|_{X^{-1}} \leq \varepsilon$.

Норма $\|I - P^*\|$ оператора $I - P^*: X^{-1} \rightarrow X^{-1}$ не равна нулю, так как оператор не нулевой. Значит, для $g \triangleq (I - P^*)^{-1}\xi$ существует такое $g' \in \mathcal{H}^l \cap X^0$, что $\|g' - g\|_{X^{-1}} \leq \varepsilon \|I - P^*\|^{-1}$. Отсюда получаем, что $\xi_0 \triangleq g' - P^*g'$ — искомое, так как

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^{-1}} \leq \|g - g'\|_{X^{-1}} \|I - P^*\| \leq \varepsilon.$$

Значит, вложение $\mathcal{X} \subset X^{-1}$ плотно.

Для $\varepsilon > 0$ введем функции $a_\varepsilon(x, t, \omega) \in \mathcal{H}^l \cap \mathcal{C}^0$, $f_\varepsilon(x, t, \omega) \in \mathcal{H}^l \cap \mathcal{C}^0$, $\beta_{\varepsilon,i}(x, t, \omega) \in \mathcal{H}^l \cap \mathcal{C}^0$, $\lambda_\varepsilon(x, t, \omega) \in \mathcal{H}^l \cap \mathcal{C}^0$, $g_\varepsilon \in \mathcal{H}^l \cap X^0$ и $\xi_\varepsilon \in \mathcal{X}$, $\xi_\varepsilon \triangleq Rg_\varepsilon$, такие, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x, t, \omega) &\longrightarrow f(x, u(x, t), t, \omega) \quad \text{и} \quad \lambda_\varepsilon(x, t, \omega) \longrightarrow \lambda(x, u(x, t), t, \omega) \quad \text{в } X^0, \\ a_\varepsilon(x, t, \omega) &\longrightarrow a(x, t, \omega) \quad \text{и} \quad \beta_{\varepsilon,i}(x, t, \omega) \longrightarrow \beta_i(x, t, \omega) \quad \text{в } \mathcal{W}_\infty^2, \\ \xi_\varepsilon &\longrightarrow \xi \quad \text{в } X^{-1}. \end{aligned}$$

Достаточно показать, что для любого $\eta \in X^0$

$$J_\varepsilon \triangleq (p_\varepsilon - p, \eta)_{X^0} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

Здесь $p \triangleq L(u(\cdot))^*\xi$, $p_\varepsilon \triangleq L_\varepsilon(u(\cdot))^*\xi_\varepsilon$, где оператор $L_\varepsilon(u(\cdot))^*: X^{-1} \rightarrow Y^1$ определен аналогично оператору $L(u(\cdot))^*: X^{-1} \rightarrow Y^1$ при подстановке $a = a_\varepsilon$, $f = f_\varepsilon$, $\lambda = \lambda_\varepsilon$, $\beta_i = \beta_{\varepsilon,i}$.

Введем функции $V_\varepsilon \triangleq L_\varepsilon(u(\cdot))\eta$, $V \triangleq L(u(\cdot))\eta$, где оператор $L_\varepsilon(u(\cdot))^*: X^{-1} \rightarrow Y^1$ определен аналогично оператору $L(u(\cdot))^*: X^{-1} \rightarrow Y^1$ при подстановке $a = a_\varepsilon$, $f = f_\varepsilon$, $\lambda = \lambda_\varepsilon$, $\beta_i = \beta_{\varepsilon,i}$. Имеем

$$J_\varepsilon = J'_\varepsilon + J''_\varepsilon, \quad \text{где} \quad J'_\varepsilon \triangleq (V_\varepsilon - V, \xi)_{X^0}, \quad J''_\varepsilon \triangleq (L_\varepsilon(u(\cdot))^*(\xi_\varepsilon - \xi), \eta)_{X^0}.$$

