Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, Асимптотические и структурные теоремы для уравнения марковского восстановления, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 1, 62–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:50:02

© 2003 г.

ЕНГИБАРЯН Н. Б.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И СТРУКТУРНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассматривается уравнение многомерного восстановления

$$\varphi(t) = g(t) + \int_0^t [dF(x)] \varphi(t-x).$$

Здесь $g \in L_1^n(0; \infty)$, $F(t) = (F_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ ($n < \infty$), $F(t) = 0$ при $t \leq 0$, $F(t) \uparrow$, $r(A) = 1$, где $A = F(+\infty)$, $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A . В частном случае уравнения марковского восстановления имеем $\sum_{i=1}^n F_{ij}(+\infty) = 1$.

Предполагается, что матрица A неразложима и некоторая сверточная степень меры dF обладает нетривиальной абсолютно непрерывной компонентой. Доказано, что тогда решение уравнения марковского восстановления имеет вид: $\varphi(t) = \mu + \rho(t) + \psi(t)$, $\rho \in C_0^n[0; \infty)$, $\psi \in L_1^n(0; \infty)$. Если мера dF обладает конечным вторым моментом, то $\rho \in L_1^n(0; \infty)$. Получены явные формулы для μ и $\sigma = \int_0^\infty [\varphi(t) - \mu] dt$. Отсюда, в частности, следует асимптотическая формула для $\int_0^t \varphi(x) dx$.

Ключевые слова и фразы: структура и асимптотика решения уравнения многомерного восстановления.

§ 1. Введение

Рассмотрим уравнение марковского восстановления (УМВ), связанное с полумарковским процессом $\xi(t)$ (см. [1]–[6]):

$$\varphi(t) = g(t) + \int_0^t [dF(x)] \varphi(t-x). \quad (1.1)$$

Здесь $g \in L_1^n(0; \infty)$, $F(t) = (F_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ ($n < \infty$) — полумарковская матрица:

$$F(t) = 0, \quad t \leq 0; \quad F(t) \uparrow; \quad \sum_{i=1}^n F_{ij}(+\infty) = 1. \quad (1.2)$$

*Бюраканская астрофизическая обсерватория НАН РА, 378433 Бюракан, Армения;
e-mail: yengib@bao.sci.am

Матрицу-функцию F мы назовем *предъядром* уравнения (1.1).

В скалярном случае ($n = 1$) F является распределением вероятностей неотрицательной случайной величины.

Функция марковского восстановления H определяется из уравнения

$$H(t) = F(t) + \int_0^t [dF(x)] H(t-x). \quad (1.3)$$

Теория скалярного уравнения (1.1) (и (1.3)) достаточно хорошо развита в рамках теории восстановления (см. [7]–[9]). К центральным результатам асимптотической теории скалярного уравнения восстановления (УВ) относятся основная теорема восстановления Д. Блекуэлла и асимптотическая теорема В. Смита. Из теоремы Блекуэлла следует существование предела $\varphi(+\infty)$ в случае, когда распределение F неарифметическое, а функция g непосредственно интегрируема по Риману.

В теореме Смита построены первые два члена асимптотики функции восстановления в случае $\nu_2 < \infty$. Здесь и в дальнейшем используется следующее обозначение для моментов меры dF :

$$\nu_k = m_k(dF) = \int_0^\infty t^k dF(t) \leq \infty, \quad k \geq 0. \quad (1.4)$$

Теорема 1.1 (В. Смит). Пусть F — неарифметическое распределение и $\nu_1 < \infty$. Тогда

$$H(t) - \alpha t \rightarrow \beta, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\alpha = \nu_1^{-1}$, $\beta = \nu_2/(2\nu_1^2) - 1 \leq \infty$.

Если $\nu_2 < \infty$, то

$$H(t) = \alpha t + \beta + o(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Напомним, что распределение F называется неарифметическим, если оно не сосредоточено на некоторой решетке $\{kr\}$, $r > 0$, $k = 0, 1, \dots$.

Широкий и важный класс вероятностных распределений составляют распределения F абсолютно непрерывного типа, некоторая сверточная степень F^{p*} которых содержит нетривиальную абсолютно непрерывную компоненту.

