Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Об асимптотике плотности безгранично делимого распределения на бесконечности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 80–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2995>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:50:07

© 2002 г.

ЯКЫМИВ А. Л.*

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПЛОТНОСТИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ¹⁾

В случае, когда плотность абсолютно непрерывной части меры Леви безгранично делимого распределения мажорируемо меняется на бесконечности, в статье изучены асимптотические свойства на бесконечности плотности этого распределения. Изложение ведется в терминах так называемой слабой эквивалентности функций, которая в случае слабо осциллирующей и, в частности, правильно меняющейся на бесконечности плотности безгранично делимого распределения совпадает с обычной эквивалентностью.

Ключевые слова и фразы: безгранично делимые распределения, спектральная мера Леви, плотность распределения, слабая эквивалентность функций, правильно меняющиеся функции, слабо осциллирующие функции, мажорируемо меняющиеся функции.

Асимптотика безгранично делимых распределений на бесконечности изучалась ранее в ряде работ [1]–[8], см. также ссылки в статье [1].

Хотя аналитическое строение безгранично делимых распределений было изучено еще в 1963 г. (см. [9]), асимптотика их плотности на бесконечности впервые была исследована лишь в 1990 г. [10].

В настоящей статье обобщается основной результат [10] в рассмотренном там случае неограниченной в окрестности нуля спектральной меры Леви безгранично делимого распределения. Исследован также и случай ограниченной меры Леви.

Основной результат в [10] был получен как следствие соответствующей интегральной предельной теоремы; здесь же доказательство опирается непосредственно на тауберovu теорему, приводимую ниже.

Перейдем к формулировкам полученных результатов.

Пусть случайная величина ξ имеет безгранично делимое распределение, т.е. для характеристической функции ξ справедливо представление:

$$\mathbb{E} e^{it\xi} = \exp \left(i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) G(dx) \right),$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия. e-mail: arsen@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00-15-96136, 00-01-00090).

где $G(dx)$ — ее спектральная мера Леви на $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (возможно, неограниченная в окрестности нуля), причем конечны интегралы

$$\int_{-1}^1 x^2 G(dx), \quad \int_{-\infty}^{-1} G(dx), \quad \int_1^{\infty} G(dx),$$

$\sigma \geq 0$, γ — некоторое действительное число, переменная $t \in (-\infty, \infty)$. Через $F(x)$ обозначим функцию распределения ξ : $F(x) = \mathbf{P}\{\xi \leq x\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Для двух функций $a(t)$ и $b(t)$, заданных и неотрицательных при $t \geq 0$, мы будем говорить, что $a(t)$ слабо эквивалентна $b(t)$ при $t \rightarrow \infty$, и писать $a(t) \overset{\text{сл.}}{\sim} b(t)$ ($t \rightarrow \infty$), если для произвольных $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$ найдется такое t_0 , что при $t \geq t_0$ выполнены неравенства

$$(1 - \varepsilon) b(t(1 + \delta)) \leq a(t) \leq (1 + \varepsilon) b(t(1 - \delta)).$$

О п р е д е л е н и е 2. Функция $a(t)$, заданная и неотрицательная при $t \geq 0$, называется слабо осциллирующей на бесконечности, если $a(\tau)/a(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, $\tau \geq t$, $\tau = t + o(t)$.

З а м е ч а н и е 1. Если одна из функций $a(t)$ или $b(t)$ слабо осциллирует на бесконечности, то из их слабой эквивалентности на бесконечности следует их обычная эквивалентность, т.е. $a(t)/b(t) \rightarrow 1$ ($t \rightarrow \infty$).

Здесь получены следующие две предельные теоремы.

