Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Дороговцев, В. В. Бакунин, Случайные отображения и обобщенные аддитивные функционалы от винеровского процесса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 1, 43–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 03:22:09

© 2003 г.

ДОРОГОВЦЕВ А. А.*, БАКУН В. В.**

СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

В статье введено определение обобщенного аддитивного однородного функционала от винеровского процесса. Показано, что обобщенный функционал однозначно задается своей характеристикой, при этом роль порождающих функций играют функции из пространства Шварца S^* медленно растущих обобщенных функций.

Ключевые слова и фразы: обобщенные винеровские функционалы, кратные стохастические интегралы, аддитивные функционалы.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\{w(t); t \in [0; 1]\}$ — $\mathbf{R}$ -значный винеровский процесс на $[0; 1]$, заданный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и стартовый из нуля ($w(0) = 0$). Через $\tilde{w}$ обозначим процесс Маркова в $\mathbf{R}$ с винеровской переходной вероятностью на $[0; 1]$ (в терминологии [1] $\tilde{w}$ — марковский процесс, w — марковская случайная функция). Цель настоящей работы — исследование аддитивных функционалов от $\tilde{w}$ вида

$$\varphi_t^s = \int_s^t \kappa(\tilde{w}(r)) dr. \quad (1.1)$$

Здесь κ — обобщенная функция из пространства S^* функций медленного роста на $\mathbf{R}$. В том случае, когда κ есть δ -функция или, более общо, конечная мера, (1.1) превращается в локальное время для винеровского процесса. Рассмотрение функционалов типа (1.1) с произвольным κ требует определения соответствующего интеграла. В работах [2]–[5], [12] такие интегралы рассматривались как обобщенные случайные величины, определяемые наборами своих ядер из разложения Ито–Винера. При этом возникала необходимость в некоторой регуляризации, что приводило к потере свойства аддитивности. В этой статье мы вводим такое определение обобщенного аддитивного функционала от $\tilde{w}$,

*Институт математики НАН Украины, ул. Терещенковская, 3, 01601 Киев, Украина; e-mail: adoro@imath.kiev.ua

**Киевский политехнический институт, просп. Победы, 37, 252056 Киев, Украина.

которое включает в себя интегралы типа (1.1), исследуем (1.1) для различных обобщенных функций κ , приводим теорему, позволяющую восстановить κ по характеристике обобщенного аддитивного функционала.

2. Обобщенные случайные отображения, связанные с процессом $\tilde{w}$. Обозначим $\mathcal{F}^{s,t} = \sigma(w(\tau) - w(s), \tau \in [s; t])$ при $0 \leq s \leq t \leq 1$. Известно, что произвольная случайная величина $\alpha \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, будучи $\mathcal{F}^{s,t}$ -измеримой, однозначно представляется в виде

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^{s,t}(a_k),$$

где $I_k^{s,t}(a_k)$ — k -кратный интеграл Ито от симметричного ядра $a_k \in L_2([s; t]^k)$, $k \geq 1$, и

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k! \|a_k\|_k^2.$$

Здесь $\|a_k\|_k$ — норма в $L_2([s; t]^k)$, $k \geq 1$, $a_0 = \mathbf{E}\alpha \in \mathbf{R}$, $\|a_0\|_0 = |a_0|$. Обозначим через $W_{-p}^{s,t}$ для $p > 0$ пополнение $L_2(\Omega, \mathcal{F}^{s,t}, \mathbf{P})$ в норме

$$\|\alpha\|_{-p}^2 := \sum_{k=0}^{\infty} k! (k+1)^{-p} \|a_k\|_k^2.$$

Пространство $W_{-p}^{s,t}$ можно рассматривать как совокупность обобщенных случайных величин, имеющих порядок p (см. [5], [6]).

Пусть B — вещественное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Обобщенным случайным отображением порядка $p \geq 0$ пространства B в $\mathbf{R}$ называется измеримая функция $G: B \rightarrow W_{-p}^{0,1}$.

Отметим, что случайному отображению соответствует набор неслучайных измеримых функций-ядер $a_k: B \rightarrow L_2([0; 1]^k)$, с помощью которого G записывается формальным рядом

$$G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^{0,1}(a_k(u)).$$

Даже в том случае, когда порядок $p = 0$, т.е. когда значения G — это обычные случайные величины из $L_2(\Omega, \mathcal{F}^{0,1}, \mathbf{P})$, G может не быть заиндексированным $\omega \in \Omega$ набором «хороших» детерминированных функций (см. [7], [8]). Поэтому действие G на случайные элементы в B нуждается в дополнительном определении. В случае $p = 0$ такое определение было введено в [7], [9]. Здесь мы приводим модификацию на случай произвольного $p > 0$. Пусть ζ — случайный элемент в B , являющийся $\mathcal{F}^{0,1}$ -измеримым и такой, что

$$\forall k \geq 0: \mathbf{E}\|a_k(\zeta)\|_k^2 < +\infty.$$

Тогда для каждого $k \geq 0$ можно рассмотреть $L_2([0; 1]^k)$ -значное разложение Ито–Винера:

$$a_k(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} I_j^{0,1}(a_{kj}).$$

При каждом j здесь a_{kj} является симметричной $L_2([0; 1]^k)$ -значной функцией на $[0; 1]^j$, интегрируемой с квадратом. Поэтому, после симметризации по всем переменным из $[0; 1]$, из a_{kj} получается ядро Λa_{kj} , являющееся элементом пространства $L_2([0; 1]^{k+j})$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Случайный элемент ζ из B входит в область определения случайного отображения G , если формальный ряд

$$G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n I_j^{0,1}(\Lambda a_{n-j,j}) \right) \quad (2.1)$$

является элементом $W_{-p}^{0,1}$; сумма (2.1) называется значением G на ζ .

Следующий пример показывает, что в некоторых простых ситуациях определение 1.2 приводит к обычной суперпозиции.

Лемма 2.1. Пусть $F: C([0; 1]) \rightarrow \mathbf{R}$ — измеримая функция такая, что

$$\forall u \in C([0; 1]), \forall t \in [0; 1]: \quad \mathbf{E}F(W(u, t))^2 < +\infty,$$

где $W(u, t)(r) = u(r \wedge t) + w(r \vee t) - w(t)$, $r \in [0; 1]$.

Тогда для всякого $t \in [0; 1]$ соответствие

$$C([0; t]) \ni u \mapsto F(W(u, t)) = G_t(u)$$

является случайным отображением, принимающим значения в $L_2^{t,1}$. При этом для всех $s \in [0; t]$, $v \in C([0; s])$ случайный элемент $W(v, s, t)$ (где $W(v, s, t)(r) = v(r \wedge s) + w(r \wedge t) - w(r \wedge s)$) входит в область определения G_t и

$$G_t(W(v, s, t)) = G_s(v).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим измеримость G_t как отображения, действующего из $C([0; t])$ в $L_2^{t,1}$. Для этого заметим, что $L_2^{t,1}$ — сепарабельное гильбертово пространство, и, следовательно, достаточно убедиться в том, что для всякой случайной величины $\alpha \in L_2^{t,1}$ отображение

$$C_t: C([0; t]) \ni u \mapsto \mathbf{E}F(W(u, t)) \alpha$$

измеримо. Последнее следует из стандартных аргументов теории меры. Второе утверждение леммы следует из приведенного в [8] свойства суперпозиции независимых случайных L_2 -значных отображений.

