Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Рохлин, Конструктивный критерий отсутствия арбитража при наличии операционных издержек в случае конечного дискретного времени, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 1, 41–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:49:56

© 2007 г.

РОХЛИН Д. Б.*

КОНСТРУКТИВНЫЙ КРИТЕРИЙ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА ПРИ НАЛИЧИИ ОПЕРАЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

Получен конструктивный критерий (робастного) отсутствия арбитража на рынке с операционными издержками в случае конечного дискретного времени. Данный критерий выражен в терминах носителей регулярных условных верхних распределений элементов многозначного случайного процесса, определяемого конусами платежеспособности. Рассмотрена также модель рынка с банковским счетом. Указан способ построения арбитражных стратегий.

Ключевые слова и фразы: робастное отсутствие арбитража, операционные издержки, арбитражные портфели, измеримые многозначные отображения, носители регулярных условных распределений.

Введение. Согласно классической теореме Даланга–Мортон–Виллинджера, для безарбитражности идеального рынка необходимо и достаточно существования эквивалентной мартингальной меры для дисконтированного процесса цен активов [2]. В работе [5] было явно сформулировано еще одно эквивалентное условие, выраженное в терминах носителей регулярных условных распределений приращений цен (см. условие (g) теоремы 3 указанной работы). Данное условие естественно назвать *конструктивным*, поскольку оно дает вычислительно осуществимый метод проверки безарбитражности рынка. Аналогичное условие при наличии выпуклых ограничений на портфели активов введено в [14].

Целью данной работы является получение подобного конструктивного критерия безарбитражности в рамках моделей рынков с операционными издержками, предложенных в работах [7], [10] и развитых в [8], [16], [9], [3]. Вместо эквивалентных мартингальных мер здесь рассматриваются *строго согласованные процессы цен*. Так называются мартингалы, значения элементов которых п.н. лежат в относительной внутрен-

* Ростовский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Зорге, 5, 344090 Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: rokhlin@math.rsu.ru

ности случайных конусов K_t^* , сопряженных конусам платежеспособности [10], [8], [16]. В работе [16] введено условие *робастного отсутствия арбитража* NA^r (robust no-arbitrage) и показано, что существование строго согласованного процесса цен эквивалентно выполнению данного условия.

Условие (iii) работ [8], [9] дает чисто геометрическую характеристику робастного отсутствия арбитража. В п. 1 настоящей работы, с использованием понятия *носителя регулярного условного верхнего распределения* измеримого многозначного отображения [15], получено двойственное «конструктивное» описание указанного условия [8], [9] (см. ниже теорему 1). В п. 2, где рассматривается модель рынка с операционными издержками, показано, что данный результат приводит к исковому критерию безарбитражности (теорема 2, условие (с)).

Отметим, что в предположении о наличии внутренних точек K_t^* (известном как *условие эффективного трения* [8]), а также в случае конечного вероятностного пространства данный критерий, фактически, получен в работе [15].

В п. 3 рассматривается важный частный случай: модель рынка с банковским счетом. Здесь известный критерий безарбитражности формулируется более традиционным образом и состоит в наличии некоторого процесса цен, расположенного между ценами покупки и продажи, и соответствующей эквивалентной мартингальной меры (ср. с [6]). Конструктивный критерий безарбитражности выражается в терминах декартовых произведений интервалов цен покупки-продажи (теорема 3).

Нарушение условия NA^r означает наличие арбитражной стратегии для любого процесса цен покупки-продажи с меньшими операционными издержками (точная формулировка дана в [16] и п. 2 настоящей работы). Как известно, на идеальном рынке арбитражные стратегии включают лишь два изменения портфеля в соседние моменты времени и легко строятся с использованием соображений отделимости [5]. При наличии операционных издержек такие стратегии могут иметь более сложную структуру. Приводимые ниже рассуждения позволяют извлечь о них некоторую информацию. В частности, удастся определить момент времени, в который следует выбирать первый нетривиальный портфель, и указать способ его выбора. Иллюстративный пример приводится в заключительном п. 4.

1. Ключевой результат. Обозначим $cl A$, $int A$, $ri A$, $conv A$, $cone A$ соответственно замыкание, внутренность, относительную внутренность, выпуклую и коническую оболочку подмножества A конечномерного пространства [13]. Положим также

$$A \pm B = \{x \pm y: x \in A, y \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda x: x \in A\}.$$

Если A — конус (т.е. $\lambda A \subset A$, $\lambda \geq 0$), то A^* — сопряженный конус: $A^* = \{y \in \mathbf{R}^d: \langle x, y \rangle \geq 0, x \in A\}$. Здесь и далее $\langle x, y \rangle$ означает обычное скалярное произведение x и y . Пусть еще $A^\perp = \{y: \langle x, y \rangle = 0, x \in A\}$ и $H^x = (\text{cone } x)^\perp$, $H^x_\geq = (\text{cone } x)^*$ для любого $x \in \mathbf{R}^d$.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и некоторую σ -алгебру $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Далее предполагается, что все рассматриваемые σ -алгебры являются полными относительно меры $\mathbf{P}$.

Многозначное отображение F , относящее каждому $\omega \in \Omega$ некоторое подмножество $F(\omega) \subset \mathbf{R}^d$, называется $\mathcal{H}$ -измеримым, если $\{\omega: F(\omega) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{H}$ для любого открытого множества $V \subset \mathbf{R}^d$. Эффективное множество F определяется следующим образом: $\text{dom } F = \{\omega: F(\omega) \neq \emptyset\}$. Функция $\xi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ называется селектором F , если $\xi(\omega) \in F(\omega)$ для всех $\omega \in \text{dom } F$.

Отображение F называется замкнутым (выпуклым, коническим), если множества $F(\omega)$ замкнуты (выпуклы, являются конусами). Для $\mathcal{H}$ -измеримости замкнутого многозначного отображения F необходимо и достаточно существования такого счетного семейства $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ $\mathcal{H}$ -измеримых селекторов F , что множества $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$ плотны в $F(\omega)$ при всех $\omega \in \text{dom } F$ [12, с. 331]. Указанное семейство называется *представлением Кастэна* для F .

Пусть $\text{CL} = \text{CL}(\mathbf{R}^d)$ — семейство непустых замкнутых подмножеств $\mathbf{R}^d$. Через $\mathcal{E}(\text{CL})$ обозначим σ -алгебру Эффроса (E. Effros) [1], [17], порожденную множествами

$$A_V = \{D \in \text{CL}: D \cap V \neq \emptyset\},$$

где V — открытое подмножество $\mathbf{R}^d$. В работе [15] указано, что для $\mathcal{F}$ -измеримого многозначного отображения F с непустыми замкнутыми значениями существует функция

$$\mathbf{P}^*: \Omega \times \mathcal{E}(\text{CL}) \rightarrow \mathbf{R}$$

со следующими свойствами:

- (i) для каждого ω функция $C \mapsto \mathbf{P}^*(\omega, C)$ является вероятностной мерой на $\mathcal{E}(\text{CL})$;
- (ii) для каждого $C \in \mathcal{E}(\text{CL})$ функция $\omega \mapsto \mathbf{P}^*(\omega, C)$ п.н. совпадает с $\mathbf{P}(\{F \in C\} | \mathcal{H})(\omega)$.