Теорема 1. Пусть мера $G(dx)$ ограничена и обладает непрерывной на $[0, \infty)$ плотностью $g(x)$, существует $\alpha > 0$ такое, что функция $b(t) = tg(t)$ не возрастает при $t \geq \alpha$,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{g(2t)} < \infty, \quad (1)$$

т.е. $g(t)$ мажорируемо меняется на бесконечности (см. [13, с. 94]), и для произвольного $\lambda > 1$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{r(\lambda t)}{r(t)} < 1, \quad (2)$$

где $r(t) = \int_t^{\infty} g(y) dy$, $t > 0$. Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$f(t) \overset{\text{сл.}}{\sim} g(t), \quad (3)$$

где $f(t) = dF(t)/dt$, $t > 0$.

Теорема 2. Представим меру G в виде $G = G_A + G_B$, где G_A — ее абсолютно непрерывная часть, и пусть $g(t)$ — плотность меры G_A . Предположим, что для всех $n \in \mathbf{N}$

$$\int_1^{\infty} t^n G_B(dt) < \infty, \quad (4)$$

существуют $\varepsilon > 0$ и $\alpha > \varepsilon$ такие, что

$$g(t) \geq t^{-1} \quad \forall t \in (0, \varepsilon], \quad (5)$$

функция $b(t) = tg(t)$ монотонна и непрерывна при $t \geq \alpha$, выполнены соотношения (1) и (2). Тогда справедливо (3).

Теорема 2 обобщает основной результат работы [10] (в [10] предполагалось, что функция $g(t)$ слабо осциллирует на бесконечности).

Следствие. Пусть мера $G(dt)$ обладает непрерывной на $[0, \infty)$ плотностью $g(t)$, представимой в виде $g(t) = t^{-\beta}l(t)$, $\beta > 1$, где функция $l(t)$ медленно меняется на бесконечности и

$$l'(t) = o(l(t)t^{-1}) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Тогда $f(t) \sim g(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Аналогичное следствие справедливо и относительно теоремы 2.

Отметим, что для произвольной медленно меняющейся функции существует эквивалентная ей на бесконечности функция $l(t)$, для которой справедливо (6). Это следует из теоремы о представлении для медленно меняющихся функций [13, с. 10].

Преобразование Лапласа функции $a(t)$ будем обозначать через $\hat{a}(\lambda)$:

$$\hat{a}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} a(t) dt, \quad \lambda > 0.$$

Доказательство теорем 1, 2 опирается на следующую тауберову теорему.

Теорема 3. Пусть функции $a(t)$ и $b(t)$ измеримы и неотрицательны при $t \geq 0$, при $\lambda > 0$ у них существуют преобразования Лапласа $\hat{a}(\lambda)$ и $\hat{b}(\lambda)$, функция $b(t)$ для некоторого $\alpha \geq 0$ не возрастает при $t \geq \alpha$ и мажорируемо меняется на бесконечности:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{b(2t)} < \infty, \quad (7)$$

причем при $y \geq x$, $y = x + o(x)$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{a(y) - a(x)}{b(x)} \leq 0. \quad (8)$$

Если существует $M \in \mathbf{N}$ такое, что для произвольного фиксированного $n \geq M$ при $\lambda \rightarrow 0$

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{a}(\lambda) = (1 + o(1)) \frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{b}(\lambda), \quad (9)$$

то

$$a(t) \overset{\text{сн}}{\sim} b(t) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (10)$$

Первоначально докажем теорему 3, а затем выведем из нее теоремы 1, 2.

Доказательство теоремы 3. Так как функция $b(t)$ мажорируемо меняется на бесконечности (выполнено (7)), то по теореме п. 2 из [13] существует такое $M_1 \geq M$, что для любого фиксированного $n \geq M_1$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t u^n b(u) du}{t^{n+1} b(t)} < \infty. \quad (11)$$

Отсюда следует, что для таких n и произвольного $\lambda \in (0, 1)$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{B_n(\lambda t)}{B_n(t)} < 1, \quad (12)$$