Следующая лемма описывает свойства суперпозиции обобщенных случайных отображений.

Лемма 2.2. Пусть G — случайное отображение пространства $C([0; s])$ со значениями в $W_{-p}^{s,t}$ для некоторых $p > 0$, $0 < s < t \leq 1$, такое, что для любого $r \in (0; s)$ и любого $v \in C([0; r])$

$$\mathbf{E} \sum_{k=0}^{\infty} k! (k+1)^{-p} \|a_k(W(v, r, s))\|_k^2 < +\infty,$$

где $\{a_k\}$ — коэффициенты разложения Ито–Винера для G . Тогда при каждом $r \in (0; s)$ соответствие

$$C([0; r]) \ni v \mapsto G(W(v, r, s))$$

определено и является случайным отображением со значениями в $W_{-p-1}^{r,t}$.

Доказательство. Рассмотрим при фиксированном $k \geq 1$ случайное ядро $a_k(W(v, r, s))$. Это интегрируемая с квадратом случайная функция, не зависящая от приращений винеровского процесса на отрезке $[s; t]$. Поэтому, после разложения $a_k(W(v, r, s)) = \sum_{j=0}^{\infty} I_j^{r,s}(a_{kj})$ и соответствующей симметризации $a_{kj} \mapsto \Lambda a_{kj}$, $j \geq 0$, получим ядра, для которых ряд $\sum_{j=0}^{\infty} I_{k+j}^{r,t}(\Lambda a_{kj})$ сходится в $L_2^{r,t}$ к кратному интегралу Ито от случайного ядра $a_k(W(v, r, s))$ [7], [9]. При этом

$$\sum_{j=0}^{\infty} (k+j)! \|\Lambda a_{kj}\|_{k+j}^2 = \mathbf{E} \left[I_k^{s,t}(a_k(W(v, r, s))) \right]^2 = k! \mathbf{E} \|a_k(W(v, r, s))\|_k^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n! (n+1)^{-p-1} \left\| \sum_{j=0}^n \Lambda a_{n-j,j} \right\|_n^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} n! (n+1)^{-p} \sum_{j=0}^n \|\Lambda a_{n-j,j}\|_n^2 \\ &= \sum_{k,j=0}^{\infty} (k+j)! (k+j+1)^{-p} \|\Lambda a_{kj}\|_{k+j}^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-p} \sum_{j=0}^{\infty} (k+j)! \|\Lambda a_{kj}\|_{k+j}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k! (k+1)^{-p} \mathbf{E} \|a_k(W(v, r, s))\|_k^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Измеримость соответствующих ядер по v сейчас очевидна. Лемма доказана.

Пусть G — случайное отображение банахова пространства B , принимающее значения в $W_{-p}^{s,t}$, $0 < s < t < 1$, h — некоторое положительное число, меньшее $1 - t$. Определим сдвиг G вдоль траекторий процесса w на h .

О п р е д е л е н и е 2.3. Сдвиг $\theta_h G$ случайного отображения G — это случайное отображение, действующее из B в $W_{-p}^{s+h, t+h}$ по правилу

$$B \ni u \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} I_k^{s+h, t+h}(a_k(u)). \quad (2.2)$$

Здесь $\{a_k; k \geq 0\}$ — ядра из разложения Ито–Винера отображения G , кратные интегралы $I_k^{s+h, t+h}$ берутся по приращениям винеровского процесса $\{w(\tau) - w(s+h), \tau \in [s+h, t+h]\}$.

П р и м е р 2.1. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — борелевская ограниченная функция. Отображение G устроено следующим образом. Для фиксированных $0 < s < t < 1$

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \int_s^t f(x + w(r) - w(s)) dr = G(x).$$

Очевидно, что G — случайное отображение, принимающее значения в $L_2^{s, t}$. Сдвиг G на $h \in [0; 1-t]$ будет действовать по правилу

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \int_{s+h}^{t+h} f(x + w(r) - w(s+h)) dr.$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно выяснить, как связаны между собой разложения Ито–Винера случайных величин $\varphi(w(\tau) - w(s))$ и $\varphi(w(\tau+h) - w(s+h))$ для произвольной ограниченной борелевской функции φ . Имеем

$$\begin{aligned} & \varphi(w(r) - w(s)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbf{R}} \varphi(u) H_k\left(\frac{u}{\sqrt{r-s}}\right) p_{r-s}(u) du H_k\left(\frac{w(r) - w(s)}{\sqrt{r-s}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbf{R}} \varphi(u) H_k\left(\frac{u}{\sqrt{r-s}}\right) p_{r-s}(u) du \frac{1}{(\sqrt{r-s})^k} I_k^{s, r}\left(\mathbb{I}_{[s; r]}^{\otimes k}\right). \end{aligned}$$

Здесь $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} (d/dx)^k e^{-x^2/2}$ — k -й многочлен Эрмита со старшим коэффициентом 1, $k \geq 0$, $p_r(u) = (\sqrt{2\pi r})^{-1/2} \exp(-u^2/(2r))$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbf{R}} \varphi(u) H_k\left(\frac{u}{\sqrt{r-s}}\right) p_{r-s}(u) du \frac{1}{(\sqrt{r-s})^k} I_k^{s+h, r+h}\left(\mathbb{I}_{[s; r]}^{\otimes k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbf{R}} \varphi(u) H_k\left(\frac{u}{\sqrt{r-s}}\right) p_{r-s}(u) du \frac{1}{(\sqrt{r-s})^k} I_k^{s+h, r+h}\left(\mathbb{I}_{[s+h; r+h]}^{\otimes k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbf{R}} \varphi(u) H_k\left(\frac{u}{\sqrt{(r+h)-(s+h)}}\right) p_{(r+h)-(s+h)}(u) du \\ & \quad \times H_k\left(\frac{w(r+h) - w(s+h)}{\sqrt{(r+h)-(s+h)}}\right) = \varphi(w(r+h) - w(s+h)). \end{aligned}$$

Таким образом, определение 2.3 согласуется с обычным определением сдвига вдоль траекторий процесса w (см. [1]).

З а м е ч а н и е. Рассуждения примера можно распространить на произвольные квадратично интегрируемые функционалы от w .

Сформулируем теперь основное определение данной работы.