Данный результат позволяет ввести *регулярное условное верхнее распределение* многозначного отображения и его носитель [15]. Функция $\mu_F(\omega, V) = \mathbf{P}^*(\omega, A_V)$, где V — открытое подмножество $\mathbf{R}^d$, называется регулярным условным верхним распределением F относительно $\mathcal{H}$. Носителем $\mu_F(\omega, \cdot)$ называется множество

$$\mathcal{H}(F, \mathcal{H}; \omega) = \{x \in \mathbf{R}^d: \mu_F(\omega, B_\varepsilon(x)) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\},$$

где $B_\varepsilon(x) \subset \mathbf{R}^d$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x . Мнозначное отображение $\omega \mapsto K(F, \mathcal{H}; \omega)$ принимает непустые значения и является $\mathcal{H}$ -измеримым и замкнутым [15, предложение 4(a)].

Если множество Ω конечно, вероятностная мера невырождена (т.е. $\mathbf{P}(\omega) > 0$, $\omega \in \Omega$) и алгебра $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ порождается разбиением $\{D_1, \dots, D_l\}$, то, как отмечено в [15],

$$\mathcal{K}(F, \mathcal{H}; \omega) = \bigcup_{\omega' \in D_i} F(\omega'), \quad \omega \in D_i, \quad i = 1, \dots, l. \quad (1.1)$$

Если отображение F является однозначным, то μ_F и $\mathcal{K}(F, \mathcal{H})$ — сужение регулярного условного распределения F относительно $\mathcal{H}$ на класс открытых множеств и его носитель соответственно.

Отображение $\mathcal{K}(F, \mathcal{H})$ можно определить и в том случае, когда F принимает пустые значения на множестве нулевой меры. Для этого следует рассмотреть замкнутое продолжение F_* отображения F на Ω (например, $F_* = FI_{\{F \neq \emptyset\}} + \{0\}I_{\{F = \emptyset\}}$). С точностью до множества меры нуль отображения $\mathcal{K}(F_*, \mathcal{H})$ совпадают для всех таких продолжений [15, предложение 4(b)]. Под $\mathcal{K}(F, \mathcal{H})$ будем понимать представителя соответствующего класса эквивалентности.

Если же $F(\omega) = \emptyset$ на множестве положительной меры, то положим $\mathcal{K}(F, \mathcal{H}) = \emptyset$ при всех ω .

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для $\mathcal{F}$ -измеримого отображения $F: \Omega \mapsto \text{CL}$. Далее будет использоваться следующий результат [15, лемма 1]:

$$\mathcal{K}(F, \mathcal{H}) = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H}) \right) \quad \text{п.н.} \quad (1.2)$$

Данное соотношение, конечно, остается верным и в том случае, когда F принимает пустые значения на пренебрежимом множестве.

Заметим, что если замкнутое отображение F является коническим, то отображение $\mathcal{K}(F, \mathcal{H})$ также является коническим. Действительно, если $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для F , то тем же свойством обладает семейство $\{\lambda \xi_i\}_{i=1}^\infty$, $\lambda > 0$. Используя формулу (1.2), находим

$$\mathcal{K}(F, \mathcal{H}) = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{K}(\lambda \xi_i, \mathcal{H}) \right) = \lambda \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H}) \right) = \lambda \mathcal{K}(F, \mathcal{H}).$$

Перейдем к формулировке ключевого результата данной работы. Пусть на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbf{P})$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, задана последовательность многозначных $\mathcal{F}_t$ -измеримых отображений $G_t: \Omega \mapsto \text{CL}$, $t = 0, 1, \dots, T$, значения которых являются замкнутыми выпуклыми конусами. Введем последовательность много-

значных отображений W_t по рекуррентной формуле

$$W_T = G_T^*, \quad W_t = \text{cl}(\text{ri } G_t^* \cap \text{ri } Y_t), \\ Y_t = \text{cl}(\text{conv } \mathcal{K}(W_{t+1}, \mathcal{F}_t)), \quad 0 \leq t \leq T-1.$$

Используя предложение 3 работы [15] и лемму 1 работы [14], нетрудно проверить, что из $\mathcal{F}_{t+1}$ -измеримости многозначного отображения W_{t+1} вытекает $\mathcal{F}_t$ -измеримость W_t . Следовательно, последовательность W_t корректно определена. При этом если $W_{n+1} = \emptyset$ на множестве положительной меры, то $W_t = \emptyset$ при $t \leq n$.

Через $L^0(F, \mathcal{H})$ обозначим множество всех $\mathcal{H}$ -измеримых функций ξ , удовлетворяющих условию $\xi(\omega) \in F(\omega)$ при почти всех ω .

Теорема 1. Следующие условия эквивалентны:

- (а) если $\sum_{t=0}^T x_t = 0$, где $x_t \in L^0(-G_t, \mathcal{F}_t)$, то $x_t = L^0(G_t \cap (-G_t), \mathcal{F}_t)$, $t = 0, 1, \dots, T$;
- (б) $W_t \neq \emptyset$ п.н., $t = 0, 1, \dots, T-1$.

Данная теорема дает двойственное описание условия (а), которое заимствовано из работ [8], [9]. Заметим, что в случае одноточечного вероятностного пространства $Y_t = W_{t+1}$ и $W_t = \text{cl}(\text{ri } G_t^* \cap \text{ri } W_{t+1})$. При этом условие (б) принимает вид $\bigcap_{t=0}^T \text{ri } G_t^* \neq \emptyset$ (с учетом теоремы 6.5 из [13]).

Доказательству теоремы 1 предположим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Для конического $\mathcal{F}$ -измеримого отображения $F: \Omega \mapsto \text{CL}$, $\mathbf{P}(\text{dom } F) = 1$, справедливы равенства

$$L^0(F^*, \mathcal{H}) = L^0(\mathcal{K}(F, \mathcal{H})^*, \mathcal{H}), \quad L^0(F^\perp, \mathcal{H}) = L^0(\mathcal{K}(F, \mathcal{H})^\perp, \mathcal{H}). \quad (1.3)$$

Доказательство. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для F . Условие $x \in L^0(F^*, \mathcal{H})$, очевидно, означает, что $\mathbf{P}\{\xi_i \in H_\geq^x\} = 1$ для всех $i \geq 1$. Согласно лемме 3 из [14], имеем

$$\mathbf{P}\{\xi_i \in H_\geq^x\} = \mathbf{E}\mathbf{P}\{\xi_i \in H_\geq^x \mid \mathcal{H}\} = \int_\Omega \mu_{\xi_i}(\omega, H_\geq^{x(\omega)}) d\mathbf{P}(\omega) = 1,$$

где μ_{ξ_i} — регулярное условное распределение ξ_i относительно $\mathcal{H}$. Данное равенство эквивалентно соотношению $\mu_{\xi_i}(\omega, H_\geq^{x(\omega)}) = 1$ п.н., которое, в свою очередь, означает, что $\mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H}) \subset H_\geq^{x(\omega)}$ п.н.