где $B_n(t) = \int_0^t u^n b(u) du$. В самом деле, (12) эквивалентно соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{\lambda t}^t u^n b(u) du}{\int_0^t u^n b(u) du} > 0, \quad (13)$$

а из (11) в силу невозрастания $b(t)$ следует (13). Далее, согласно лемме 1 из [11], функция $B_n(t)$ слабо осциллирует на бесконечности (см. определение 2). Поэтому из теоремы 11 работы [12] и соотношения (9) следует, что для произвольного фиксированного $n \geq M$

$$A_n(t) = (1 + o(1)) B_n(t) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (14)$$

где $A_n(t) = \int_0^t u^n a(u) du$. Зафиксируем произвольное $\lambda \in (0, 1)$. Согласно (12), существуют такие $t_0, c_0 > 0$, что при $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_n(t) - A_n(\lambda t)}{B_n(t) - B_n(\lambda t)} - 1 \right| &\leq c_0 \left| \frac{A_n(t) - B_n(t) + B_n(\lambda t) - A_n(\lambda t)}{B_n(t)} \right| \\ &\leq c_0 \left| \frac{A_n(t)}{B_n(t)} - 1 \right| + c_0 \left| \frac{A_n(\lambda t)}{B_n(\lambda t)} - 1 \right| \frac{B_n(\lambda t)}{B_n(t)}. \end{aligned}$$

Последнее выражение есть $o(1)$ при $t \rightarrow \infty$ в силу (14). Стало быть, для произвольного фиксированного $\lambda \in (0, 1)$ при $t \rightarrow \infty$

$$\int_{\lambda t}^t u^n a(u) du = (1 + o(1)) \int_{\lambda t}^t u^n b(u) du. \quad (15)$$

Зафиксируем произвольные $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$. Согласно (7), существуют такие $x_0 \geq 2\alpha$ и $c > 0$, что при $x \geq x_0$

$$b(x) \leq cb(2x). \quad (16)$$

Положим

$$\varepsilon_1 = \min \left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{1+c} \right). \quad (17)$$

Из (8) следует, что найдутся такие $\delta_1 \in (0, \delta)$ и $x_1 \geq x_0$, что для произвольных $x \geq x_1$ и $y \in [x, x(1 + \delta_1)]$ выполнено неравенство

$$a(y) - a(x) \leq \varepsilon_1 b(x). \quad (18)$$

Из (15) следует, что при $x \rightarrow \infty$

$$\int_x^{x(1+\delta_1)} u^n a(u) du = (1 + o(1)) \int_x^{x(1+\delta_1)} u^n b(u) du. \quad (19)$$

Согласно (19), найдется такое $x_2 \geq x_1$, что для произвольных $x \geq x_2$

$$\int_x^{x(1+\delta_1)} y^n a(y) dy \geq (1 - \varepsilon_1) \int_x^{x(1+\delta_1)} y^n b(y) dy. \quad (20)$$

Из (18) и (20) следует, что при $x \geq x_2$

$$\begin{aligned} \int_x^{x(1+\delta_1)} (a(x) + \varepsilon_1 b(x)) y^n dy &\geq \int_x^{x(1+\delta_1)} y^n a(y) dy \\ &\geq (1 - \varepsilon_1) \int_x^{x(1+\delta_1)} y^n b(y) dy, \end{aligned}$$

или же

$$\begin{aligned} (a(x) + \varepsilon_1 b(x)) x^{n+1} \frac{(1 + \delta_1)^{n+1} - 1}{n + 1} \\ \geq (1 - \varepsilon_1) x^{n+1} \frac{(1 + \delta_1)^{n+1} - 1}{n + 1} b(x(1 + \delta_1)), \end{aligned}$$

откуда $a(x) + \varepsilon_1 b(x) \geq b(x(1 + \delta_1)) (1 - \varepsilon_1)$. В силу (16) и монотонности $b(x)$ из последнего неравенства следует, что при $x \geq x_2$

$$a(x) + c\varepsilon_1 b(x(1 + \delta_1)) \geq a(x) + \varepsilon_1 b(x) \geq (1 - \varepsilon_1) b(x(1 + \delta_1)),$$