О п р е д е л е н и е 2.4. Обобщенный однородный аддитивный функционал G порядка $p \geq 0$ от процесса $\tilde{w}$ — это семейство обобщенных случайных отображений $\{G_\varepsilon^{s,t}; 0 < \varepsilon < s < t \leq 1\}$, заданных на $\mathbf{R}$ и удовлетворяющих условиям:

- 1) $G_\varepsilon^{s,t}: \mathbf{R} \rightarrow W_{-p}^{s-\varepsilon,t}$;
- 2) для любых $0 < \delta < \varepsilon < s < t \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E} \sum_{k=0}^{\infty} k! (k+1)^{-p} \|a_k(x + w(s-\delta) - w(s-\varepsilon), \delta, s, t)\|_k^2 < +\infty,$$

где $\{a_k(u, \delta, s, t); k \geq 0\}$ — ядра из разложения Ито–Винера для $G_\delta^{s,t}(u)$;

- 3) для любых $0 < \delta < \varepsilon < s \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$

$$G_\delta^{s,t}(x + w(s-\delta) - w(s-\varepsilon)) = G_\varepsilon^{s,t}(x);$$

- 4) для любых $0 < \varepsilon < s < t < 1$, $0 < h < 1-t$, $x \in \mathbf{R}$

$$\theta_h G_\varepsilon^{s,t}(x) = G_\varepsilon^{s+h, t+h}(x);$$

- 5) для любых $0 < \varepsilon < s < t < \tau \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$

$$G_\varepsilon^{s,\tau}(x) = G_\varepsilon^{s,t}(x) + G_{t-s+\varepsilon}^{t,\tau}(x).$$

Следующий пример показывает, что обычные аддитивные функционалы можно записать в терминах определения 2.4.

П р и м е р 2.2. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — ограниченная борелевская функция. Тогда функционал

$$\varphi_t^s(x) = \int_s^t f(x + w(r) - w(s)) dr, \quad x \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq s < t \leq 1,$$

является однородным аддитивным функционалом от $\tilde{w}$ [1].

Определим обобщенный аддитивный функционал G нулевого порядка по формуле для любых $0 < \varepsilon < s < t \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$

$$G_\varepsilon^{s,t}(x) = \int_s^t f(x + w(r) - w(s-\varepsilon)) dr.$$

Проверим, что G удовлетворяет условиям определения 2.4. Условие 1) выполнено. Сейчас $G_\varepsilon^{s,t}(x)$ — интегрируемая с квадратом случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}^{s-\varepsilon,t}$. Условие 2) сейчас ($p = 0$) превращается в верное соотношение. Действительно, если $G_\delta^{s,t}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^{s-\delta,t}(a_k(y, \delta, s, t))$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! \|a_k(y, \delta, s, t)\|_k^2 = \mathbf{E} \left(\int_s^t f(y + w(r) - w(s-\delta)) dr \right)^2 \leq C^2,$$

где $C = \sup_{\mathbf{R}} |f|$. Поэтому

$$\mathbf{E} \sum_{k=0}^{\infty} k! \left\| a_k(x + w(s - \delta) - w(s - \varepsilon), \delta, s, t) \right\|_k^2 \leq C^2.$$

Условия 3) и 5) выполнены очевидным образом. Условие 4) выполняется в силу рассуждений примера 2.1. Таким образом, обычный аддитивный однородный функционал φ можно отождествить сейчас с обобщенным функционалом G .

В приведенном примере отступление на ε кажется искусственным, однако, как будет показано в следующем пункте, оно необходимо, если f заменить обобщенной функцией ненулевого порядка.

3. Некоторые интегралы, связанные с винеровским процессом. В этом пункте интегралы типа $\int_0^t \kappa(w(s)) ds$, где $\kappa \in S^*$ — обобщенная функция медленного роста, определяются как обобщенные случайные величины из $W_{-p}^{0,t}$ и других пространств.

Определим вначале $\kappa(w(t))$, $t \in (0; 1]$. Так как $\kappa(\cdot/\sqrt{t})$ также является элементом S^* того же порядка, что κ , то достаточно определить $\kappa(w(1))$, а затем произвести очевидный пересчет.

О п р е д е л е н и е 3.1. Для обобщенной функции $\kappa \in S^*$ порядка $m \geq 0$ $\kappa(w(1))$ — это элемент $W_{-m-1}^{0,1}$, имеющий разложение Ито–Винера

$$\kappa(w(1)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} I_k^{0,1}(\Pi_{[0;1]}^{\otimes k}) \langle \kappa, H_k(\cdot) p_1(\cdot) \rangle. \quad (3.1)$$

Лемма 3.1. Ряд (3.1) сходится в $W_{-m-1}^{0,1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-m-1} (k!)^{-1} \langle \kappa, H_k(\cdot) p_1(\cdot) \rangle^2 \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} (k+1)^{-m-1} \|\kappa\|_{-m}^2 \\ & \quad \times \left[\sup_{x \in \mathbf{R}, \alpha \leq m} \left| \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(H_k(x) e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) (1+x^2)^{m/2} \right| \right]^2 \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-m-1} \|\kappa\|_{-m}^2 \\ & \quad \times \left[\sup_{x \in \mathbf{R}, \alpha \leq m} \left| \frac{\sqrt{(k+\alpha)!}}{\sqrt{k!}} \frac{H_{k+\alpha}(x)}{\sqrt{(k+\alpha)!}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1+x^2)^{m/2} \right| \right]^2 \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-m-1} \|\kappa\|_{-m}^2 (k+m)^m C_1 \left[\sup_{x \in \mathbf{R}, n \geq k} \left| \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!}} e^{-x^2/4} \right| \right]^2 \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\kappa\|_{-m}^2 C_1 C_2^2 (k+1)^{-m-1} (k+m)^m k^{-1/6} < +\infty. \end{aligned}$$

Здесь $C_1 = [\sup_{x \in \mathbf{R}} (\sqrt{2\pi})^{-1} (1 + x^2)^{m/2} e^{-x^2/4}]^2$, а константа C_2 взята из оценки (см. [10]):

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{n!}} |H_n(x) e^{-x^2/4}| \leq C_2 n^{-1/12}, \quad n \geq 1.$$

Лемма доказана.

Отметим, что обобщенная случайная величина $\varkappa(w(1))$ может быть в некоторых случаях получена как предел в $W_{-m-1}^{0,1}$ обычных случайных величин $\varkappa_\varepsilon(w(1))$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, где $\varkappa_\varepsilon$ — «сглаживание» $\varkappa$, т.е. свертка с p_ε .

Докажем данное утверждение для функций $\varkappa \in S^*$, являющихся обобщенными производными функций из $L_2(\mathbf{R})$.

Лемма 3.2. Пусть $\varkappa = D^m f$, $f \in L_2(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R})$, $m \geq 0$, т.е.

$$\langle \varkappa, \varphi \rangle = (-1)^m \int_{\mathbf{R}} f(x) \frac{d^m}{dx^m} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in S.$$

Тогда $\varkappa_\varepsilon(w(1)) \rightarrow \varkappa(w(1))$, $\varepsilon \rightarrow +0$, в $W_{-m-1}^{0,1}$.