Введем функции $\hat{f}_\varepsilon(x, t, \omega) \triangleq f_\varepsilon(x, t, \omega) - f(x, u(x, t, \omega), t, \omega)$, $\hat{\lambda}_\varepsilon(x, t, \omega) \triangleq \lambda_\varepsilon(x, t, \omega) - \lambda(x, u(x, t, \omega), t, \omega)$, $\hat{a}_\varepsilon \triangleq a_\varepsilon - a$, $\hat{\beta}_{i,\varepsilon} \triangleq \beta_{i,\varepsilon} - \beta_i$. Функция $W_\varepsilon \triangleq V_\varepsilon - V$ является решением в Q краевой задачи

$$d_t W_\varepsilon = (A_\varepsilon W_\varepsilon + \eta_{0,\varepsilon}) dt + \sum_{i=1}^N (B_i W_\varepsilon + \eta_{i,\varepsilon}) dw_i(t),$$

$$W_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad W_\varepsilon(x, t)|_{x \in \partial D} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{i,\varepsilon} &\triangleq \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\beta}_{i,\varepsilon}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \eta_{0,\varepsilon} \triangleq r_\varepsilon + q_\varepsilon, \\ r_\varepsilon &\triangleq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \hat{a}_{\varepsilon ij}, \quad q_\varepsilon \triangleq \frac{\partial V}{\partial x} \hat{f}_\varepsilon + V \hat{\lambda}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$|J'_\varepsilon| \leq C \|W_\varepsilon\|_{X^0} \|\xi\|_{X^0} \leq C \left(\|\eta_{0,\varepsilon}\|_{X^{-1}} + \sum_{i=1}^N \|\eta_{i,\varepsilon}\|_{X^{-1}} \right) \|\xi\|_{X^0}$$

для постоянной $C > 0$. Функции f_ε и λ_ε ограничены, следовательно,

$$|q_\varepsilon(x, t, \omega)| \leq C_1 \left(\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, t, \omega) \right| + |V(x, t, \omega)| \right)$$

для некоторой константы $C_1 > 0$. Из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что $\|q_\varepsilon\|_{X^0} \rightarrow 0$. Далее, $\|r_\varepsilon\|_{X^{-1}} \leq C_2 \|V\|_{Y^1} \|\hat{a}\|_{\mathcal{W}_\infty^2} \rightarrow 0$ для некоторой константы $C_2 > 0$, и $\|\eta_{i,\varepsilon}\|_{X^0} \leq C_3 \|V\|_{Y^1} \|\hat{\beta}_i\|_{\mathcal{W}_\infty^1} \rightarrow 0$ для некоторой константы $C_3 > 0$ и $i = 1, \dots, N$. По теореме 3.1, выполнено $J'_\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того,

$$|J''_\varepsilon| \leq \|\xi - \xi_\varepsilon\|_{X^{-1}} \|V_\varepsilon\|_{X^1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда следует (3.13) и утверждение (а) теоремы 3.3 (относительно неотрицательности p). В качестве следствия получаем, что функция $V \triangleq L(u(\cdot))\eta$ неотрицательна для любого неотрицательного $\eta \in X^0$, поскольку $(\eta, p)_{X^0} = (L(u(\cdot)), \xi)_{X^0}$.

3. Докажем утверждение (б). Пусть $\xi(x, t, \omega) > 0$ для п.в. x, t, ω и при этом существует неотрицательная функция $\eta \in X^0$ такая, что $(\eta, p)_{X^0} = 0$. Пусть $V \triangleq L(u(\cdot))\eta$. Имеем $(V, \xi)_{X^0} = (\eta, p)_{X^0} = 0$. Выше было показано, что функция V неотрицательна, значит, $V = 0$. Из определения $L(u(\cdot))$ и вида уравнения (3.1) получаем, что в этом случае $\eta = 0$. Таким образом, $p(x, t, \omega) > 0$ для п.в. x, t, ω . Теорема 3.3 доказана.

4. Вспомогательная задача оптимального управления

Далее элементы $u(\cdot) \in U_R$ будем называть управлениями. Пусть $\zeta \in X^{-1}$ задано, и пусть $\eta_{u(\cdot)} \triangleq \zeta + \varphi(\cdot, u(\cdot), \cdot)$ — соответствующий элемент пространства X^{-1} , заданный для каждого $u(\cdot) \in U_R$. Положим

$$\Phi(u(\cdot), \xi) \triangleq (V, \xi)_{X^0} \triangleq \mathbf{E} \int_Q V(x, t, \omega) \xi(x, t, \omega) dx dt = (p_{u(\cdot)}, \eta_{u(\cdot)})_{X^0},$$

где $V \triangleq L(u(\cdot))\eta_{u(\cdot)}$ и $p_{u(\cdot)} \triangleq L(u(\cdot))^*\xi$.

Введем вспомогательную задачу оптимального управления

$$\Phi(u(\cdot), \xi) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in U_R}. \quad (4.1)$$

Для удобства введем функционал $F(u(\cdot)) = \Phi(u(\cdot), \xi)$, где $\xi(x, t, \omega) \equiv 1$.

4.1. Необходимые условия оптимальности.