откуда

$$a(x) \geq (1 - \varepsilon_1) b(x(1 + \delta_1)) - c\varepsilon_1 b(x(1 + \delta_1)),$$

или же

$$a(x) \geq (1 - (c + 1)\varepsilon_1) b(x(1 + \delta_1)), \quad x \geq x_2. \quad (21)$$

Согласно (8), существуют $\delta_2 \in (0, \delta)$, $\delta_2 \leq \frac{1}{2}$, и $x_3 \geq x_2$ такие, что для произвольных $y \geq x_3$ и $x \in [y, y(1 - \delta_2)^{-1}]$

$$a(x) - a(y) \leq \varepsilon_1 b(y),$$

или же

$$a(y) \geq a(x) - \varepsilon_1 b(y) \geq a(x) - \varepsilon_1 b(x(1 - \delta_2)). \quad (22)$$

В силу (15) существует $x_4 \geq x_3$ такое, что при $x \geq x_4$

$$\int_{x(1-\delta_2)}^x y^n a(y) dy \leq (1 + \varepsilon_1) \int_{x(1-\delta_2)}^x y^n b(y) dy. \quad (23)$$

Из (22) и (23) получаем, что при $x \geq x_4$

$$\begin{aligned} \int_{x(1-\delta_2)}^x y^n (a(x) - \varepsilon_1 b(x(1-\delta_2))) dy &\leq \int_{x(1-\delta_2)}^x y^n a(y) dy \\ &\leq (1 + \varepsilon_1) \int_{x(1-\delta_2)}^x y^n b(y) dy, \end{aligned}$$

откуда в силу монотонности $b(x)$

$$a(x) - \varepsilon_1 b(x(1-\delta_2)) \leq (1 + \varepsilon_1) b(x(1-\delta_2)),$$

или же

$$a(x) \leq (1 + 2\varepsilon_1) b(x(1-\delta_2)), \quad (24)$$

при $x \geq x_4$. Из соотношений (17), (21) и (24) следует, что при $x \geq x_4$

$$(1 - \varepsilon) b(x(1 + \delta_1)) \leq a(x) \leq (1 + \varepsilon) b(x(1 - \delta_2)). \quad (25)$$

Положим $x_5 = \max(x_4, \alpha/(1 - \delta))$. В силу монотонности $b(x)$ из (25) следует, что при $x \geq x_5$

$$(1 - \varepsilon) b(x(1 + \delta)) \leq a(x) \leq (1 + \varepsilon) b(x(1 - \delta)).$$

Теорема 3 доказана.

Используя теорему 3, докажем теперь теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Предположим первоначально, что $G((-\infty, 0)) = 0$. Точно так же, как и при доказательстве леммы 2 из работы [10], убеждаемся в том, что $F(t)$ дифференцируема при $t > 0$, причем выполнено соотношение

$$tf(t) = \int_0^t (t - y) g(t - y) dF(y) \quad (26)$$

для всех $t > 0$. При $\lambda \geq 0$ положим $\tilde{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t)$. Мы имеем:

$$\tilde{F}(\lambda) = \exp(-r(0)) + \hat{f}(\lambda) = \exp\left(-\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) g(t) dt\right). \quad (27)$$