Доказательство. Аналогично разложению $\varkappa(w(1))$ ряд Ито–Винера для $\varkappa_\varepsilon(w(1))$ имеет вид

$$\varkappa_\varepsilon(w(1)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} I_k^{0,1}(\Pi_{[0;1]}^{\otimes k}) (1 + \varepsilon)^{-k/2} \left\langle \varkappa, H_k \left(\frac{\cdot}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) p_{1+\varepsilon}(\cdot) \right\rangle.$$

Подставляя $\varkappa = D^m f$, получим

$$\varkappa_\varepsilon(w(1)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} I_k^{0,1}(\Pi_{[0;1]}^{\otimes k}) (1 + \varepsilon)^{-(k+m)/2} \left\langle f, H_{k+m} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) p_{1+\varepsilon}(\cdot) \right\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left\| \varkappa(w(1)) - \varkappa_\varepsilon(w(1)) \right\|_{-m-1}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-m-1} \left(\left\langle f, H_{k+m}(\cdot) p_1(\cdot) \right\rangle - (1 + \varepsilon)^{-(k+m)/2} \right. \\ & \quad \left. \times H_{k+m} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) p_{1+\varepsilon}(\cdot) \right\rangle^2 \frac{1}{k!} \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)^m}{(k+1)^{m+1}} (\langle f, H_{k+m}(\cdot) p_1(\cdot) \rangle)^2 (1 - (1 + \varepsilon)^{-(k+m)/2})^2 \frac{1}{(k+m)!} \\ & \quad + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)^m}{(k+1)^{m+1}} (1 + \varepsilon)^{-(k+m)} \\ & \quad \times \left(\left\langle f, H_{k+m}(\cdot) p_1(\cdot) - H_{k+m} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) p_{1+\varepsilon}(\cdot) \right\rangle \right)^2 \frac{1}{(k+m)!}. \end{aligned}$$

Так как $((k+m)!)^{-1}(\langle f, H_{k+m}(\cdot) p_1(\cdot) \rangle)^2 \leq C_3^2 (2\pi)^{-1} \|f\|^2 (k+m)^{-1/6}$, где использовано неравенство (см. [10]) $\sup_{x \in \mathbf{R}} |H_n(x)(n!)^{-1/2} e^{-x^2/2}| \leq C_3 n^{-1/12}$, $n > 0$, то первый ряд последней суммы, очевидно, стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Перейдем к оценке второго ряда. Обозначим

$$\begin{aligned} a_{k+m,\varepsilon}^2 &:= \left(\left\langle f, H_{k+m}(\cdot) p_1(\cdot) - H_{k+m} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right) p_{1+\varepsilon}(\cdot) \right\rangle \right)^2 \frac{1}{(k+m)!} \\ &= \left(\int_{\mathbf{R}} (f(x) - f(\sqrt{1+\varepsilon}x)) H_{k+m}(x) p_1(x) dx \right)^2 \frac{1}{(k+m)!}. \end{aligned}$$

Очевидно, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,\varepsilon}^2 = \int_{\mathbf{R}} (f(x) - f(\sqrt{1+\varepsilon}x))^2 p_1(x) dx = \|f(x) - f(\sqrt{1+\varepsilon}x)\|^2$$

составляет квадрат нормы функции $f(x) - f(\sqrt{1+\varepsilon}x)$, $x \in \mathbf{R}$, в пространстве $L_2(\mathbf{R}, e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi} dx)$. Обычным образом можно проверить, что $\|f(x) - f(\sqrt{1+\varepsilon}x)\|^2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Следовательно, и второй ряд в оценке квадрата нормы разности $\kappa(w(1)) - \kappa_\varepsilon(w(1))$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$, что и требовалось доказать.

Обозначим через A самосопряженное замыкание в $L_2(\mathbf{R})$ оператора

$$(Af)(x) = -f''(x) + (1+x^2)f(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad f \in S.$$

С помощью «сглаживающего» оператора A построим шкалу пространств вида

$$\tilde{S}_p := \left\{ \varphi \sim (\varphi_k): \|\varphi\|_{2,p}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k! \|(A^p)^{\otimes n} \varphi_n\|_n^2 < +\infty \right\}, \quad p \in \mathbf{R},$$

где $\varphi \sim (\varphi_k)$ — краткое обозначение разложения случайной величины φ по кратным интегралам Ито–Винера с симметричными ядрами $\varphi_n \in L_2([0; 1]^n) \subset L_2(\mathbf{R}^n)$.

Пространство $\tilde{S} = \bigcap_{p \geq 0} \tilde{S}_p$ является ядерным (с соответствующей системой норм $\{\|\cdot\|_{2,p}, p \geq 0\}$) и его сопряженное пространство есть

$$\tilde{S}^* = \bigcup_{p \geq 0} \tilde{S}_{-p}.$$

Элементы пространства $\tilde{S}^*$ называют распределениями Хиды.

Перейдем теперь к рассмотрению функционалов вида

$$L(t, \kappa) = \int_0^t \kappa(w(s)) ds.$$

Так как ядра разложения Ито–Винера для функции $\kappa(w(t))$ имеют особенность по переменной t в точке $t = 0$, то в общем случае трудно ожидать, чтобы функционал $L(t, \kappa)$ был обобщенным винеровским функционалом, и, следовательно, требуется некоторая его перенормировка.

Теорема 3.1. Пусть $\kappa \in S^*$ — обобщенная функция порядка $m \geq 0$ и $\kappa(w(s)) \sim (\varphi_k(s))$, $0 < s \leq 1$, $t \in (0; 1]$. Тогда существует такое $q_0 > 0$, что для всех $p > q_0$ функционал вида

$$\hat{L}(t, \kappa) := \int_0^t \left(\kappa(w(s)) - \sum_{k=0}^{m-1} I_k^{0,s}(\varphi_k(s)) \right) ds$$

является элементом $\tilde{S}_{-p}$.

Доказательство. Так как

$$\|A^{-p} \mathbb{I}_{[0;s]}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)^{-p} |\langle \mathbb{I}_{[0;s]}, e_n \rangle|^2 \leq s^2 C_4^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)^{-p},$$

где $C_4 = \sup_{x \in \mathbf{R}, n \geq 0} |e_n(x)|$, то найдется такое число $q_0 > 0$, что $\|A^{-q_0} \mathbb{I}_{[0;s]}\|_2^2 \leq s^2$. Здесь $\{e_n; n \geq 1\}$ — функции Эрмита $e_n(x) = (-1)^n (n!)^{-1/2} (2\sqrt{\pi})^{-n/2} e^{x^2/2} (d/dx)^n e^{-x^2}$, образующие собственный ортонормированный базис оператора A в $L_2(\mathbf{R})$.