Лемма 4.1. Пусть $\xi \equiv 1$, и пусть $\hat{u}(\cdot) \in U_R$ является оптимальным управлением для задачи (4.1). Пусть $\hat{V} \triangleq L(\hat{u}(\cdot))\eta_{\hat{u}(\cdot)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) + \varphi(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \\ \leq \mathcal{A}(x, v, t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) + \varphi(x, v, t, \omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

для п.в. x, t, ω для всех $v \in \Delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим произвольное $\mu(\cdot) \in U_R$. Для $\varepsilon \in [0, 1]$ введем функции

$$u_\varepsilon(\cdot) \triangleq (1 - \varepsilon) \hat{u}(\cdot) + \varepsilon \mu(\cdot).$$

Здесь под суммой подразумевается сумма двух элементов линейного пространства $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; L^\infty(Q, \overline{\mathcal{B}}_{n+1}, \ell_{n+1}; C^*(\Delta)))$. Так как множества Δ_R и U_R выпуклы, то $u_\varepsilon \in U_R$ ($\forall \varepsilon, \mu$).

Введем операторы $A_\varepsilon(x, t) = A_\varepsilon(x, t, \omega) \triangleq A(x, u_\varepsilon(x, t, \omega), t, \omega)$, $\hat{A}(x, t) = \hat{A}(x, t, \omega) \triangleq A(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega)$. Пусть $V_\varepsilon \triangleq L(u_\varepsilon(\cdot)) \eta_{u_\varepsilon(\cdot)}$ — соответствующее $u(\cdot) = u_\varepsilon(\cdot)$ решение задачи (3.1). Обозначим $\hat{p} \triangleq L(\hat{u}(\cdot))^* \xi$ и $\varphi_\varepsilon(x, t) = \varphi_\varepsilon(x, t, \omega) \triangleq \varphi(x, u_\varepsilon(x, t, \omega), t, \omega)$.

Следующее предложение является обобщением результата, полученного в [10] для детерминированных параболических уравнений.

Предложение 4.1. Для любых $u_\varepsilon(\cdot) \in U_R$ и $\hat{u}(\cdot) \in U_R$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} F(u_\varepsilon(\cdot)) - F(\hat{u}(\cdot)) &= \mathbf{E} \int_Q \hat{p}(x, t) \left[(A_\varepsilon(x, t) - \hat{A}(x, t)) \hat{V}(x, t) \right. \\ &\quad \left. + \varphi(x, u_\varepsilon(x, t), t) - \varphi(x, \hat{u}(x, t), t) \right] dx dt \\ &\quad + \mathbf{E} \int_Q \hat{p}(x, t) (A_\varepsilon(x, t) - \hat{A}(x, t)) (V_\varepsilon(x, t) - \hat{V}(x, t)) dx dt. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения V_ε , $\hat{p}$ и операторов $L(u(\cdot))$, $L(u(\cdot))^*$, а также из теоремы 3.2 следует, что

$$d_t V_\varepsilon = \mathcal{J}(V_\varepsilon) dt + \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i(V_\varepsilon) dw_i(t), \quad d_t \hat{p} = \mathcal{J}(\hat{p}) dt + \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i(\hat{p}) dw_i(t),$$

где $\mathcal{J}(V_\varepsilon) \triangleq A_\varepsilon V_\varepsilon + \varphi_\varepsilon + \zeta \in X^{-1}$, $\mathcal{M}_i(V_\varepsilon) \triangleq B_i V_\varepsilon \in X^0$,

$$\mathcal{J}(\hat{p}) \triangleq -\hat{A}^* \hat{p} - \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i(\hat{p}) - \xi \in X^{-1},$$

и где $\mathcal{M}_i(\hat{p})$ — некоторые элементы X^0 .