Таким образом, условие $x \in L^0(F^*, \mathcal{H})$ эквивалентно следующему набору условий: $x \in L^0((\text{cone } \mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H}))^*, \mathcal{H})$, $i \geq 1$. Первое равенство (1.3) вытекает теперь из формулы (1.2), в силу которой

$$\mathcal{K}(F, \mathcal{H})^* = \bigcap_{i=1}^\infty (\text{cone } \mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H}))^* \quad \text{п.н.}$$

Второе равенство (1.3) устанавливается совершенно аналогично.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{H}$ -измеримые отображения $F_1, F_2, F: \Omega \mapsto \text{CL}$ удовлетворяют условию $F_1 + F_2 = F$ п.н. Тогда

$$L^0(F_1, \mathcal{H}) + L^0(F_2, \mathcal{H}) = L^0(F, \mathcal{H}).$$

Доказательство. Включение $L^0(F_1, \mathcal{H}) + L^0(F_2, \mathcal{H}) \subset L^0(F, \mathcal{H})$ очевидно. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольный элемент $z \in L^0(F, \mathcal{H})$ и введем многозначное отображение

$$\omega \mapsto \Psi(\omega) = (F_1(\omega) \times F_2(\omega)) \cap \{(x_1, x_2): x_1 + x_2 = z(\omega)\}.$$

Отображение Ψ принимает непустые замкнутые значения п.н. и является $\mathcal{H}$ -измеримым как пересечение замкнутых $\mathcal{H}$ -измеримых отображений (здесь следует рассмотреть графики соответствующих отображений и воспользоваться полнотой σ -алгебры $\mathcal{H}$: см. [4] или [14, предложение 3]). Любой элемент $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in L^0(\Psi, \mathcal{H})$ обладает следующими свойствами: $\xi_1 + \xi_2 = z$, $\xi_i \in F_i$ п.н., $i = 1, 2$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $W_t \neq \emptyset$ п.н., $t = n, \dots, T-1$. Тогда

$$L^0(W_n^*, \mathcal{F}_n) \subset \sum_{t=n}^T L^0(G_t, \mathcal{F}_t).$$

Доказательство. Поскольку относительные внутренности замкнутых выпуклых конусов G_n^* и Y_n имеют общую точку п.н., то $W_n = G_n^* \cap Y_n$ [13, теорема 6.5] и

$$W_n^* = G_n + Y_n^* \quad \text{п.н.}$$

[13, теорема 16.4.2]. Используя леммы 1 и 2, находим

$$\begin{aligned} L^0(Y_n^*, \mathcal{F}_n) &= L^0(\mathcal{H}(W_{n+1}, \mathcal{F}_n)^*, \mathcal{F}_n) = L^0(W_{n+1}^*, \mathcal{F}_n); \\ L^0(W_n^*, \mathcal{F}_n) &= L^0(G_n, \mathcal{F}_n) + L^0(W_{n+1}^*, \mathcal{F}_n) \subset L^0(G_n, \mathcal{F}_n) \\ &\quad + L^0(W_{n+1}^*, \mathcal{F}_{n+1}). \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом вытекает утверждение леммы 3.

Лемма 4. Пусть $\sum_{t=0}^T x_t = 0$, $x_t \in L^0(-G_t, \mathcal{F}_t)$, $t = 0, 1, \dots, T$, и $W_t \neq \emptyset$ п.н., $t = n, \dots, T-1$, где $n \geq 1$. Тогда

$$y_n = -\sum_{t=n}^T x_t \in L^0(W_n^*, \mathcal{F}_{n-1}) \cap L^0(Y_{n-1}^*, \mathcal{F}_{n-1}).$$

Доказательство. Функция $y_T = -x_T = \sum_{t=0}^{T-1} x_t$ является $\mathcal{F}_{T-1}$ -измеримой и удовлетворяет условию $y_T \in G_T = W_T^*$ п.н. Используя лемму 1, находим

$$y_T \in L^0(\mathcal{H}(W_T, \mathcal{F}_{T-1})^*, \mathcal{F}_{T-1}) = L^0(Y_{T-1}^*, \mathcal{F}_{T-1}). \quad (1.4)$$

Итак, утверждение леммы верно при $n = T$. В предположении справедливости данного утверждения для $n = m + 1$ докажем его для $n = m$. Поскольку $W_m \subset G_m^*$, то $-x_m \in G_m \subset W_m^*$ п.н. Кроме того, согласно сделанному предположению, $y_{m+1} \in Y_m^* \subset W_m^*$ п.н. Следовательно, $y_m \in L^0(W_m^*, \mathcal{F}_{m-1})$, так как функция $y_m = -x_m + y_{m+1} = \sum_{t=0}^{m-1} x_t$ является $\mathcal{F}_{m-1}$ -измеримой.

По лемме 1 отсюда вытекает, что

$$y_m \in L^0(\mathcal{K}(W_m, \mathcal{F}_{m-1})^*, \mathcal{F}_{m-1}) = L^0(Y_{m-1}^*, \mathcal{F}_{m-1}). \quad (1.5)$$

Лемма 5. Пусть $\sum_{t=0}^T x_t = 0$, $x_t \in L^0(G_t \cap (-G_t), \mathcal{F}_t)$, $t = 0, 1, \dots, T$, и $W_t \neq \emptyset$ п.н., $t = n, \dots, T-1$, где $n \geq 1$. Тогда

$$y_n = -\sum_{t=n}^T x_t \in L^0(W_n^\perp, \mathcal{F}_{n-1}) \cap L^0(Y_{n-1}^\perp, \mathcal{F}_{n-1}).$$

Доказательство. Функция $y_T = -x_T = \sum_{t=0}^{T-1} x_t$ является $\mathcal{F}_{T-1}$ -измеримой и удовлетворяет условию $y_T \in G_T \cap (-G_T) = W_T^\perp$ п.н. Включение $y_T \in L^0(Y_{T-1}^\perp, \mathcal{F}_{T-1})$ устанавливается с помощью леммы 1 аналогично (1.4).

Предположим, что утверждение леммы верно для $n = m + 1$, и докажем его для $n = m$. Поскольку $W_m \subset G_m^*$, то $-x_m \in G_m \cap (-G_m) \subset W_m^\perp$ п.н. Кроме того, согласно сделанному предположению, $y_{m+1} \in Y_m^\perp \subset W_m^\perp$ п.н. Отсюда вытекает, что $y_m \in L^0(W_m^\perp, \mathcal{F}_{m-1})$, поскольку функция $y_m = -x_m + y_{m+1} = \sum_{t=0}^{m-1} x_t$ является $\mathcal{F}_{m-1}$ -измеримой. Включение $y_m \in L^0(Y_{m-1}^\perp, \mathcal{F}_{m-1})$ устанавливается теперь аналогично (1.5).

Лемма 6. Пусть A, B и C — такие выпуклые подмножества $\mathbf{R}^d$, что

$$C = \text{cl}(\text{ri } A \cap \text{ri } B) \neq \emptyset.$$

Тогда множества A и C не являются separable.