Поэтому, учитывая, что симметричные ядра разложения функционала $\kappa(w(s))$ в кратные интегралы Ито–Винера имеют вид

$$\varphi_k(s) = \frac{1}{k!} \mathbb{I}_{[0;s]}^{\otimes k} s^{-k/2} \left\langle \kappa, H_k \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) p_s(\cdot) \right\rangle,$$

получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \left\| \kappa(w(s)) - \sum_{k=0}^{m-1} I_k^{0,s}(\varphi_k(s)) \right\|_{2,-p}^2 \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} k! \left\| (A)^{\otimes k} (\mathbb{I}_{[0;s]}^{\otimes k}) \right\|_2^2 \frac{s^k}{(k!)^2} \left| \left\langle \kappa, H_k \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) p_s(\cdot) \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-2k(p-q_0)} s^k \frac{1}{k!} \left| \left\langle \kappa, H_k \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) p_s(\cdot) \right\rangle \right|^2. \end{aligned}$$

Действуя так же, как и при доказательстве леммы 3.1, легко получить неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{k!}} \left| \left\langle \kappa, H_k \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) p_s(\cdot) \right\rangle \right| \\ &\leq C_2^2 \|\kappa\|_{-m}^2 \frac{(k+m)^m}{2\pi s^{m+1}} k^{-1/6} \sup_{s \in [0;1]} (1+x^2)^m e^{-x^2/(2s)}. \end{aligned}$$

Исследуя функцию $g(x) = (1+x^2)^m e^{-x^2/(2s)}$, $x \in \mathbf{R}$, легко показать, что она равномерно ограничена по $s \in (0; 1]$, т.е.

$$\sup_{x \in \mathbf{R}, s \in (0;1]} g(x) \leq C_5 = C_5(m).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left\| \kappa(w(s)) - \sum_{k=0}^m I_k^{0,s}(\varphi_k(s)) \right\|_{2, -(p+q_0)}^2 \\ & \leq C_5 C_2^2 \frac{\|\kappa\|_{-m}^2}{2\pi} \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-2n(p-q_0)} s^{k-m-1} (k+m)^m k^{-1/6}. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного $p > q_0$

$$\int_0^t \left\| \kappa(w(s)) - \sum_{k=0}^m I_k^{0,s}(\varphi_k(s)) \right\|_{2, -p} ds < +\infty,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Выбирая обобщенные функции $\kappa \in S^*$ так, чтобы происходило сглаживание ядер $\varphi_n(s)$ в точке $s = 0$, можно получить функционалы $L(t, \kappa)$, которые не требуют перенормировки.

Теорема 3.2. Пусть функция $\kappa \in S^*$ есть обобщенная производная порядка $m \geq 0$ некоторой функции $f \in L_2(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R})$ такой, что существуют производные $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0$. Тогда для произвольных $t \in [0; 1]$, $p > 0$

$$L(t, \kappa) \in \tilde{S}_{-p}.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \|\kappa(w(s))\|_{2, -p}^2 & \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2kp} \frac{1}{k!} \left| \left\langle D^m f, H_k \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) p_s(\cdot) \right\rangle \right|^2 \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2nk} \frac{(k+m)^m}{s^m} \left| \left\langle f, H_{k+m} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) p_s(\cdot) \right\rangle \right|^2 \frac{1}{(k+m)!}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$a_k(s) := \left\langle f, H_k \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) p_s(\cdot) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{k!}} = \int_{\mathbf{R}} f(\sqrt{s}x) H_k(x) p_1(x) dx \frac{1}{\sqrt{k!}}.$$

Так как

$$\frac{1}{s^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2(s) = \frac{1}{s^m} \int_{\mathbf{R}} f^2(\sqrt{s}x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq \frac{C_6}{s}$$

при достаточно малых $s > 0$, то, следовательно,

$$\int_0^t \|\kappa(w(s))\|_{2, -p} ds < +\infty, \quad p > 0, \quad t \in [0; 1],$$

и, таким образом, $L(t, \kappa) = \int_0^t \kappa(w(s)) ds \in \tilde{S}_{-p}$, $p > 0$. Теорема доказана.

Приведенные утверждения показывают, что «локальные времена», соответствующие обобщенным функциям из S^* , не могут быть обобщенными винеровскими функционалами из-за особенности ядер разложения

Ито–Винера в точке 0. Именно это обстоятельство мотивировало отступление на $\varepsilon > 0$ в основном определении 2.4. Как показывает следующий пункт, при этом удается сохранить все хорошие свойства обычных аддитивных функционалов.

4. Восстановление обобщенного аддитивного функционала по его характеристике. Пусть $G = \{G_\varepsilon^{s,t}; 0 < \varepsilon < s < t \leq 1\}$, как и в предыдущих пунктах, обобщенный аддитивный однородный функционал от винеровского процесса порядка m . Пусть

$$G_\varepsilon^{s,t}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^{s-\varepsilon,t}(a_k(x, \varepsilon, s, t))$$

— разложение Ито–Винера для G . Аналогом характеристики функционала G сейчас является $a_0(x, \varepsilon, s, t)$, $x \in \mathbf{R}$ (это слагаемое соответствует математическому ожиданию в разложении Ито–Винера квадратично-интегрируемой случайной величины). Цель настоящего пункта — восстановить G по его характеристике и определить обобщенную функцию κ , с помощью которой G задается как обобщенное локальное время, т.е. корректно определенный аналог интеграла (1.1).

Теорема 4.1. Пусть $G_\varepsilon^{s,t}(x)$ при фиксированном x имеет в пространстве $W_{-m}^{0,1}$ непрерывную на $0 < \varepsilon < s < t \leq 1$ производную по t $g_\varepsilon^{s,t}(x)$. Пусть нулевой член разложения Ито–Винера для $g_\varepsilon^{s,t}(x)$

$$\alpha_0(x, \varepsilon, s, t) = \frac{d}{dt} a_0(x, \varepsilon, s, t)$$

удовлетворяет условию

$$\exists C > 0: \forall \varphi \in S: \left| \int_{\mathbf{R}} \alpha_0(x, \varepsilon, s, t) \varphi(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{-m}.$$

Тогда функционал G является обобщенным локальным временем, отвечающим некоторой функции $\kappa \in S_{-m}$.