Имеем $V_\varepsilon|_{t=0} = 0$, $\hat{p}|_{t=T} = 0$. Значит,

$$\begin{aligned} &(\mathcal{J}(V_\varepsilon), \hat{p})_{X^0} + (V_\varepsilon, \mathcal{J}(\hat{p}))_{X^0} + \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}_i(V_\varepsilon), \mathcal{M}_i(\hat{p}))_{X^0} \\ &= \mathbf{E}(V_\varepsilon(\cdot, T), \hat{p}(\cdot, T))_{H^0} - \mathbf{E}(V_\varepsilon(\cdot, 0), \hat{p}(\cdot, 0))_{H^0} = 0. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} F(u_\varepsilon(\cdot)) - F(\hat{u}(\cdot)) &= (V_\varepsilon, \xi)_{X^0} - (\hat{V}, \xi)_{X^0} = (V_\varepsilon, \xi)_{X^0} - (\hat{\varphi}, \hat{p})_{X^0} - (\zeta, \hat{p})_{X^0} \\ &= (\mathcal{J}(V_\varepsilon), \hat{p})_{X^0} + (V_\varepsilon, \mathcal{J}(\hat{p}))_{X^0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}_i(V_\varepsilon), \mathcal{M}_i(\hat{p}))_{X^0} + (V_\varepsilon, \xi)_{X^0} - (\hat{\varphi}, \hat{p})_{X^0} - (\zeta, \hat{p})_{X^0} \\
& = (A_\varepsilon V_\varepsilon + \varphi_\varepsilon, \hat{p})_{X^0} + \left(V_\varepsilon, -\hat{A}^* \hat{p} - \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i(\hat{p}) \right)_{X^0} \\
& \quad + \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}_i(V_\varepsilon), \mathcal{M}_i(\hat{p}))_{X^0} - (\hat{\varphi}, \hat{p})_{X^0} \\
& = (A_\varepsilon V_\varepsilon, \hat{p})_{X^0} + (V_\varepsilon, -\hat{A}^* \hat{p})_{X^0} + (\varphi_\varepsilon - \hat{\varphi}, \hat{p})_{X^0} \\
& = (A_\varepsilon \hat{V}, \hat{p})_{X^0} - (\hat{A} \hat{V}, \hat{p})_{X^0} + ((A_\varepsilon - \hat{A})(V_\varepsilon - \hat{V}), \hat{p})_{X^0}.
\end{aligned}$$

Предложение 4.1 доказано.

Предложение 4.2. *Существует предел*

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(u_\varepsilon(\cdot)) - F(\hat{u}(\cdot))}{\varepsilon} &= \mathbf{E} \int_Q \hat{p}(x, t, \omega) \left\{ A(x, \mu(x, t, \omega), t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) \right. \\
&\quad + \varphi(x, \mu(x, t, \omega), t, \omega) - \mathcal{A}(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) \\
&\quad \left. - \varphi(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \right\} dx dt. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения функции $u_\varepsilon(\cdot)$ видно, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} \left((A_\varepsilon - \hat{A}) V + \varphi_\varepsilon - \hat{\varphi} \right) &= A(x, \mu(x, t, \omega), t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) \\
&\quad + \varphi(x, \mu(x, t, \omega), t, \omega) - \mathcal{A}(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) \\
&\quad - \varphi(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega).
\end{aligned}$$

Значит, первый член в правой части (4.3) совпадает с правой частью (4.4), деленной на ε , для всех $\varepsilon \in (0, 1]$. Введем функции $W_\varepsilon \triangleq V_\varepsilon - \hat{V}$. Достаточно показать, что

$$J_\varepsilon \triangleq \varepsilon^{-1} ((A_\varepsilon - \hat{A}) W_\varepsilon, \hat{p})_{X^0} \longrightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Введем функции

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_\varepsilon(x, t) &\triangleq \varphi(x, u_\varepsilon(x, t), t) - \varphi(x, \hat{u}(x, t), t) \\
&= \varepsilon [\varphi(x, \mu(x, t), t) - \varphi(x, \hat{u}(x, t), t)], \\
\hat{f}_\varepsilon(x, t) &\triangleq f(x, u_\varepsilon(x, t), t) - f(x, \hat{u}(x, t), t) \\
&= \varepsilon [f(x, \mu(x, t), t) - f(x, \hat{u}(x, t), t)], \\
\hat{\lambda}_\varepsilon(x, t) &\triangleq \lambda(x, u_\varepsilon(x, t), t) - \lambda(x, \hat{u}(x, t), t) \\
&= \varepsilon [\lambda(x, \mu(x, t), t) - \lambda(x, \hat{u}(x, t), t)].
\end{aligned}$$

Функция W_ε удовлетворяет в Q краевой задаче

$$d_t W_\varepsilon = (A_\varepsilon W_\varepsilon + \eta_\varepsilon) dt + \sum_{i=1}^N B_i W_\varepsilon dw_i(t),$$

$$W_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad W_\varepsilon(x, t)|_{x \in \partial D} = 0,$$