Дифференцируя (27) n раз как сложную функцию, получаем, что

$$\hat{f}^{(n)}(\lambda) = \tilde{F}(\lambda) \sum_{i_1, \dots, i_n} C(i_1, \dots, i_n) \prod_{j=1}^n \left(\hat{g}^{(j)}(\lambda)\right)^{i_j}, \quad (28)$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам неотрицательных целых чисел $i_1, \dots, i_n$, удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^n j i_j = n$, а $C(i_1, \dots, i_n)$ — некоторые константы. Пусть $k \in \mathbf{N}$ таково, что

$$I_k = \int_0^\infty t^k g(t) dt = \infty.$$

Возьмем произвольное $n \geq k$. Тогда, согласно лемме 7 из [5], для всех $i_1, \dots, i_n$ таких, что $i_n = 0$, мы имеем:

$$\prod_{j=1}^n \left(\widehat{g}^{(j)}(\lambda) \right)^{i_j} = o \left(\left| \widehat{g}^{(n)}(\lambda) \right| \right) \quad (\lambda \rightarrow 0). \quad (29)$$

Так как $C(0, 0, \dots, 0, 1) = 1$, то из (28) с учетом (29) получаем, что

$$\widehat{f}^{(n)}(\lambda) = (1 + o(1)) \widehat{g}^{(n)}(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow 0). \quad (30)$$

Положим $a(t) = tf(t)$, $b(t) = tg(t)$, $t \geq 0$. Из (30) следует, что для всех $n \geq k-1$ выполнено соотношение (9) теоремы 3. Далее, соотношение (7) этой теоремы тривиальным образом следует из (1). Для того чтобы воспользоваться теоремой 3, остается доказать, что выполнено (8). Займемся этим. В терминах функций $a(t)$ и $b(t)$ соотношение (26) переписывается в виде

$$a(t) = \int_0^t b(t-u) dF(u). \quad (31)$$

Из (31) следует, что при $x \geq \alpha$ и $y \geq x$

$$\begin{aligned} a(y) - a(x) &= \int_0^x (b(y-u) - b(x-u)) dF(u) + \int_x^y b(y-u) dF(u) \\ &\leq \int_{x-\alpha}^x (b(y-u) - b(x-u)) dF(u) + \int_x^y b(y-u) dF(u). \end{aligned}$$

Поэтому

$$a(y) - a(x) \leq \int_{x-\alpha}^y b(y-u) dF(u) \leq \sup_{v \geq 0} b(v) \cdot (T(x-\alpha) - T(y)), \quad (32)$$

где $T(u) = 1 - F(u)$, $u \geq 0$. Заметим, что при $y \geq x \geq \alpha$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{r(x) - r(y)}{r(x)} = \frac{\int_x^y g(u) du}{\int_x^\infty g(u) du} \leq \frac{\int_x^y g(u) du}{\int_x^{2x} g(u) du} \\ &\leq \frac{g(x)(y-x)}{xg(2x)} = \left(\frac{y}{x} - 1 \right) \frac{g(x)}{g(2x)}. \end{aligned}$$

Последнее выражение есть $o(1) \cdot O(1) = o(1)$ при $x \rightarrow \infty$, $y = x + o(x)$ в силу (1) и монотонности $g(x)$. Стало быть, $r(x)$ слабо осциллирует на бесконечности. Поэтому, воспользовавшись следствием 1 из работы [5], отсюда получаем, что

$$T(x) = (1 + o(1)) r(x) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (33)$$

Заметим, что условие (2) равносильно соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{\lambda t} g(x) dx}{\int_t^\infty g(x) dx} > 0. \quad (34)$$

В свою очередь, (34) равносильно неравенству

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)}{\int_t^{\lambda t} g(x) dx} < \infty. \quad (35)$$

А соотношение (35) в силу мажорируемой изменчивости функции $g(x)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)}{tg(t)} < \infty. \quad (36)$$

Из (33) следует, что при $y \geq x$, $x \rightarrow \infty$, $y = x + o(x)$

$$\begin{aligned} T(x - \alpha) - T(y) &= (1 + o(1))r(y) - (1 + o(1))r(x - \alpha) \\ &= r(y) - r(x - \alpha) + o(r(x)) = o(r(x)) \end{aligned}$$