Доказательство. Заметим, что

$$\text{ri } C \subset \text{ri}(\text{cl}(\text{ri } A)) = \text{ri } A.$$

Поэтому $\text{ri } C \cap \text{ri } A = \text{ri } C \neq \emptyset$ и утверждение леммы вытекает из критерия separability выпуклых множеств [13].

Лемма 7. Пусть $\sum_{t=0}^T x_t = 0$, $x_t \in L^0(-G_t, \mathcal{F}_t)$ и $W_t \neq \emptyset$ п.н., $t = 0, 1, \dots, T-1$. Тогда

$$y_n = -\sum_{t=n}^T x_t \in L^0(W_n^\perp, \mathcal{F}_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots, T,$$

где $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$.

Доказательство. Пусть $y_n = -\sum_{t=n}^T x_t \notin L^0(W_n^\perp, \mathcal{F}_{n-1})$ для некоторого n . Тогда по лемме 1

$$y_n \notin L^0(\mathcal{K}(W_n, \mathcal{F}_{n-1})^\perp, \mathcal{F}_{n-1}) = L^0(Y_{n-1}^\perp, \mathcal{F}_{n-1}).$$

С другой стороны,

$$y_n \in L^0(Y_{n-1}^*, \mathcal{F}_{n-1}) \subset L^0(W_{n-1}^*, \mathcal{F}_{n-1})$$

по лемме 4. Следовательно, на множестве $A_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$ положительной меры имеем $y_n \in Y_{n-1}^* \setminus Y_{n-1}^\perp$.

Если $y_n \in W_{n-1}^\perp$ на подмножестве $A'_{n-1} \subset A_{n-1}$ положительной меры, то y_n собственно разделяет W_{n-1} и Y_{n-1} при $\omega \in A'_{n-1}$. Но это невозможно в силу леммы 6 и определения W_{n-1} , так как $W_{n-1} \neq \emptyset$ п.н.

Итак, $y_n \in W_{n-1}^* \setminus W_{n-1}^\perp$ п.н. на A_{n-1} . Но $-x_{n-1} \in G_{n-1} \subset W_{n-1}^*$ п.н. для любого $n \geq 1$. Следовательно,

$$y_{n-1} = -x_{n-1} + y_n \notin L^0(W_{n-1}^\perp, \mathcal{F}_{n-2}).$$

По индукции отсюда следует, что $y_0 = \sum_{t=0}^T x_t \notin L^0(W_0^\perp, \mathcal{F}_0)$, и получаем противоречие, так как $y_0 = 0$.

Доказательство теоремы 1. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть условие (b) нарушается и $n \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ — наибольший номер, для которого $W_n = \emptyset$ на множестве

$$A_n = \{\omega: \text{ri } G_n^* \cap \text{ri } Y_n = \emptyset\} = \{\omega: 0 \notin \text{ri}(G_n^* - Y_n)\}$$

положительной меры. Заметим, что на данном множестве конус $G_n^* - Y_n$ не является подпространством. Следовательно, отображение

$$D_n = (G_n^* - Y_n)^* \setminus (G_n^* - Y_n)^\perp I_{A_n} + (G_n^* - Y_n)^* I_{\Omega \setminus A_n}$$

принимает непустые значения.

Согласно стандартным результатам об измеримом выборе (см., например, [4, теорема 5.2]) существует элемент

$$-x_n \in L^0(D_n, \mathcal{F}_n).$$

При этом $x_n \in L^0(-G_n, \mathcal{F}_n)$ и

$$x_n \in L^0(Y_n^*, \mathcal{F}_n) = L^0(\mathcal{K}(W_{n+1}, \mathcal{F}_n)^*, \mathcal{F}_n) = L^0(W_{n+1}^*, \mathcal{F}_n)$$

в силу леммы 1. Теперь из леммы 3 следует, что $x_n \in \sum_{t=n+1}^T L^0(G_t, \mathcal{F}_t)$ и существует набор элементов $x_t \in L^0(-G_t, \mathcal{F}_t)$, $t = n, \dots, T$, удовлетворяющий условию $\sum_{t=n}^T x_t = 0$.

Покажем, что для построенного набора, дополненного элементами $x_t = 0$, $t = 0, 1, \dots, n-1$, условие (a) нарушается. Пусть $x_t \in G_t \cap$

$(-G_t)$ п.н., $t = 0, 1, \dots, T$. По лемме 5 имеем

$$x_n = - \sum_{t=n+1}^T x_t \in L^0(Y_n^\perp, \mathcal{F}_n),$$

но тогда $-x_n \in (G_n^* - Y_n)^\perp$ п.н., что противоречит определению x_n .

(b) $\Rightarrow$ (a). Пусть $x_t \in L^0(-G_t, \mathcal{F}_t)$, $\sum_{t=0}^T x_t = 0$, — набор элементов, для которого нарушается условие (a). Предположим, что выполняется условие (b) и получим противоречие.

Пусть $x_n \notin L^0(G_n \cap (-G_n), \mathcal{F}_n)$. Тогда $x_n \notin (G_n^*)^\perp$ на множестве положительной меры $A_n \in \mathcal{F}_n$. В то же время,

$$-x_n \in G_n = (G_n^*)^* \subset W_n^* \quad \text{п.н.}$$

Если $x_n \in W_n^\perp$ на подмножестве $A'_n \subset A_n$ положительной меры, то x_n собственно разделяет W_n и G_n^* при $\omega \in A'_n$. По лемме 6 это невозможно, так как $W_n \neq \emptyset$ п.н.

Пусть теперь $-x_n \in W_n^* \setminus W_n^\perp$ п.н. на A_n . Тогда

$$y_n = - \sum_{t=n}^T x_t \notin L^0(W_n^\perp, \mathcal{F}_{n-1}). \quad (1.6)$$

При $n = T$ это очевидно, а при $n < T$ вытекает из равенства $y_n = -x_n + y_{n+1}$ и леммы 4, согласно которой

$$y_{n+1} = - \sum_{t=n+1}^T x_t \in L^0(Y_n^*, \mathcal{F}_n) \subset L^0(W_n^*, \mathcal{F}_n).$$

Получаем противоречие, поскольку по лемме 7 соотношение (1.6) неверно при выполнении условия (b). Теорема доказана.

2. Критерий безарбитражности рынка с операционными издержками. Далее рассматривается модель рынка с операционными издержками, предложенная в работе [16], где обсуждается ее экономический смысл и связь с моделями работ [7], [10], [8].

Пусть имеется d различных активов (например, валют). Обозначим через π^{ij} количество единиц i -го актива, которое можно обменять на единицу j -го. Тогда единицу j -го актива можно обменять на $1/\pi^{ji}$ единиц i -го. Иначе говоря, $1/\pi^{ji}$, π^{ij} представляют собой цены покупки и продажи j -го актива в терминах i -го.

Квадратная матрица $\Pi = (\pi^{ij})_{i,j=1}^d$ называется *матрицей цен покупки-продажи*, если

- (i) $\pi^{ij} > 0$, $1 \leq i, j \leq d$;
- (ii) $\pi^{ii} = 1$, $1 \leq i \leq d$;
- (iii) $\pi^{ij} \leq \pi^{ik} \pi^{kj}$, $1 \leq i, j, k \leq d$.