где $\eta_\varepsilon \triangleq -\widehat{\varphi}_\varepsilon + (\partial \widehat{V} / \partial x) \widehat{f}_\varepsilon - \widehat{V} \widehat{\lambda}_\varepsilon$. Имеем

$$|J_\varepsilon| \leq C \|W_\varepsilon\|_{X^1} \|\widehat{p}\|_{Y^1} \leq C \|\eta_\varepsilon\|_{X^0} \|\xi\|_{X^{-1}}$$

для некоторой константы $C > 0$. Ввиду ограниченности функций f, λ

$$|\xi_\varepsilon(x, t, \omega)| \leq \varepsilon C_1 \left(\left| \frac{\partial \widehat{V}}{\partial x}(x, t, \omega) \right| + |\widehat{V}(x, t, \omega)| + \sup_{v \in \Delta} |\varphi(x, v, t, \omega)| \right),$$

где $C_1 > 0$ — некоторая константа. По выбору $u_\varepsilon(\cdot)$ и из типа сходимости $u_\varepsilon(\cdot) \rightarrow \widehat{u}(\cdot)$ имеем $\|\eta_\varepsilon\|_{X^0} \leq \varepsilon \text{const} \|\widehat{V}\|_{\mathcal{D}^1}$. Предложение 4.2 доказано.

Из оптимальности $\widehat{u}(\cdot)$ и предложения 4.2 следует, что выражение (4.4) неотрицательно для всех $\mu(\cdot) \in U_R$ вида

$$\mu(x, t, \omega) = \begin{cases} \widehat{u}(x, t, \omega) & \text{при } (x, t, \omega) \notin S, \\ v & \text{при } (x, t, \omega) \in S \end{cases}$$

для каждого $v \in \Delta$ и каждого $S \in \mathcal{B}_n \times \mathcal{P}$ такого, что $S \subset D \times (0, T) \times \Omega$. (Как обычно, $v \in \Delta$ интерпретируется как мера Дирака, так что $\Delta \subset \Delta_R$.) Отсюда следует, что для любого $v \in \Delta$ выполнено

$$\begin{aligned} & \widehat{p}(x, t, \omega) \left\{ \mathcal{A}(x, \widehat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \widehat{V}(x, t, \omega) + \varphi(x, \widehat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \right\} \\ & \leq \widehat{p}(x, t) \left\{ \mathcal{A}(x, v, t) \widehat{V}(x, t) + \varphi(x, v, t) \right\} \quad \text{для п.в. } x, t, \omega. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Выберем некоторое счетное всюду плотное подмножество Δ' множества Δ . Для любого $v \in \Delta$ обозначим $\Theta(v)$ множество всех таких (x, t, ω) , что выполнено (4.5). Множество $\bigcap_{v \in \Delta'} \Theta(v)$ является множеством полной меры $\ell_{n+1} \times \mathbf{P}$, или, иными словами,

$$(\ell_{n+1} \times \mathbf{P}) \left(\bigcap_{v \in \Delta'} \Theta(v) \right) = \ell_{n+1}(Q).$$

По теореме 3.3, $\widehat{p}(x, t, \omega) > 0$ для п.в. x, t, ω . Таким образом, неравенство (4.5) выполнено для любого $(x, t, \omega) \in \bigcup_{v \in \Delta'} \Theta(v)$ для всех $v \in \Delta$, ввиду непрерывности функций $f(x, v, t, \omega)$, $\lambda(x, v, t, \omega)$ и $\varphi(x, v, t, \omega)$ по $v \in \Delta$.

Из (4.5) и теоремы 3.3 следует (4.2). Лемма 4.1 доказана.

4.2. Разрешимость задачи управления.

Лемма 4.2. Пусть $\xi \equiv 1$. Тогда для задачи (4.1) существует оптимальное управление $u(\cdot) \in U_0$.

Доказательство. Напомним, что, по теореме 3.3, неравенство $\widehat{p}(x, t, \omega) > 0$ справедливо для п.в. x, t, ω . Для дальнейшего потребуется следующее предложение.