Доказательство. Так как G — однородный функционал, то для любых $0 < \varepsilon < s < t \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$ и $h \in (0, s - \varepsilon)$

$$a_0(x, \varepsilon, s, t) = a_0(x, \varepsilon, s - h, t - h).$$

Кроме того, для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon < s < t \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$

$$a_0(x, \varepsilon, s, t) = a_0(\cdot, \varepsilon_1, s, t) * p_{\varepsilon - \varepsilon_1}(x),$$

где, как и раньше, $p_{\varepsilon - \varepsilon_1}$ — переходная плотность винеровского процесса за время $\varepsilon - \varepsilon_1$. Поэтому, в силу аддитивности G , производная $\alpha_0(x, \varepsilon, s, t)$ зависит лишь от $t - s + \varepsilon$. Обозначим $\alpha_0(x, \varepsilon, s, t)$ через $f(x, t - s + \varepsilon)$. Функция f на $\mathbf{R} \times (0; 1]$ удовлетворяет уравнению

теплопроводности

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Рассмотрим последовательность $\{t_n; n \geq 1\}$ точек из $(0; 1]$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$. Функции $\{f(\cdot, t_n); n \geq 1\}$ как элементы S_{-m} образуют ограниченную последовательность. По теореме Банаха–Алаоглу существует подпоследовательность $\{f(\cdot, t_{n(k)}); k \geq 1\}$, слабо сходящаяся к некоторому $\varkappa \in S_{-m}$. Докажем, что

$$\forall t \in (0; 1]: f(x, t) = \varkappa * p_t(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Действительно, при достаточно больших номерах k

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in S_m: \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) f(x, t) dx &= \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) p_{t-t_{n(k)}} * f(\cdot, t_{n(k)})(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \varphi * p_{t-t_{n(k)}}(y) f(y, t_{n(k)}) dy. \end{aligned}$$

При этом свертка $\varphi * p_{t-t_{n(k)}}$ сходится к $\varphi * p_t$ при $k \rightarrow \infty$ в S_m . Следовательно,

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi * p_{t-t_{n(k)}}(y) f(y, t_{n(k)}) dy \rightarrow \langle \varphi * p_t, \varkappa \rangle, \quad k \rightarrow \infty.$$

Согласно свойствам свертки в S_{-m} , имеем $\langle \varphi * p_t, \varkappa \rangle = \langle \varphi, \varkappa * p_t \rangle$. Окончательно,

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x) f(x, t) dx = \langle \varphi, \varkappa * p_t \rangle, \quad \varphi \in S_m.$$

Поэтому $f(\cdot, t) = \varkappa * p_t$ как элемент пространства S_{-m} . Проверим теперь, что функционал G задается с помощью функции $\varkappa$ как обобщенное локальное время. Для этого достаточно проверить следующие два соотношения: для любых $0 < \varepsilon < s < t \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$

$$G_\varepsilon^{s,t} = \int_s^t g_\varepsilon^{s,r} dr, \quad (4.1)$$

$$g_\varepsilon^{s,r}(x) = \varkappa(x + w(r) - w(s - \varepsilon)). \quad (4.2)$$

Соотношение (4.1) получается стандартным образом с учетом непрерывности производной $\frac{d}{dt} G_\varepsilon^{s,t}(x) = g_\varepsilon^{s,t}(x)$ в гильбертовом пространстве $W_{-m}^{0,1}$. Проверим равенство (4.2). Согласно свойствам G ,

$$\begin{aligned} g_\varepsilon^{s,t}(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} [G_\varepsilon^{s,t+\Delta}(x) - G_\varepsilon^{s,t}(x)] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} [G_\varepsilon^{s,t}(x) + G_{t-s+\varepsilon}^{t,t+\Delta}(x) - G_\varepsilon^{s,t}(x)] = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} G_{t-s+\varepsilon}^{t,t+\Delta}(x). \end{aligned}$$

Поэтому для всякого $\delta \in (0; t - s + \varepsilon)$

$$g_\varepsilon^{s,t}(x) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} G_\delta^{t,t+\Delta}(x + w(t - \delta) - w(s - \varepsilon)). \quad (4.3)$$

Согласно определению действия случайного отображения, из (4.3) следует, что ядра слагаемых из разложения Ито–Винера для $g_\varepsilon^{s,t}(x)$ являются постоянными на соответствующих степенях отрезка $[s - \varepsilon; t]$. Теперь, с учетом равенства

$$g_\varepsilon^{s,t}(x) = g_\delta^{t-\delta,t}(x + w(t - 2\delta) - w(s - \varepsilon)),$$

получаем, что

$$g_\varepsilon^{s,t}(x) = f(x + w(t - 2\delta) - w(s - \varepsilon), 2\delta), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Переходя к пределу при $\delta \rightarrow +0$, получим

$$g_\varepsilon^{s,t}(x) = \kappa(x + w(t) - w(s - \varepsilon)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Теорема доказана.

П р и м е р 4.1. Локальное время в нуле как обобщенный аддитивный функционал. Рассмотрим аддитивный функционал от w , который задается соотношением

$$L(x, s, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_s^t \mathbb{I}_{[-\varepsilon; \varepsilon]}(x + w(r) - w(s)) dr,$$

где предел понимается в смысле сходимости по вероятности. Известно [11], что $L(x, s, t)$ можно переписать в виде

$$L(x, s, t) = 2(x + w(t) - w(s))_+ - 2(x)_+ - 2 \int_s^t \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(x + w(r) - w(s)) dw(r). \quad (4.4)$$

Из этой формулы следует, что отображение $G_\varepsilon^{s,t}(x) = L(x + w(s) - w(s - \varepsilon), s, t)$ является обобщенным аддитивным функционалом от w нулевого порядка, т.е. принимающим значения в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Проверим, что G удовлетворяет условиям теоремы 4.1 для $m = 1$. Для этого запишем разложение Ито–Винера для $G_\varepsilon^{s,t}(x)$. Найдем сначала разложение Ито–Винера отдельных слагаемых из (4.4).

Для любого $x \in \mathbf{R}$ и любого $t \in (0; 1]$

$$\begin{aligned} (x + w(t))_+ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbf{R}} (x + u)_+ H_k \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right) p_t(u) du H_k \left(\frac{w(t)}{\sqrt{t}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{\sqrt{t}^k} \int_{\mathbf{R}} (x + u)_+ H_k \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right) p_t(u) du I_k^{0,t}(\mathbb{I}_{[0;t]}^{\otimes k}), \\ \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(x + w(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(\sqrt{t})^k} \\ &\quad \times \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(x + u) H_k \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right) p_t(u) du I_k^{0,t}(\mathbb{I}_{[0;t]}^{\otimes k}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_s^t \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x + w(r) - w(s - \varepsilon)) dw(r) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_s^t \frac{1}{(\sqrt{r - s + \varepsilon})^k} \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x + u) H_k \left(\frac{u}{\sqrt{r - s + \varepsilon}} \right) \\
&\quad \times p_{r-s+\varepsilon}(u) du I_k^{s-\varepsilon, r}(\mathbb{I}_{[s-\varepsilon; r]}^{\otimes k}) dw(r) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} I_{k+1}^{s-\varepsilon, t} \left(\mathbb{I}_{\{r^* \in [s; t]\}} \mathbb{I}_{\{r_* \in [s-\varepsilon; t]\}} \frac{1}{(\sqrt{r^* - s + \varepsilon})^k} \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x + u) H_k \left(\frac{u}{\sqrt{r^* - s + \varepsilon}} \right) p_{r^*-s+\varepsilon}(u) du \right),
\end{aligned}$$