Условие (iii) означает, что прямой обмен активов не хуже, чем любая цепочка обменов. Интерпретация условий (i), (ii) очевидна.

Портфели инвестора задаются векторами пространства $\mathbf{R}^d$, компоненты которых описывают количество единиц каждого из рассматриваемых активов, которыми владеет инвестор. Конусом платежеспособности $K(\Pi)$ называется выпуклый конус, порожденный векторами $\{e_i\}_{i=1}^d$ стандартного базиса $\mathbf{R}^d$ и векторами $\pi^{ij}e_i - e_j$. Сопряженный конус и его относительная внутренность имеют следующий вид (см. [16]):

$$K^*(\Pi) = \{w \in \mathbf{R}_+^d: \pi^{ij}w_i - w_j \geq 0, 1 \leq i, j \leq d\},$$

$$\text{ri } K^*(\Pi) = \left\{ w \in \text{int } \mathbf{R}_+^d: \frac{w_j}{w_i} \in \text{ri} \left[\frac{1}{\pi^{ji}}, \pi^{ij} \right], 1 \leq i, j \leq d \right\},$$

где $\mathbf{R}_+^d = \{w \in \mathbf{R}^d: w_i \geq 0, i = 1, \dots, d\}$.

Конус $K(\Pi)$ задает отношение предпочтения на множестве всех портфелей, поскольку с точки зрения инвестора элементы данного конуса не хуже нулевого портфеля. Действительно, каждый из портфелей $\{\pi^{ij}e_i - e_j\}$ состоит из длинной позиции в π^{ij} единиц i -го актива и короткой позиции в единицу j -го. Очевидно, он может быть преобразован в нулевой портфель (ликвидирован).

Пусть эволюция цен активов во времени описывается согласованным с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ случайным процессом $(\Pi_t)_{t=0}^T$, принимающим значения в множестве матриц цен покупки-продажи. Через $K_t = K(\Pi_t)$ обозначим соответствующий процесс конусов платежеспособности.

Пусть $\mathcal{F}_t$ -измеримый d -мерный случайный вектор θ_t описывает портфель инвестора в момент времени t . Процесс портфеля (или, для краткости, портфель) $(\theta_t)_{t=0}^T$ называется самофинансируемым, если

$$\theta_t - \theta_{t-1} \in L^0(-K_t, \mathcal{F}_t), \quad t = 0, 1, \dots, T,$$

где $\theta_{-1} = 0$. При этом портфель θ_t в момент времени t доминируется портфелем θ_{t-1} , имевшимся в предыдущий момент времени.

Обозначим $A_t(\Pi)$ выпуклый конус в $L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{F}_t)$, образованный элементами θ_t всевозможных самофинансируемых портфелей θ :

$$A_t(\Pi) = \sum_{j=0}^t L^0(-K_j, \mathcal{F}_j).$$

Говорят, что процесс цен покупки-продажи $(\Pi_t)_{t=0}^T$ удовлетворяет условию *робастного отсутствия арбитража* (NA^r: robust no-arbitrage) [16], если существует такой процесс $(\tilde{\Pi}_t)_{t=0}^T$ цен покупки-продажи, что

$$\left[\frac{1}{\tilde{\pi}_t^{ji}}, \tilde{\pi}_t^{ij} \right] \subset \text{ri} \left[\frac{1}{\pi_t^{ji}}, \pi_t^{ij} \right] \quad (2.1)$$

для всех i, j, t и

$$A_T(\tilde{\Pi}) \cap L^0(\mathbf{R}_+^d, \mathcal{F}_T) = \{0\}.$$

В данном условии накладывается требование существования процесса $\tilde{\Pi}$ с меньшими, по сравнению с Π , интервалами цен покупки-продажи, для которого нет арбитража в традиционном понимании. Последнее означает невозможность «получения прибыли без риска»: отсутствие такого самофинансируемого портфеля (арбитражной стратегии), который в момент времени T имеет неотрицательные компоненты и нетривиален. Дополнительная оговорка состоит в том, что нулевая разница между ценами покупки и продажи считается «меньшей самой себя».

Теорема 2. Для процесса цен покупки-продажи $(\Pi_t)_{t=0}^T$ следующие условия эквивалентны:

- (а) выполнено условие NA^T ;
- (б) существует d -мерный $\mathbf{P}$ -мартингал $Z = (Z_t)_{t=0}^T$ такой, что $Z_t \in L^0(\text{ri } K_t^*, \mathcal{F}_t)$, $t = 0, 1, \dots, T$;
- (с) все элементы W_t последовательности многозначных отображений

$$W_T = K_T^*,$$

$$W_t = \text{cl}(\text{ri } K_t^* \cap \text{ri } Y_t), \quad Y_t = \text{cl}(\text{conv } \mathcal{K}(W_{t+1}, \mathcal{F}_t)), \quad 0 \leq t \leq T-1,$$

принимают непустые значения п.н.;

- (д) если $\sum_{t=0}^T x_t = 0$, где $x_t \in L^0(-K_t, \mathcal{F}_t)$, то $x_t = L^0(K_t \cap (-K_t), \mathcal{F}_t)$, $t = 0, 1, \dots, T$.

Новым здесь является условие (с). Его эквивалентность условию (д) установлена в теореме 1. Заметим, впрочем, что утверждение теоремы 1 является более общим. В частности, конусы $G_t(\omega)$ не предполагались полиэдральными.

Эквивалентность условий (а) и (б) установлена в работе [16] (теорема 1.7), а импликации (а) $\Rightarrow$ (д) и (д) $\Rightarrow$ (б) — в работе [9] (см. лемму 5 и следствие 1, а также комментарий после него).

Подчеркнем, что если конусы K_t^* имеют внутренние точки (выполнено условие *эффективного трения* [8]), то эквивалентность условий (б) и (с) вытекает из результатов [15].

Отметим еще, что полагая

$$\theta_{-1} = 0, \quad \theta_t = \theta_{t-1} + x_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

условие (д) можно сформулировать следующим образом: для любого самофинансируемого портфеля θ из равенства $\theta_T = 0$ вытекает, что

$$\theta_t - \theta_{t-1} \in L^0(K_t \cap (-K_t), \mathcal{F}_t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

3. Модель рынка с банковским счетом. В модели, рассмотренной в п. 2, все активы считаются равноправными, что весьма удобно при описании рынка валют. В то же время, часто активы обмениваются не напрямую, а путем их покупки и продажи с использованием выделенной «канонической» валюты. В данном пункте этот случай анализируется с точки зрения общей модели.

Итак, предположим, что на рынке имеется избранный актив (банковский счет) и операция обмена актива с номером i на актив с номером j эквивалентна последовательному обмену i -го актива на банковский счет и обмену полученных денег на j -й актив. Если банковский счет имеет номер 1, то элементы матрицы цен покупки-продажи представимы в виде $\pi^{ij} = \pi^{i1}\pi^{1j}$ [3]. При этом

$$S^{b,i} = \frac{1}{\pi^{i,1}}, \quad S^{a,i} = \pi^{1,i}, \quad i = 2, \dots, d,$$

— цены покупки и продажи i -го актива, выраженные в единицах банковского счета.