Предложение 4.3. Пусть $\xi \equiv 1$, $u_i(\cdot) \in U_R$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$. Пусть

$$p_i(x, t) \triangleq L(u_i(\cdot))^* \xi, \quad \widehat{p}(x, t) \triangleq \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i(x, t), \quad p_{\tilde{u}(\cdot)} \triangleq L(\tilde{u}(\cdot))^* \xi,$$

где $\tilde{u}(x, t) \triangleq \widehat{p}(x, t)^{-1} \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i(x, t) u_i(x, t)$. Тогда $\tilde{u} \in U_R$, $p_{\tilde{u}} = \widehat{p}$ и

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i F(u_i(\cdot)) = F(\tilde{u}(\cdot)).$$

Доказательство. Очевидно, функции $f(x, u, t)$, $\lambda(x, u, t)$ и $\varphi(x, u, t)$ линейны по $u \in U_R$. Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i F(u_i(\cdot)) &= \mathbf{E} \int_Q \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i(x, t) \varphi(x, u_i(x, t), t) dx dt \\ &= \mathbf{E} \int_Q \widehat{p}(x, t) \varphi(x, \tilde{u}(x, t), t) dx dt. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно показать, что $p_{\tilde{u}(\cdot)} = \widehat{p}$. Из линейности $f(x, u, t)$ по $u \in U_R$ следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i(x, t) f(x, u_i(x, t), t) &= \left\langle f(x, \cdot, t), \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i(x, t) u_i(x, t) \right\rangle \\ &= \langle f(x, \cdot, t), \tilde{u}(x, t) \rangle \widehat{p}(x, t) = f(x, \tilde{u}(x, t), t) \widehat{p}(x, t). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, используя линейность $\lambda(x, u, t)$ по $u \in U_R$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i A(\cdot, u_i(\cdot)^*, \cdot) p_{u_i(\cdot)}(\cdot, \cdot) = A(\cdot, \tilde{u}(\cdot), \cdot)^* \widehat{p}(\cdot, \cdot)$$

(здесь подразумеваем равенство в пространстве X^{-1}). Из (3.3) следует, что $p_{\tilde{u}(\cdot)} = \widehat{p}$. Предложение 4.3 доказано.

Продолжим доказательство леммы 4.2. Обозначим

$$J \triangleq \inf_{u(\cdot) \in U_R} F(u(\cdot)).$$

По определению инфимума, существует последовательность $u_i(\cdot) \in U_R$, $i = 1, 2, \dots$, такая, что $F(u_i(\cdot)) \rightarrow J$ при $i \rightarrow +\infty$. Пусть $\bar{p}_i(x, t) \triangleq L(u_i(\cdot))^* \xi$. Перейдя к подпоследовательности, получаем, что существует $\widehat{p}(\cdot) \in X^0$ такое, что $\bar{p}_i(\cdot) \rightarrow \widehat{p}(\cdot)$ при $i \rightarrow +\infty$ слабо в X^0 . Из теоремы

Мазура [12, гл. 5.1] получаем, что существует последовательность выпуклых комбинаций

$$p_i(\cdot) \triangleq \sum_{j=1}^i \alpha_j \bar{p}_j(\cdot), \quad \alpha_j = \alpha_j(i), \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^i \alpha_j = 1,$$

такая, что $p_i(\cdot) \rightarrow \hat{p}(\cdot)$ в X^0 . По предложению 4.3, для любого $p_i(x, t, \omega)$, существует такое $v_i(\cdot) \in U_R$, что $p_i = L(v_i(\cdot))^* \xi$, и $F(v_i(\cdot)) = \sum_{j=1}^i \alpha_j F(u_j(\cdot)) \rightarrow J$ при $i \rightarrow +\infty$. Множество U_R является компактом в U_R^w . Выбирая подпоследовательность, получаем, что существует такое $\hat{u}(\cdot)$, что $v_i(\cdot) \rightarrow \hat{u}(\cdot)$ при $i \rightarrow +\infty$ в топологии U_R^w . Имеем $p_i(x, t) \lambda(x, v_i(x, t), t) \rightarrow \hat{p}(x, t) \lambda(x, \hat{u}(x, t), t)$ в слабой топологии X^0 , $p_i(x, t) f(x, v_i(x, t), t) \rightarrow \hat{p}(x, t) f(x, \hat{u}(x, t), t)$ в слабой топологии X^0 и $A(x, v_i(x, t), t)^* p_i(x, t) \rightarrow A(x, \hat{u}(x, t), t)^* \hat{p}(x, t)$ в слабой топологии X^{-1} . Значит, $\hat{p} = L(\hat{u}(\cdot))^* \xi$. Далее,

$$\begin{aligned} F(v_i(\cdot)) - F(\hat{u}(\cdot)) &= \int_Q (p_i(x, t) \varphi(x, v_i(x, t), t) - \\ &\quad - \hat{p}(x, t) \varphi(x, \hat{u}(x, t), t)) dx dt \\ &= \int_Q (\hat{p}(x, t) \varphi(x, v_i(x, t), t) - \hat{p}(x, t) \varphi(x, \hat{u}(x, t), t)) dx dt \\ &\quad + \int_Q (p_i(x, t) \varphi(x, v_i(x, t), t) - \hat{p}(x, t) \varphi(x, v_i(x, t), t)) dx dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $i \rightarrow +\infty$. Значит, для $\hat{u}(\cdot)$ выполнено $F(\hat{u}(\cdot)) = J$, и $\hat{u}(\cdot) \in U_R$ является оптимальным для задачи (4.1).