В работе автора [10] доказана структурная теорема для скалярного уравнения восстановления. Из этой теоремы следует, что если F — распределение абсолютно непрерывного типа, то предел $\varphi(\infty)$ существует при значительно более слабом ограничении на g , чем условие непосредственной интегрируемости по Риману, а именно: $g \in L_1(0; \infty)$, $g \in M(0; \infty)$, $g(+\infty) = 0$.

Вопросы асимптотического поведения решения системы (1.1) в $+\infty$ изучены в ряде работ (см. [1]–[6]). Они представляют известный интерес

в теории надежности, теории массового обслуживания, теории стохастических автоматов, исследовании операций, теории ветвящихся процессов и др. Одним из основных фактов в этом направлении является следующее обобщение на многомерный случай теоремы Блекуэлла, которое в той или иной степени общности было доказано в работах [2]–[5], [11] и др.

Теорема 1.2. Пусть $\xi(t)$ — неприводимый возвратный полумарковский процесс, $n \leq \infty$. Тогда

$$H_{ij}(t) - H_{ij}(t - r) \rightarrow \frac{r}{\mu_{jj}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad \forall i, j, \forall r > 0,$$

где μ_{ii} — среднее время возвращения в i -е состояние.

Получить асимптотические теоремы для УМВ (1.3) не удавалось и пришлось ограничиться асимптотическими формулами для преобразования Лапласа–Стилтьеса функции H (см. [1]).

В работе автора [6] предложен метод треугольной факторизации матричной структуры конечномерного УМВ (1.1). Этот подход дает возможность распространить, в достаточно общей форме, на многомерный случай различные свойства решения скалярного УВ.

Аналогично элементарной теореме восстановления, теорема Смита не приводит к адекватному описанию свойств решения УВ (1.1), если свободный член является (в том или ином смысле) интегрируемой функцией на полуоси. Поэтому представляют интерес такие формы асимптотических и предельных теорем, которые допускают распространение на общие уравнения (1.1) с интегрируемым свободным членом.

В настоящей работе путем применения подходов и результатов работ [6] и [10] получены новые асимптотические и структурные теоремы по скалярному и многомерному УВ (1.1).

§ 2. Обозначения и вспомогательные предложения

2.1. Алгебраические объекты. Пусть $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}_n$ — пространства n -мерных вектор-столбцов и вектор-строк соответственно; $\mathbf{R}^{n \times n}$ — алгебра $(n \times n)$ -матриц с единицей I . Через A^T обозначается матрица или вектор, транспонированные к A . Неравенства типа $>$ и $\geq$ между матрицами или векторами понимаются поэлементно. Запись $A \succ B$ означает, что $A \geq B$, $A \neq B$.

Через $r(A)$ обозначается спектральный радиус матрицы A .

Введем в рассмотрение класс $P_N \subset \mathbf{R}^{n \times n}$ неотрицательных неразложимых (неприводимых) матриц (см. [12]). Согласно теореме Перрона–Фробениуса, число $\lambda = r(A)$ является простым собственным значением матрицы $A \in P_N$, которому соответствуют положительные, правый и

левый, собственные векторы:

$$A\eta = \lambda\eta, \quad \varsigma A = \lambda\varsigma, \quad \eta \in \mathbf{R}^n, \quad \varsigma \in \mathbf{R}_n, \quad \eta, \varsigma > 0. \quad (2.1)$$

2.2. Классы функций. Введем в рассмотрение следующие банаховы пространства определенных на $[0; \infty)$ скалярных функций: $L_1, M, M_0, C_0, \text{VAR}$. Здесь M — пространство ограниченных в существенном функций; $M_0 \subset M$ и $C_0 \subset C[0; \infty)$ состоят из функций f таких, что $f(\infty) = 0$. Пространство $\text{VAR} \subset M$ состоит из непрерывных слева функций f ограниченной вариации, для которых $f(0) = 0$, с нормой $\|f\|_{\text{VAR}} = V_0^\infty f$.

Пусть E — одно из указанных банаховых пространств.

Через E^n и $E^{n \times n}$ обозначаются пространства вектор-столбцов и матриц-функций соответственно с элементами из E .