Обратно, если d -мерные векторы S^b, S^a таковы, что $0 < S^{b,i} \leq S^{a,i}$ и $S^{b,1} = S^{a,1} = 1$, то матрица $\pi^{ij} = S^{a,j}/S^{b,i}$, $i \neq j$, $\pi^{ii} = 1$ удовлетворяет условиям (i)–(iii). Назовем ее матрицей цен покупки-продажи в модели с банковским счетом. Нетрудно проверить, что в рассматриваемой модели конус платежеспособности $K(\Pi)$ порождается векторами $\{e_i - S^{b,i}e_1\}_{i=2}^d$, $\{S^{a,j}e_1 - e_j\}_{j=2}^d$, $\{e_i\}_{i=1}^d$, а сопряженный конус и его относительная внутренность имеют вид

$$K^*(\Pi) = \{w \in \mathbf{R}_+^d: S^{b,i}w_1 \leq w_i \leq S^{a,i}w_1, i = 2, \dots, d\}, \quad (3.1)$$

$$\text{ri } K^*(\Pi) = \left\{ w \in \text{int } \mathbf{R}_+^d: \frac{w_i}{w_1} \in \text{ri } [S^{b,i}, S^{a,i}], i = 2, \dots, d \right\}. \quad (3.2)$$

Для установления связи между множеством $C = [S^{b,2}, S^{a,2}] \times \dots \times [S^{b,d}, S^{a,d}]$ и данными конусами удобно использовать представление точек x пространства $\mathbf{R}^{d-1}$ в виде лучей $\{\lambda(1, x): \lambda \geq 0\} \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{d-1}$ (ср. с [13, с. 76]). С этой целью введем многозначное отображение

$$x \mapsto H(x) = \{\lambda(1, x): \lambda \geq 0\},$$

называемое иногда преобразованием Хёрмандера [11]. Для любого множества $A \subset \mathbf{R}^{d-1}$ имеем

$$H(A) = \bigcup_{x \in A} H(x) = \{\lambda(1, x): \lambda \geq 0, x \in A\} = \{(\mu, y): \mu \geq 0, y \in \mu A\}.$$

Введем также многозначное отображение

$$x \mapsto \hat{H}(x) = \{\lambda(1, x): \lambda > 0\}.$$

Очевидно, что

$$H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} H(A_i), \quad H(\text{conv } A) = \text{conv } H(A), \quad (3.3)$$

$$\hat{H}(A \cap B) = \hat{H}(A) \cap \hat{H}(B). \quad (3.4)$$

Кроме того, $H(\text{cl } A) \subset \text{cl } H(A)$. Поэтому

$$\text{cl } H(\text{cl } A) = \text{cl } H(A). \quad (3.5)$$

Если же множество A является ограниченным, то, как легко видеть, множество $H(\text{cl } A)$ замкнуто и

$$H(\text{cl } A) = \text{cl } H(A) = \text{cl } \hat{H}(A). \quad (3.6)$$

Отметим также, что если A является выпуклым, то по следствию 6.8.1 из [13] имеем

$$\text{ri } \hat{H}(A) = \text{ri } H(A) = \hat{H}(\text{ri } A). \quad (3.7)$$

Следующий результат показывает, что операция $\text{cl } H$ (замыкание преобразования Хёрмандера) коммутирует с операцией вычисления носителя регулярного условного верхнего распределения многозначного отображения.

Лемма 8. Пусть F — замкнутое $\mathcal{F}$ -измеримое многозначное отображение и $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Тогда отображение $\omega \mapsto \text{cl } H(F(\omega))$ является $\mathcal{F}$ -измеримым и

$$\mathcal{K}(\text{cl } H(F), \mathcal{H}) = \text{cl } H(\mathcal{K}(F, \mathcal{H})). \quad (3.8)$$

Доказательство. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — представление Кастэна для F и $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ — счетное плотное подмножество $\mathbf{R}_+$. Легко видеть, что $\{(\lambda_j, \lambda_j \xi_i)\}_{i,j=1}^{\infty}$ является представлением Кастэна для отображения $\text{cl } H(F)$, а значит, данное отображение является $\mathcal{F}$ -измеримым.

Достаточно рассмотреть случай $F(\omega) \neq \emptyset$ п.н., поскольку иначе множества в обеих частях равенства (3.8) являются пустыми по определению носителя регулярного условного верхнего определения. Используя формулу (1.2), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\text{cl } H(F), \mathcal{H}) &= \text{cl} \left(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{K}((\lambda_j, \lambda_j \xi_i), \mathcal{H}) \right) = \text{cl} \left(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} \lambda_j \mathcal{K}((1, \xi_i), \mathcal{H}) \right) \\ &= \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \lambda_j (1, \mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H})) \right) = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H(\mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H})) \right). \end{aligned}$$

В последнем равенстве учтено, что множество $\bigcup_{j=1}^{\infty} \lambda_j (1, \mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H}))$ плотно в $H(\mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H}))$ для любого i .

С другой стороны, по формулам (1.2), (3.5) и (3.3)

$$\begin{aligned} \text{cl } H(\mathcal{K}(F, \mathcal{H})) &= \text{cl } H\left(\text{cl } \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H})\right)\right) = \text{cl } H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H})\right) \\ &= \text{cl } \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H(\mathcal{K}(\xi_i, \mathcal{H}))\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Возвращаясь к модели рынка с банковским счетом, рассмотрим согласованные с фильтрацией d -мерные случайные процессы $S^b = (S_t^b)_{t=0}^T$, $S^a = (S_t^a)_{t=0}^T$, удовлетворяющие условиям

$$0 < S_t^{b,i} \leq S_t^{a,i}, \quad i = 2, \dots, d, \quad S_t^{b,1} = S_t^{a,1} = 1$$

при всех t . Положим

$$C_t = [S_t^{b,2}, S_t^{a,2}] \times \dots \times [S_t^{b,d}, S_t^{a,d}].$$

Пусть $\hat{w} = (w_2, \dots, w_d)$. Тогда

$$H(C_t) = \{(w_1, \hat{w}): w_1 \geq 0, \hat{w} \in w_1 C_t\} = K_t^*, \quad K_t = K(\Pi_t), \quad (3.9)$$

$$\hat{H}(\text{ri } C_t) = \{(w_1, \hat{w}): w_1 > 0, \hat{w} \in w_1 \text{ri } C_t\} = \text{ri } K_t^* \quad (3.10)$$

в силу (3.1), (3.2).

Теорема 3. Для процесса цен покупки-продажи $(\Pi_t)_{t=0}^T$ в модели с банковским счетом следующие условия эквивалентны:

(а) выполнено условие NA^r ;

(б) существуют эквивалентная $\mathbf{P}$ вероятностная мера $\mathbf{Q}$ и $(d-1)$ -мерный $\mathbf{Q}$ -мартингал $S = (S_t)_{t=0}^T$, $S_t = (S_t^2, \dots, S_t^d)$, такие, что

$$S_t^i \in L^0(\text{ri } [S_t^{b,i}, S_t^{a,i}], \mathcal{F}_t), \quad i = 2, \dots, d, \quad t = 0, 1, \dots, T;$$

(с) все элементы V_t последовательности многозначных отображений

$$V_T = C_T,$$

$$V_t = \text{cl } (\text{ri } C_t \cap \text{ri } X_t), \quad X_t = \text{cl } (\text{conv } \mathcal{K}(V_{t+1}, \mathcal{F}_t)), \quad 0 \leq t \leq T-1,$$

принимают непустые значения п.н.