Далее заметим, что можно выбрать $\bar{u}(\cdot) \in U_0$ такое, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, \bar{u}(x, t, \omega), t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) + \varphi(x, \bar{u}(x, t, \omega), t, \omega) \\ = \mathcal{A}(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) + \varphi(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \end{aligned}$$

для п.в. x, t, ω . Зададим $\bar{V} \triangleq L(\bar{u}(\cdot)) \eta_{\bar{u}(\cdot)}$. Из определений $L(u(\cdot))$, $\eta_{u(\cdot)}$ следует, что $\bar{V} = \hat{V}$. Значит, $F(\bar{u}(\cdot)) = F(\hat{u}(\cdot)) = J$. Лемма 4.2 доказана.

4.3. Достаточное условие оптимальности.

Лемма 4.3. Пусть $\hat{u}(\cdot) \in U_0$ таково, что для $\hat{V} = L(\hat{u}(\cdot)) \eta_{\hat{u}(\cdot)}$ выполнено (4.2). Пусть $\xi \in X^0$ таково, что $\xi(x, t, \omega) \geq 0$ п.в. Тогда

$$\Phi(\hat{u}(\cdot), \xi) \leq \Phi(u(\cdot), \xi) \quad \forall u(\cdot) \in U_R.$$

Доказательство. Пусть $\bar{\xi} \equiv 1$. По лемме 4.2, существует оптимальное управление $\bar{u}(\cdot)$ для задачи

$$\Phi(u(\cdot), \bar{\xi}) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in U_R}.$$

Обозначим $\bar{p}(x, t) \triangleq L(\bar{u}(\cdot))^* \bar{\xi}$. Введем операторы $\hat{A}$ и $\bar{A}$, соответствующие подстановке $u = \hat{u}$, $u = \bar{u}$, $\hat{\varphi}(x, t) = \varphi(x, \hat{u}(x, t), t)$, $\bar{\varphi}(x, t) =$

$\varphi(x, \bar{u}(x, t), t)$ и $\hat{V} = L(\hat{u}(\cdot)) \eta_{\hat{u}(\cdot)}$. Из определения $\hat{V}$, $\bar{p}$ и операторов $L(u(\cdot))$, $L(u(\cdot))^*$ следует, что

$$d_t \hat{V} = \mathcal{J}(\hat{V}) dt + \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i(\hat{V}) dw_i(t), \quad d_t \bar{p} = \mathcal{J}(\bar{p}) dt + \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i(\bar{p}) dw_i(t),$$

где $\mathcal{J}(\hat{V}) \triangleq \hat{A}\hat{V} + \hat{\varphi} + \zeta \in X^{-1}$, $\mathcal{M}_i(\hat{V}) \triangleq B_i \hat{V} \in X^0$,

$$\mathcal{J}(\bar{p}) \triangleq -\bar{A}^* \bar{p} - \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i(\bar{p}) - \xi \in X^{-1},$$

и где $\mathcal{M}_i(\bar{p})$ — некоторые элементы X^0 .

Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}(\hat{V}(\cdot, T), \hat{p}(\cdot, T))_{H^0} - \mathbf{E}(\hat{V}(\cdot, 0), \hat{p}(\cdot, 0))_{H^0} \\ &= (\mathcal{J}(\hat{V}), \bar{p})_{X^0} + (\hat{V}, \mathcal{J}(\bar{p}))_{X^0} + \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i(\hat{V}) \mathcal{M}_i(\bar{p}) \\ &= (\hat{A}\hat{V} + \hat{\varphi} + \zeta, \bar{p})_{X^0} + \left(\hat{V}, -\bar{A}^* \bar{p} - \sum_{i=1}^N B_i^* \mathcal{M}_i(\bar{p}) - \xi \right)_{X^0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N (B_i \hat{V}, \mathcal{M}_i(\bar{p}))_{X^0} \\ &= (\hat{A}\hat{V} + \hat{\varphi} + \zeta - \bar{A}\hat{V}, \bar{p})_{X^0} - (\hat{V}, \xi)_{X^0} \leq (\bar{\varphi} + \zeta, \bar{p})_{X^0} - (\hat{V}, \xi)_{X^0} \end{aligned}$$