Обозначим через $\text{MON} \subset \text{VAR}$ конус неубывающих функций.

Нами будут рассмотрены также линейные топологические пространства E_{loc} определенных на $[0; \infty)$ функций, принадлежащих $E[0; r]$ $\forall r < \infty$. Здесь $E[0; r]$ одно из пространств $C[0; r]$, $L_1(0; r)$, $M(0; r)$, $\text{VAR}[0; r]$.

2.3. Свертка и моменты функций и мер. Определим свертку $f \bullet g$:

$$(f \bullet g) = \int_0^t f(t-x) g(x) dx,$$

где $f \in L_{\text{loc}}^{n \times n}$, а g — матрица-функция или вектор-столбец с элементами из L_{loc} .

Введем также следующую свертку:

$$(F * \varphi)(t) = \int_0^t [dF(x)] \varphi(t-x),$$

где $F \in \text{VAR}^{n \times n}$ ($n \geq 1$), а g — матрица-функция или вектор-столбец с элементами из E .

Имеет место следующая формула: если $F, \varphi \in \text{VAR}^{n \times n}$, то

$$(F * \varphi)(+\infty) = F(+\infty) \varphi(+\infty). \quad (2.2)$$

Класс $\text{VAR}^{n \times n}$ представляет собой сверточную алгебру с умножением $*$. Введем моменты скалярных или матричных функций и мер:

$$\tau_k(f) = \int_0^\infty t^k f(t) dt, \quad m_k(dF) = \int_0^\infty t^k dF(t), \quad k \geq 0.$$

В случае, когда некоторые компоненты f знакопеременные, интегралы в выражении для $\tau_k(f)$ предполагаются абсолютно сходящимися. Если $f \geq 0$, то ее моменты (покомпонентно) могут принимать также бесконечное значение.

Если $\tau_k(|f|) < \infty$, $\tau_k(|g|) < \infty$, то $\tau_k(|f \bullet g|) < \infty$ и

$$\tau_k(f \bullet g) = \sum_{p=0}^k C_k^p \tau_p(f) \tau_{k-p}(g).$$

2.4. Классы операторов. Обозначим через J единичный оператор. Введем следующие классы Ω и Ω_a интегральных операторов свертки. Если $\check{F} \in \Omega$, то $\check{F}\varphi = F * \varphi$, $F \in \text{VAR}^{n \times n}$.

Класс $\Omega_a \subset \Omega$ состоит из операторов с абсолютно непрерывными предъядрами: $\check{U}\varphi = U \bullet \varphi$, $U \in L_1^{n \times n}$.

Операторы из указанных классов ограничено действуют в пространствах E и в ряде других пространств.

Классы Ω и Ω_a являются алгебрами. Предъядром произведения $\check{F}\check{T}$, где $\check{F}, \check{T} \in \Omega$, является свертка $F * T$ их предъядер. Ядром произведения $\check{U}\check{V}$, где $\check{U}, \check{V} \in \Omega_a$, является свертка $U \bullet V$ их ядер.

Пусть $\check{F} \in \Omega$, где $F \in \text{MON}^{n \times n}$. Пусть $A = F(+\infty)$, $\lambda = r(A)$. Если $\lambda < 1$, то оператор $J - \check{F}$ обратим в пространствах E ; если $\lambda = 1$, то $J - \check{F}$ необратим.

2.5. Существование моментов. Рассмотрим вопрос существования моментов решения уравнения вида (1.1) с обратимым оператором, в зависимости от конечности моментов у dF и g .

Перепишем уравнение (1.1) в операторной форме

$$(J - \check{F})\varphi = g. \quad (2.3)$$

Рассмотрим также тот частный случай уравнения (2.3), когда предъядро F абсолютно непрерывно, $F'(x) = U(x) \in L_1^{n \times n}$:

$$\varphi(t) = \gamma(t) + \int_0^t U(t-x)\varphi(t)dt, \quad \text{или} \quad (J - \check{U})\varphi = \gamma. \quad (2.4)$$

Лемма 2.1. а) Пусть в уравнении (2.4) (ядро которого может быть знакопеременным) оператор $J - \check{U}$ обратим в L_1^n и $\tau_k(|U|) < \infty$, $\tau_k(|\gamma|) < \infty$ при некотором $k \geq 0$. Тогда $\tau_k(|\varphi|) < \infty$.