Доказательство. Хотя новым здесь является лишь условие (с), для полноты изложения приведем доказательство эквивалентности условий (б) и (с) теоремы 3 и соответствующих условий теоремы 2.

Пусть выполнено условие (б) теоремы 3. Следуя [16], введем случайный процесс $Z = (Z_t)_{t=0}^T$ по формулам

$$Z_t^1 = \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \middle| \mathcal{F}_t\right), \quad Z_t^i = Z_t^1 S_t^i.$$

Данный процесс является $\mathbf{P}$ -мартингалом и

$$Z_t = (Z_t^1, Z_t^1 S_t^i) \in \hat{H}(\text{ri } C_t) = \text{ri } K_t^* \quad \text{п.н.}$$

Следовательно, выполнено условие (b) теоремы 2.

Пусть теперь выполнено условие (b) теоремы 2 и Z — процесс, указанный в этом условии. Снова, следуя [16], введем эквивалентную $\mathbf{P}$ вероятностную меру $\mathbf{Q}$ с плотностью $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = Z_T^1/Z_0^1$ и $\mathbf{Q}$ -мартингал $S_t = (Z_t^2/Z_t^1, \dots, Z_t^d/Z_t^1)$. Очевидно, что $S_t \in \text{ri } C_t$ п.н. при всех t и выполнено условие (b) теоремы 3.

Эквивалентность условий (c) теорем 2 и 3 вытекает из равенств

$$W_t = H(V_t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.11)$$

которые устанавливаются ниже.

В соответствии с формулой (3.9) имеем

$$H(V_T) = H(C_T) = K_T^* = W_T.$$

Пусть $W_{t+1} = H(V_{t+1})$. Учитывая, что множества $C_t(\omega)$ ограничены, воспользуемся формулой (3.6), а также формулами (3.4), (3.10), (3.7):

$$\begin{aligned} H(V_t) &= \text{cl } H(\text{ri } C_t \cap \text{ri } X_t) = \text{cl } \hat{H}(\text{ri } C_t \cap \text{ri } X_t) \\ &= \text{cl } (\hat{H}(\text{ri } C_t) \cap \hat{H}(\text{ri } X_t)) = \text{cl } (\text{ri } K_t^* \cap \text{ri } H(X_t)). \end{aligned}$$

Далее, по определению X_t и формулам (3.5), (3.3), (3.8) (с учетом ограниченности $V_{t+1}(\omega)$ и формулы (3.6)) находим

$$\begin{aligned} \text{cl } H(X_t) &= \text{cl } H(\text{cl } (\text{conv } \mathcal{X}(V_{t+1}, \mathcal{F}_t))) = \text{cl } H(\text{conv } \mathcal{X}(V_{t+1}, \mathcal{F}_t)) \\ &= \text{cl } (\text{conv } H(\mathcal{X}(V_{t+1}, \mathcal{F}_t))) = \text{cl } (\text{conv}(\text{cl } H(\mathcal{X}(V_{t+1}, \mathcal{F}_t)))) \\ &= \text{cl } (\text{conv } \mathcal{X}(H(V_{t+1}), \mathcal{F}_t)) = \text{cl } (\text{conv } \mathcal{X}(W_{t+1}, \mathcal{F}_t)) \\ &= Y_t. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, $H(V_t) = \text{cl } (\text{ri } K_t^* \cap \text{ri } Y_t) = W_t$ и верны равенства (3.11). Теорема доказана.

4. О построении арбитражных стратегий. Пусть нарушается условие (c) теоремы 2 и n — наибольший номер, для которого $W_n = \emptyset$ на множестве A_n положительной меры. Следуя рассуждениям доказательства импликации (a) $\Rightarrow$ (b) теоремы 1 (при $G_t = K_t$), рассмотрим произвольный элемент

$$-x_n \in L^0((K_n^* - Y_n)^* \setminus (K_n^* - Y_n)^\perp I_{A_n} + (K_n^* - Y_n)^* I_{\Omega \setminus A_n}, \mathcal{F}_n).$$

Данный элемент характеризуется тем, что $x_n \in L^0(-K_n \cap Y_n^*, \mathcal{F}_n)$ и $x_n(\omega)$ собственно разделяет множества $K_n^*(\omega)$ и $Y_n(\omega)$ для почти всех $\omega \in A_n$.

Элемент x_n допускает представление

$$x_n = - \sum_{t=n+1}^T x_t, \quad x_t \in L^0(-K_t, \mathcal{F}_t),$$

и для набора $\{x_t\}_{t=0}^T$, где $x_t = 0$, $t < n$, нарушается условие (d) теоремы 2 (см. доказательство теоремы 1). Следовательно, существует такой номер $m \geq n$, что $x_m \notin F_m = K_m \cap (-K_m)$ на множестве $B_m \in \mathcal{F}_m$ положительной меры.

Пусть $\tilde{\Pi}$ — процесс цен покупки-продажи, удовлетворяющий (2.1). Тогда $\text{int}(-K(\tilde{\Pi}_m)) \supset -K_m \setminus F_m$ [16, лемма 2.5] и существует случайный вектор $\varepsilon_m \in L^0(\mathbf{R}_+^d, \mathcal{F}_m)$, не равный нулю на B_m и такой, что $x_m + \varepsilon_m \in -K(\tilde{\Pi}_m)$ п.н.

Положим $\varepsilon_t = 0$, $t \neq m$ и введем процесс портфеля θ по формулам

$$\theta_{-1} = 0, \quad \theta_t = \theta_{t-1} + x_t + \varepsilon_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Данный портфель является самофинансируемым и арбитражным для процесса $\tilde{\Pi}$:

$$\theta_T = \sum_{t=0}^T (\theta_t - \theta_{t-1}) = \varepsilon_m \in A_T(\tilde{\Pi}) \cap (L^0(\mathbf{R}_+^d, \mathcal{F}_T) \setminus \{0\}).$$

П р и м е р. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, алгебра $\mathcal{F}$ порождается одноточечными множествами, $\mathbf{P}(\omega_i) > 0$, $i = 1, 2$, и $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$. Рассмотрим модель с банковским счетом (при $T = 2$, $d = 3$), в которой множества C_t имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_0 &= [2, 6] \times [2, 6], & C_1 &= [4, 8] \times [4, 8]; \\ C_2(\omega_1) &= [9, 9] \times [6, 6], & C_2(\omega_2) &= [4, 4] \times [1, 1]. \end{aligned}$$

По формуле (1.1)

$$\mathcal{K}(V_2, \mathcal{F}_1) = \mathcal{K}(C_2, \mathcal{F}_1) = C_2(\omega_1) \cup C_2(\omega_2).$$

Следовательно, множество $X_1 = \text{cl}(\text{conv } \mathcal{K}(V_2, \mathcal{F}_1))$ представляет собой отрезок, соединяющий точки $(4, 1)$ и $(9, 6)$, а множество $V_1 = \text{cl}(\text{ri } C_1 \cap \text{ri } X_1)$ — отрезок, соединяющий точки $(7, 4)$ и $(8, 5)$ (см. рис. 1).