в силу слабой осцилляции $r(x)$, которая доказана ранее. Учитывая (36), отсюда получаем, что при $y \geq x$, $x \rightarrow \infty$, $y = x + o(x)$

$$T(x - \alpha) - T(y) = o(xg(x)). \quad (37)$$

Из соотношений (32) и (37) следует (8). Воспользовавшись тауберовой теоремой 3, получаем, что $a(t) \overset{\text{сл.}}{\sim} b(t)$ ($t \rightarrow \infty$), откуда следует, что $f(t) \overset{\text{сл.}}{\sim} g(t)$ ($t \rightarrow \infty$). Таким образом, в рассмотренном частном случае теорема доказана. В случае, когда $\sigma = 0$, $f(t)$ представляется в виде

$$f(t) = \int_0^\infty p(t+x) dH(x), \quad t > 0, \quad (38)$$

где $H(x)$ — функция безгранично делимого распределения с мерой Леви $G_1(A) = G(-A \cap (-\infty, 0))$, $p(t)$ — производная функции безгранично делимого распределения с мерой Леви $G_2(A) = G(A \cap (0, \infty))$ (A — произвольное борелевское множество из $\mathbf{R}^1$). Положим

$$f_1(t) = \int_0^{\sqrt{t}} p(t+x) dH(x), \quad t > 0. \quad (39)$$

Покажем сначала, что

$$f_1 \overset{\text{сл.}}{\sim} g(t) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (40)$$

Зафиксируем произвольные $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$. Положим $\varepsilon_1 = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon}$, $\delta_1 = \sqrt{1 + \delta} - 1$. Согласно доказанному, существует $t_1 \geq \alpha/(1 - \delta)$ такое, что $(1 - \varepsilon_1)g(y(1 + \delta_1)) \leq p(y) \leq (1 + \varepsilon_1)g(y(1 - \delta_1))$ при $y \geq t_1$, откуда при $y \geq t_1$

$$(1 - \varepsilon_1)g(y(1 + \delta_1)) \leq p(y) \leq (1 + \varepsilon)g(y(1 - \delta)),$$

так как $\varepsilon_1 = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon} < \varepsilon$, $\delta_1 = \sqrt{1 + \delta} - 1 < \delta$. Отсюда при $x \geq 0$ и $t \geq t_1$

$$p(t+x) \leq (1 + \varepsilon)g((t+x)(1 - \delta)) \leq (1 + \varepsilon)g(t(1 - \delta)). \quad (41)$$

Далее, при $t \geq t_2 = \max(t_1, \delta_1^{-2})$ и $x \leq \sqrt{t}$ будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned} p(t+x) &\geq (1-\varepsilon_1) g((t+x)(1+\delta_1)) \geq (1-\varepsilon_1) g(t(1+t^{-1/2})(1+\delta_1)) \\ &\geq (1-\varepsilon_1) g(t(1+\delta_1)^2) = (1-\varepsilon_1) g(t(1+\delta)) \end{aligned} \quad (42)$$

в силу определения δ_1 . Найдется $t_3 \geq t_2$ такое, что при $t \geq t_3$ $H(\sqrt{t}) \geq 1 - \varepsilon_1$. Поэтому в силу неравенств (41) и (42) мы имеем при $t \geq t_3$

$$H(\sqrt{t})(1-\varepsilon_1) g(t(1+\delta)) \leq f_1(t) \leq (1+\varepsilon) g(t(1-\delta)),$$

откуда $(1-\varepsilon_1)^2 g(t(1+\delta)) \leq f_1(t) \leq (1+\varepsilon) g(t(1-\delta))$, или же, в силу определения ε_1 ,

$$(1-\varepsilon) g(t(1+\delta)) \leq f_1(t) \leq (1+\varepsilon) g(t(1-\delta)). \quad (43)$$

Из (43) непосредственно следует (40). Заметим, что

$$\int_{\sqrt{t}}^{\infty} p(t+x) dH(x) \leq \sup_{x \geq t} p(x) \cdot (1 - H(\sqrt{t})).$$