ввиду (4.2). Далее,

$$\Phi(\bar{u}(\cdot), \bar{\xi}) = (\bar{V}, \bar{\xi})_{X^0} = (\bar{\varphi} + \zeta, \bar{p})_{X^0}, \quad \Phi(\hat{u}(\cdot), \bar{\xi}) = (\hat{V}, \bar{\xi})_{X^0}.$$

Таким образом, $\Phi(\hat{u}(\cdot), \bar{\xi}) \leq \Phi(\bar{u}(\cdot), \bar{\xi})$. Лемма 4.3 доказана.

5. Основной результат

Теорема 5.1. (а) Пусть $\hat{u}(\cdot) \in U_0$ — любое оптимальное решение задачи (4.1), где $\xi \equiv 1$. Тогда для $\hat{V} = L(\hat{u}(\cdot)) \eta_{\hat{u}(\cdot)}$ выполнено (4.2) для п.в. x, t, ω для всех $v \in \Delta$; это V и будет решением (1.1).

(б) Задача (1.1) однозначно разрешима в классе Y^1 .

Доказательство. (а) По лемме 4.2, требуемое $u(\cdot)$ существует. Напомним, что уравнение $\hat{V} = L(\hat{u}(\cdot)) \eta_{\hat{u}(\cdot)}$ означает по определению, что $\hat{V}$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} d_t \hat{V}(x, t, \omega) &= \left(\mathcal{A}(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) \right. \\ &\quad \left. + \varphi(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) + \zeta(x, t, \omega) \right) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^N B_i(x, t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) dw_i(t), \\ \hat{V}(x, 0, \omega) &= 0, \quad \hat{V}(x, t, \omega)|_{x \in \partial D} = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Неравенство (4.2) выполнено по лемме 4.1 и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) + \varphi(x, \hat{u}(x, t, \omega), t, \omega) \\ \leq \mathcal{A}(x, v, t, \omega) \hat{V}(x, t, \omega) + \varphi(x, v, t, \omega). \end{aligned}$$

Раскрыв выражение для оператора $\mathcal{A}$, получаем, что $\hat{V}$ является решением задачи (1.1).

(б) Существование решения следует из (а). По лемме 4.3, $\hat{V} = L(\hat{u}(\cdot)) \eta_{\hat{u}(\cdot)}$ является точкой минимума функционала $(\xi, \hat{V})_{X^0}$ для любого $\xi \in X^0$. Отсюда следует однозначность решения (1.1). Теорема доказана.

Автор благодарит д-ра Б. Голдиса за полезные консультации и плодотворную дискуссию, а также рецензента за комментарии, которые способствовали улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розовский Б. Л. Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов. М.: Наука, 1983, 208 с.
2. Chojnowska-Michalik A., Goldys B. Existence, uniqueness and invariant measures for stochastic semilinear equations in Hilbert spaces. — Probab. Theory Relat. Fields, 1995, v. 102, № 3, p. 331–356.
3. Da Prato G., Tubaro L. Fully nonlinear stochastic partial differential equations. — SIAM J. Math. Anal., 1996, v. 27, № 1, p. 40–55.
4. Maslowski B. Stability of semilinear equations with boundary and pointwise noise. — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 1995, v. 22, № 1, p. 55–93.
5. Докучаев Н. Г. Краевые задачи для функционалов от процессов Ито. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 3, с. 464–481.
6. Докучаев Н. Г. Распределения процессов Ито: оценки для плотности и для условных ожиданий интегральных функционалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 4, с. 824–833.
7. Zhou X. Y. A duality analysis on stochastic partial differential equations. — J. Funct. Anal., 1992, v. 103, № 2, p. 275–293.
8. Peng S. Backward stochastic differential equations and applications to optimal control. — Appl. Math. Optim., 1993, v. 27, № 2, p. 125–144.
9. Dokuchaev N. G., Zhou X. Y. Stochastic controls with terminal contingent conditions. — J. Math. Anal. Appl., 1999, v. 238, № 1, p. 143–165.
10. Докучаев Н. Г. Управление диффузией кордесовского типа с неполным наблюдением и в игровой задаче. — Дифференциальные уравнения, 1996, т. 32, в. 8, с. 1051–1062.
11. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
12. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967, 624 с.

Поступила в редакцию
16.VIII.1999

Исправленный вариант
2.X.2000