б) Пусть в уравнении (1.1) $F \in \text{MON}^{n \times n}$, $r[F(+\infty)] < 1$, $m_k(dF) < \infty$, $\tau_k(|g|) < \infty$, $k \geq 0$. Тогда $\tau_k(|\varphi|) < \infty$.

Доказательство. Лемма будет доказана методом (неполной) индукции. Конечность нулевого момента решения (2.4) следует из обратимости оператора $J - \check{U}$ в L_1^n .

Предположим, что φ обладает конечными моментами вплоть до порядка $p-1$, $1 \leq p \leq k$. Тогда $U_q(t) \equiv t^q U(t) \in L_1^n$, $\gamma_q(t) \equiv t^q \gamma(t) \in L_1^n$, $q \leq k$; $\varphi_q(t) \equiv t^q \varphi(t) \in L_1^n$, $q < p$. Умножая обе части (2.4) на x^p , получаем соотношение

$$\varphi_p = \left[\gamma_p + \sum_{q=0}^{p-1} C_p^q U_{p-q} * \varphi_q \right] + U * \varphi_p,$$

которое представляет собой уравнение относительно φ_p с суммируемым свободным членом и обратимым оператором. Поэтому $\varphi_p \in L_1^n$. Второе утверждение леммы доказывается сходным образом. Лемма доказана.

§ 3. Скалярное уравнение

3.1. Преобразование уравнения с абсолютно непрерывным предъядром. Рассмотрим скалярное УВ (вида (2.4))

$$\varphi = \gamma + u \bullet \varphi \quad (3.1)$$

в случае, когда ядро u является плотностью распределения неотрицательной случайной величины:

$$u \in L_1^+, \quad u \geq 0, \quad \int_0^\infty u(t) dt = 1. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) с условиями (3.2) является частным случаем скалярного уравнения (1.1), когда предъядро F абсолютно непрерывно. Тогда $F'(t) = u(t)$, $H'(t) = h(t)$. Плотность восстановления h определяется из УВ

$$h = u + u \bullet h. \quad (3.3)$$

Имеет место формула

$$\varphi = \gamma + h \bullet \gamma. \quad (3.4)$$

Рассмотрим вопрос о структуре решения уравнения (3.4) при предположении конечности первого момента ядра:

$$\tau_1(u) < \infty. \quad (3.5)$$

Введем функцию

$$h_1(t) = h(t) - \mu, \quad (3.6)$$

где $\mu = [\tau_1(u)]^{-1} > 0$.

Из (3.6) и (3.4) получаем уравнение:

$$h_1 = u_1 + u \bullet h_1, \quad (3.7)$$

где $u_1(t) = u(t) - \mu \int_t^\infty u(x) dx$. Из (3.5) следует $u_1 \in L_1$. Если $\tau_k(u) < \infty$, то $\tau_{k-1}(|u_1|) < \infty$, $k \geq 1$. Легко проверить, что

$$\int_0^\infty u_1(t) dt = 0. \quad (3.8)$$

Из (3.7) получаем $h_1 = u_1 + h \bullet u_1$, или

$$h_1 = u_2 + u_1 \bullet h_1, \quad (3.9)$$

где $u_2(t) = u_1(t) - \mu \int_t^\infty u_1(x) dx$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \tau_1(u) < \infty &\implies u_2 \in L_1 + C_0; \quad \tau_2(u) < \infty \implies u_2 \in L_1; \\ \tau_k(u) < \infty &\implies \tau_{k-2}(|u_2|) < \infty, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Соотношение (3.9) можно рассматривать как УВ с ядром u_1 . Перепишем его в операторном виде

$$(J - \check{y}_1) h_1 = u_2, \quad (3.11)$$

где $\check{y}_1 \in \Omega_a$ — скалярный оператор свертки с ядром u_1 .

3.2. Обратимость оператора $J - \check{y}_1$. В настоящем пункте будет доказана обратимость $J - \check{y}_1$ в пространствах E . Тем самым будет установлено, что $h_1 \in L_1^+$ при $\tau_2(u) < \infty$.