Так как $p(t) \stackrel{\text{сл.}}{\sim} g(t)$, то отсюда следует, что

$$\int_{\sqrt{t}}^{\infty} p(t+x) dH(x) = o(g(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (44)$$

Из (38), (39) и (44) выводим, что

$$f(t) = f_1(t) + o(g(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (45)$$

Из (40) и (45) следует, что $f(t) \stackrel{\text{сл.}}{\sim} g(t)$. В случае $\sigma \neq 0$ применяются точно такие же рассуждения, что и раньше. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично теореме 1.

Сделаем еще одно заключительное замечание. Как хорошо известно из теории мажорируемо меняющихся функций [13], (1) выполнено тогда и только тогда, когда найдутся такие положительные c, x_0 и действительное β , что при $y \geq x \geq x_0$ выполнено неравенство

$$\frac{g(y)}{g(x)} \leq c \left(\frac{y}{x} \right)^{\beta}. \quad (46)$$

Поэтому для того чтобы было выполнено (2), достаточно, чтобы в (46) $\beta < -1$. В самом деле, (2) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{\lambda t} g(x) dx}{\int_t^{\infty} g(x) dx} > 0, \quad (47)$$

что равносильно соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{\infty} g(x) dx}{\int_t^{\lambda t} g(x) dx} < \infty. \quad (48)$$

Поскольку $g(x)$ мажорируемо меняется, то (48) выполнено тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty g(x) dx / (tg(t)) < \infty$. Делая в последнем интеграле замену $x = ut$, приходим к соотношению

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{g(ut)}{g(t)} du < \infty. \quad (49)$$

Остается заметить, что (49), а стало быть, и (2), выполнено, если неравенство (46) справедливо при некотором $\beta < -1$.

В заключение я хотел бы выразить свою глубокую признательность рецензенту профессору Владимиру Михайловичу Золотареву, который является родоначальником исследуемого направления, за ценные замечания и пожелания. В частности, он отметил, что открытым является вопрос об асимптотике плотности распределения $F(x)$ в случае, когда $1 - F(x)$ либо медленно меняется на бесконечности, либо стремится к нулю быстрее любой степенной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов С. Н., Круглов В. М. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 4, с. 625–642.
2. Круглов В. М., Антонов С. Н. Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 4, с. 735–742.
3. Золотарев В. М. Об асимптотическом поведении одного класса безгранично делимых законов распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, в. 3, с. 303–334.
4. Сгибнев М. С. Асимптотика безгранично делимых распределений в $\mathbf{R}$. — Сиб. матем. журн., 1990, т. 31, № 1, с. 135–140.
5. Якимив А. Л. Асимптотическое поведение одного класса безгранично делимых распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 4, с. 691–702.
6. Embrechts P., Goldie Ch. M., Veraverbeke N. Subexponentiality and infinite divisibility. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, v. 49, p. 335–347.
7. Grübel R. Über unbegrenzt teilbare Verteilungen. — Arch. Math., 1983, v. 41, № 1, p. 80–88.
8. Oney E. Infinite divisibility and random sums of random vectors. — Yokohama Math. J., 1985, v. 33, № 1-2, p. 39–48.
9. Золотарев В. М. Аналитическое строение безгранично делимых законов класса L . — Литов. матем. сб., 1963, т. 3, № 1, с. 123–139.
10. Якимив А. Л. Асимптотика плотности безгранично делимого распределения на бесконечности. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: ВНИИСИ, 1990, с. 123–131.
11. Якимив А. Л. Асимптотические свойства моментов изменения состояний в случайном процессе рекордов. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 3, с. 577–581.
12. Якимив А. Л. Асимптотика вероятности продолжения критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса. — Тр. МИАН СССР, 1986, т. 177, с. 177–205.
13. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.

Поступила в редакцию
10.IV.2000