где $r_* = \min_{i=1, \dots, k+1} r_i$, $r^* = \max_{i=1, \dots, k+1} r_i$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
G_\varepsilon^{s, t}(x) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{1}{(\sqrt{t - s + \varepsilon})^k} I_k^{s-\varepsilon, t}(\mathbb{I}_{[s-\varepsilon; t]}^{\otimes k}) \right. \\
&\quad \times \int_{\mathbf{R}} (x + u)_+ H_k \left(\frac{u}{\sqrt{t - s + \varepsilon}} \right) p_{t-s+\varepsilon}(u) du \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^k} I_k^{s-\varepsilon, s}(\mathbb{I}_{[s-\varepsilon; s]}^{\otimes k}) \int_{\mathbf{R}} (x + u)_+ H_k \left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}} \right) p_\varepsilon(u) du \right] \\
&\quad - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} I_k^{s-\varepsilon, t} \left(\mathbb{I}_{\{r^* \in [s; t]\}} \mathbb{I}_{\{r_* \in [s-\varepsilon; t]\}} \frac{1}{(\sqrt{r^* - s + \varepsilon})^{k-1}} \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x + u) H_{k-1} \left(\frac{u}{\sqrt{r^* - s + \varepsilon}} \right) p_{r^*-s+\varepsilon}(u) du \right).
\end{aligned}$$

При фиксированных $k \geq 1$ k -е ядро из разложения Ито–Винера для функционала $G_\varepsilon^{s, t}(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
& 2 \mathbb{I}_{\{r^* \in [s; t]\}} \mathbb{I}_{\{r_* \in [s-\varepsilon; t]\}} \\
& \times \left(\frac{1}{k!} \frac{1}{(\sqrt{t - s + \varepsilon})^k} \int_{\mathbf{R}} (x + u)_+ H_k \left(\frac{u}{\sqrt{t - s + \varepsilon}} \right) p_{t-s+\varepsilon}(u) du \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{(\sqrt{r^* - s + \varepsilon})^{k-1}} \right. \\
& \quad \times \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x + u) H_{k-1} \left(\frac{u}{\sqrt{r^* - s + \varepsilon}} \right) p_{r^*-s+\varepsilon}(u) du \Big) \\
& - \frac{2}{k!} \frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^k} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon; s]}^{\otimes k} \int_{\mathbf{R}} (x + u)_+ H_k \left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}} \right) p_\varepsilon(u) du. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1. Пусть $f \in C^1([0; 1])$, $k \geq 1$. Тогда $L_2([0; 1]^k)$ -значная функция $h_k(t)$, $t \in [0; 1]$, заданная по правилу

$$h_k(t)(\tau_1, \dots, \tau_k) = \mathbb{I}_{[0;t]}^{\otimes k}(\tau_1, \dots, \tau_k)[f(t) - f(\tau^*)],$$

$$\tau_1, \dots, \tau_k \in [0; 1], \quad \tau^* = \max\{\tau_i; i = 1, \dots, n\},$$

непрерывно дифференцируема по t , причем

$$h'_k(t)(\tau_1, \dots, \tau_k) = \mathbb{I}_{[0;t]}^{\otimes k}(\tau_1, \dots, \tau_k) f'(t).$$

Доказательство. Рассмотрим $\lim_{\Delta \rightarrow -0} \Delta^{-1}(h(t + \Delta) - h(t))$ для $t \in (0; 1]$. Правосторонний предел рассматривается аналогично. При достаточно малом $|\Delta|$, $\tau_1, \dots, \tau_k \subseteq [0; 1]$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta}(h(t + \Delta) - h(t))(\tau_1, \dots, \tau_k) \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{\tau_i}^t \sum_{i=1}^k f'(r) dr \mathbb{I}_{[t+\Delta;t]}(\tau_i) \mathbb{I}_{[0;\tau_i]}^{\otimes k-1}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_k) \\ &+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^k \int_{t+\Delta}^t f'(r) dr \mathbb{I}_{[0;t+\Delta]}(\tau_i) \mathbb{I}_{[0;\tau_i]}^{\otimes k-1}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_k). \end{aligned}$$

Найдем L_2 -норму первого слагаемого:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta^2} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^k \int_{\tau_i}^t f'(r) dr \mathbb{I}_{[t+\Delta;t]}(\tau_i) \right. \\ & \quad \left. \times \mathbb{I}_{[0;\tau_i]}^{\otimes k-1}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_k) \right)^2 d\tau_1 \dots d\tau_k \\ &= \frac{1}{\Delta^2} k \int_{t+\Delta}^t \tau^{k-1} \left(\int_{\tau}^t f'(r) dr \right)^2 d\tau \leq \frac{1}{\Delta^2} k C^2 \int_{t+\Delta}^t \tau^{k-1} (t - \tau)^2 d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Delta^2} k C^2 \int_{t+\Delta}^t \tau^{k-1} (t - \tau)^2 d\tau \leq k C^2 |\Delta| \frac{1}{3} \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow -0. \end{aligned}$$

Здесь $C = \max\{|f'(r)|: r \in [0; 1]\}$.

Аналогично проверяется, что второе слагаемое сходится в L_2 -норме к

$$\sum_{i=1}^k f'(t) \mathbb{I}_{[0;t]}(\tau_i) \mathbb{I}_{[0;\tau_i]}^{\otimes k-1}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_k) = f'(t) \mathbb{I}_{[0;t]}^{\otimes k}(\tau_1, \dots, \tau_k).$$

Лемма доказана.

Для того чтобы воспользоваться леммой 4.1 при определении производных для ядер из разложения Ито–Винера для $G_\epsilon^{s,t}(x)$, отметим еще

следующие простые соотношения:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{R}} (x+u)_+ H_k \left(\frac{u}{\sqrt{\tau}} \right) p_{\tau}(u) du &= \int_{\mathbf{R}} (x+v\sqrt{\tau})_+ H_k(v) p_1(v) dv, \\
 \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x+u) H_k \left(\frac{u}{\sqrt{\tau}} \right) p_{\tau}(u) du \\
 &= \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x+v\sqrt{\tau}) H_k(v) p_1(v) dv, \\
 H_k(v) &= v H_{k-1}(v) - H'_{k-1}(v), \quad k \geq 1, \\
 \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (x+v\sqrt{t})_+ H_k(v) p_1(v) dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x+v\sqrt{t}) v H_k(v) p_1(v) dv, \\
 \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x+v\sqrt{t}) H_k(v) p_1(v) dv &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{x}{\sqrt{t}} H_k \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) p_t(x),
 \end{aligned}$$