Далее находим

$$X_0 = \text{cl}(\text{conv } \mathcal{K}(V_1, \mathcal{F}_0)) = V_1, \quad V_0 = \text{cl}(\text{ri } C_0 \cap \text{ri } X_0) = \emptyset.$$

По теореме 3 на рассматриваемом рынке нарушается условие NA^r и имеется арбитражная стратегия. Для ее построения, согласно изложенной выше схеме, следует сначала найти элемент $x_0 \in -K_0$, собственно

разделяющий конусы $K_0^* = H(C_0)$ и $Y_0 = \text{cl } H(X_0) = H(X_0)$ (здесь использованы формулы (3.9), (3.12)).

Рис. 1. Пример рынка, на котором существует трехшаговая арбитражная стратегия.

Заметим, что если элемент $p \in \mathbf{R}^{d-1}$ собственно разделяет множества $A, B \subset \mathbf{R}^{d-1}$ и

$$\langle p, \xi \rangle \leq \alpha \leq \langle p, \eta \rangle, \quad \xi \in A, \quad \eta \in B,$$

то элемент $-x = (\alpha, -p) \in H(A)^*$ собственно разделяет конусы $H(A)$, $H(B)$.

Поскольку $p = (1, 0)$ собственно разделяет множества C_0, X_0 и $\langle p, \eta \rangle \geq 7$, $\eta \in X_0$, заключаем, что элемент $x_0 = (-7, 1, 0)$ является искомым.

Следующий шаг состоит в построении разложения $-x_0 = x_1 + x_2$, $x_1 \in -K_1$, $x_2 \in -K_2(\omega)$ (вектор x_2 является $\mathcal{F}_1$ -измеримым, т.е. постоянным). Найдем сопряженные конусы:

$$K_1^* = H(C_1) = \text{cone}\{(1, 4, 4), (1, 8, 4), (1, 4, 8), (1, 8, 8)\};$$

$$K_2^*(\omega_1) = H(C_2(\omega_1)) = \text{cone}\{(1, 9, 6)\},$$

$$K_2^*(\omega_2) = H(C_2(\omega_2)) = \text{cone}\{(1, 4, 1)\}.$$

Для определения $x_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$, $i = 1, 2$, получаем следующую систему линейных уравнений и неравенств:

$$x_1^1 + x_2^1 = 7, \quad x_1^2 + x_2^2 = -1, \quad x_1^3 + x_2^3 = 0,$$

$$x_1^1 + 4x_1^2 + 4x_1^3 \leq 0, \quad x_1^1 + 8x_1^2 + 4x_1^3 \leq 0,$$

$$x_1^1 + 4x_1^2 + 8x_1^3 \leq 0, \quad x_1^1 + 8x_1^2 + 8x_1^3 \leq 0,$$

$$x_2^1 + 9x_2^2 + 6x_2^3 \leq 0, \quad x_2^1 + 4x_2^2 + x_2^3 \leq 0.$$

Нетрудно проверить, что единственное решение данной системы имеет вид $x_1 = (4, 0, -1)$, $x_2 = (3, -1, 1)$.

Пусть цены активов выражены в условных единицах (у.е.). Стратегия θ : $\theta_{-1} = 0$, $\theta_t - \theta_{t-1} = x_t$, $t = 0, 1, 2$, имеет следующую интерпретацию. При $t = 0$ следует купить единицу второго актива по цене 6 у.е. и «потратить впустую» 1 у.е. При $t = 1$ осуществить короткую продажу единицы третьего актива, при этом на банковский счет поступит 4 у.е. При $t = 2$ продать единицу второго актива и купить единицу третьего. При этом на банковский счет поступит еще 3 у.е. В результате портфель θ_2 будет нулевым.

Поскольку при $t = 0$ нет необходимости тратить впустую 1 у.е., данный портфель легко превратить в арбитражный, заменив x_0 на $\tilde{x}_0 = (-6, 1, 0) \in -K_0$,

$$\tilde{x}_0 + x_1 + x_2 = (1, 0, 0) \in A_2(\Pi) \cap (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Тем более, данный портфель будет арбитражным при меньшей разнице цен покупки и продажи.

Отметим еще, что найденная арбитражная стратегия является трехшаговой: все приращения x_t , $t = 0, 1, 2$, построенного портфеля отличны от нуля. Двухшаговых арбитражных стратегий в рассмотренном примере не существует. Действительно, из анализа рис. 1 вытекает, что при удалении одного из шагов условие (с) теоремы 3 будет выполняться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beer G. A Polish topology for the closed subsets of a Polish space. — Proc. Amer. Math. Soc., 1991, v. 113, № 4, p. 1123–1133.
2. Dalang R. C., Morton A., Willinger W. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. — Stochastics Stochastics Rep., 1990, v. 29, № 2, p. 185–201.
3. Grigoriev P. G. On low dimensional case in the fundamental asset pricing theorem with transaction costs. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 1, p. 33–48.

4. *Himmelberg C. J.* Measurable relations. — *Fund. Math.*, 1975, v. 87, p. 53–72.
5. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. — *Finance Stoch.*, 1998, v. 2, № 3, p. 259–273.
6. *Jouini E., Kallal H.* Martingales and arbitrage in securities markets with transaction costs. — *J. Econom. Theory*, 1995, v. 66, № 1, p. 178–197.
7. *Kabanov Y. M.* Hedging and liquidation under transaction costs in currency markets. — *Finance Stoch.*, 1999, v. 3, № 2, p. 237–248.
8. *Kabanov Y., Rásonyi M., Stricker C.* No-arbitrage criteria for financial markets with efficient friction. — *Finance Stoch.*, 2002, v. 6, № 3, p. 371–382.
9. *Kabanov Y., Rásonyi M., Stricker C.* On the closedness of sums of convex cones in L^0 and the robust no-arbitrage property. — *Finance Stoch.*, 2003, v. 7, № 3, p. 403–411.
10. *Kabanov Y., Stricker C.* The Harrison–Pliska arbitrage pricing theorem under transaction costs. — *J. Math. Econom.*, 2001, v. 35, № 2, p. 185–196.
11. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. I. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002, 381 с.
12. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математике и экономике. М.: Наука, 1985, 352 с.
13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
14. *Рохлин Д. Б.* Расширенная версия теоремы Даланга–Мортон–Виллинджера при выпуклых ограничениях на портфель. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, т. 49, в. 3, с. 503–521.
15. *Рохлин Д. Б.* Задача о мартингальном выборе в случае конечного дискретного времени. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, т. 50, в. 3, с. 480–500.
16. *Schachermayer W.* The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. — *Math. Finance*, 2004, v. 14, № 1, p. 19–48.
17. *Srivastava S. M.* A Course on Borel Sets. New York: Springer-Verlag, 1998, 261 p. (Grad. Texts in Math., v. 180.)

Поступила в редакцию
15.XI.2005

Исправленный вариант
8.II.2006