$t \in (0; 1]$. Теперь, с учетом приведенных равенств, получаем производные по t для ядер из разложения Ито–Винера для $G_{\varepsilon}^{s,t}(x)$. При $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (x+u)_+ p_{t-s+\varepsilon}(u) du \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{t-s+\varepsilon}} \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x+v\sqrt{t-s+\varepsilon}) v p_1(v) dv \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x+u) \frac{u}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} p_{t-s+\varepsilon}(u) du = \frac{1}{2} p_{t-s+\varepsilon}(x).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $k \geq 1$ с учетом равенства (4.5). Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{2}{k!} \frac{1}{(\sqrt{t-s+\varepsilon})^k} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon;t]}^{\otimes k} \int_{\mathbf{R}} (x+u)_+ H_k \left(\frac{u}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} \right) p_{t-s+\varepsilon}(u) du \right. \right. \\
 \left. - \frac{2}{k!} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^k} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon;s]}^{\otimes k} \int_{\mathbf{R}} (x+u)_+ H_k \left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}} \right) p_{\varepsilon}(u) du \right] \\
 \left. - \frac{2}{k!} \frac{1}{(\sqrt{r^*-s+\varepsilon})^{k-1}} \mathbb{I}_{\{r^* \in [s;t]\}} \mathbb{I}_{\{r_* \in [s-\varepsilon;t]\}} \right. \\
 \left. \times \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x+u) H_{k-1} \left(\frac{u}{\sqrt{r^*-s+\varepsilon}} \right) p_{r^*-s+\varepsilon}(u) du \right\} \\
 = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2}{k!} \frac{1}{(\sqrt{t-s+\varepsilon})^k} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon;t]}^{\otimes k} \int_{\mathbf{R}} (x+v\sqrt{t-s+\varepsilon})_+ H_k(v) p_1(v) dv \right. \\
 \left. - \frac{2}{k!} \frac{1}{(\sqrt{r^*-s+\varepsilon})^{k-1}} \mathbb{I}_{\{r^* \in [s;t]\}} \mathbb{I}_{\{r_* \in [s-\varepsilon;t]\}} \right. \\
 \left. \times \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x+v\sqrt{r^*-s+\varepsilon}) H_{k-1}(v) p_1(v) dv \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2}{k!} \frac{1}{(\sqrt{t-s+\varepsilon})^{k-1}} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon; t]}^{\otimes k} \right. \\
&\quad \times \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(x+v\sqrt{t-s+\varepsilon}) H_{k-1}(v) p_1(v) dv \\
&\quad \left. - \frac{2}{k!} \frac{1}{(\sqrt{r^*-s+\varepsilon})^{k-1}} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon; t]}^{\otimes k} \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(x+v\sqrt{r^*-s+\varepsilon}) H_{k-1}(v) p_1(v) dv \right\} \\
&= \frac{2}{k!} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon; t]}^{\otimes k} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(\sqrt{t-s+\varepsilon})^{k-1}} \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(x+v\sqrt{t-s+\varepsilon}) H_{k-1}(v) p_1(v) dv \right) \\
&= \frac{2}{k!} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon; t]}^{\otimes k} \left\{ \frac{1}{2(\sqrt{t-s+\varepsilon})^k} \frac{x}{\sqrt{x-s+\varepsilon}} H_{k-1} \left(\frac{x}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} \right) p_{t-s+\varepsilon}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k-1}{2} \frac{1}{(\sqrt{t-s+\varepsilon})^{k+1}} \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(x+v\sqrt{t-s+\varepsilon}) H_{k-1}(v) p_1(v) dv \right\} \\
&= \frac{2}{k!} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon; t]}^{\otimes k} \left\{ \frac{1}{2(\sqrt{t-s+\varepsilon})^k} \frac{x}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} H_k \left(\frac{x}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} \right) p_{t-s+\varepsilon}(x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{k-1}{2} \frac{1}{(\sqrt{t-s+\varepsilon})^k} H_{k-2} \left(\frac{x}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} \right) p_{t-s+\varepsilon}(x) \right\} \\
&= \frac{1}{k!} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon; t]}^{\otimes k} \frac{1}{(\sqrt{t-s+\varepsilon})^k} p_{t-s+\varepsilon}(x) \\
&\quad \times \left\{ \frac{x}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} H_{k-1} \left(\frac{x}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} \right) - (k-1) H_{k-2} \left(\frac{x}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{k!} \mathbb{I}_{[s-\varepsilon; t]}^{\otimes k} \frac{1}{(\sqrt{t-s+\varepsilon})^k} H_k \left(\frac{x}{\sqrt{t-s+\varepsilon}} \right) p_{t-s+\varepsilon}(x).
\end{aligned}$$

Следовательно, с учетом уже встречавшейся оценки для многочленов Эрмита, $G_\varepsilon^{s,t}(x)$ имеет непрерывную производную по t в пространстве $W_{-1}^{0,1}$ и эта производная задает обобщенное случайное отображение порядка 1. Для того чтобы воспользоваться теоремой 4.1, рассмотрим нулевой член разложения Ито–Винера производной: $\alpha_0(x, \varepsilon, s, t) = p_{t-s+\varepsilon}(x)$. Для всякой $\varphi \in S$ сейчас

$$\left| \int_{\mathbf{R}} \alpha_0(x, \varepsilon, s, t) \varphi(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbf{R}} p_{t-s+\varepsilon}(x) \varphi(x) dx \right| \leq \max_{\mathbf{R}} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_0.$$

Следовательно, наш функционал G задается сейчас обобщенной функцией нулевого порядка, которая, как и следовало ожидать, является δ -функцией, сосредоточенной в точке 0:

$$\forall \varphi \in S: \quad \lim_{t-s+\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) \alpha_0(x, \varepsilon, s, t) dx = \varphi(0).$$

Приведенные вычисления могут быть без труда перенесены на случай, когда рассматривается аддитивный однородный функционал J от w , соответствующий конечной мере μ [1]. В этом случае J оказывается обобщенным однородным функционалом в смысле определения 2.4, порожденным конечной мерой μ , которая рассматривается как обобщенная функция порядка 0 на пространстве S .

З а м е ч а н и е. В статье рассматривался случай одномерного винеровского процесса, однако вышеизложенные рассуждения нетрудно адаптировать для случая размерности, большей единицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963, 860 с.
2. He S. W., Yang W. Q., Yao R. Q., Wang J. G. Local times of self-intersection for multidimensional Brownian motion. — Nagoya Math. J., 1995, v. 138, p. 51–64.
3. Imkeller P., Perez-Abreu V., Vives J. Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and renormalization. — Stochastic Process. Appl., 1995, v. 56, № 1, p. 1–34.
4. Watanabe H. The local time of self-intersections of Brownian motions as generalized Brownian functionals. — Letters in Math. Phys., 1991, v. 23, № 1, p. 1–9.
5. Watanabe S. Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1984, 118 p.
6. Hida T. Analysis of Brownian Functionals. Carleton Mathematical Lecture Notes, № 13. Ottawa: Carleton Univ., 1975, 61 p.
7. Дороговцев А. А. Стохастический анализ и случайные отображения в гильбертовом пространстве. Киев: Наукова думка, 1992, 120 с.
8. Скороход А. В. Случайные линейные операторы. Киев: Наукова думка, 1979, 200 с.
9. Дороговцев А. А. О суперпозиции случайных отображений в гильбертовом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 2, с. 124–130.
10. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: ИЛ, 1962, 500 с.
11. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 448 с.
12. Бакун В. В. Об обобщенном локальном времени для процесса броуновского движения. — Укр. матем. журн., 2000, т. 52, № 2, с. 157–164.

Поступила в редакцию
20.IV.2000