Лемма 3.1. *Оператор $J - \check{y}_1$ обратим в пространствах E .*

Доказательство. Оператор $J - \check{y}_1$ можно рассматривать как частный случай интегрального оператора Винера–Хопфа второго рода. Поэтому для его обратимости необходимо и достаточно, чтобы его символ удовлетворял следующим условиям (см. [13], [14]):

$$\begin{aligned} 1 - \hat{u}_1(s) &\neq 0, \quad -\infty < s < \infty, \\ \kappa = \text{ind}[1 - \hat{u}_1] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg[1 - \hat{u}_1(s)] = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\hat{u}_1(s) = \int_0^\infty u_1(t) \exp(ist) dt$ (преобразование Фурье на полуоси). Проверим первое из условий (3.12). Нетрудно получить формулы

$$\begin{aligned} 1 - \hat{u}_1(s) &= [1 - \hat{u}(s)] \left(1 + i \frac{\mu}{s}\right), \quad s \neq 0, \quad 1 - \hat{u}_1(0) = 1, \\ 1 - \hat{u}(s) &= 2 \int_0^\infty u(t) \sin^2 \frac{st}{2} dt - i \int_0^\infty u(t) \sin st dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что если $s \neq 0$, то $\text{Re}[1 - \hat{u}(s)] > 0$. Поэтому $s = 0$ является единственным нулем $\text{Re}[1 - \hat{u}(s)]$ на вещественной оси. Первое из соотношений (3.13) показывает, что первое из условий (3.12) выполняется.

Рассмотрим теперь функцию $z = 1 - \hat{u}_1(s) \equiv \Lambda_1(s) + i\Lambda_2(s)$, $-\infty \leq s \leq +\infty$, график которой является замкнутой параметризованной

кривой Γ в комплексной плоскости. Имеем:

$$\Lambda_1(s) = 2 \int_0^\infty u(t) \sin^2 \frac{st}{2} dt + \frac{\mu}{s} \int_0^\infty u(t) \sin st dt,$$

$$\Lambda_2(s) = \frac{2\mu}{s} \int_0^\infty u(t) \sin^2 \frac{st}{2} dt - \int_0^\infty u(t) \sin st dt.$$

Пусть $\Lambda_2(s_0) = 0$, $s_0 \neq 0$. Тогда

$$\Lambda_1(s_0) = 2 \left(1 + \frac{\mu^2}{s_0^2} \right) \int_0^\infty u(t) \sin^2 \frac{s_0 t}{2} dt > 0.$$

С учетом (3.13) заключаем, что кривая Γ расположена в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси $(-\infty; 0]$. Поэтому индекс $\kappa = 0$. Лемма доказана.

Отметим, что обратимость оператора вида $J - \mathfrak{y}_1$ несколько иным способом была установлена в [15].

Рассмотрим теперь уравнение (3.7) при $\tau_2(u) < \infty$. Из обратимости $J - \mathfrak{y}_1$ и формул (3.10), (3.11), (3.6) вытекает следующая лемма.

Лемма 3.2. Пусть ядро u скалярного уравнения (3.1) удовлетворяет условиям (3.2) и обладает конечным вторым моментом. Тогда справедливы следующие утверждения.

а) Плотность восстановления h имеет вид

$$h(t) = [\tau_1(u)]^{-1} + h_1(t), \quad h_1 \in L_1. \quad (3.14)$$

Если ядро u обладает конечными моментами до порядка k включительно, то

$$\tau_{k-2}(|u_2|) < \infty, \quad \tau_{k-2}(|h_1|) < \infty, \quad k \geq 2. \quad (3.15)$$

б) Если $\gamma \in L_1$, $\tau_1(|\gamma|) < \infty$, то решение уравнения (3.1) имеет структуру

$$\varphi(t) = [\tau_1(u)]^{-1} \int_0^\infty \gamma(x) dx + \varphi_1(t), \quad \varphi_1 \in L_1. \quad (3.16)$$

Заметим, что из полученных выше результатов следует также теорема 1.2 в частном случае уравнения (3.1) с $\tau_1(u) < \infty$.

3.3. Случай $F_a(+\infty) > 0$. Целью настоящего пункта является распространение леммы 3.2 на скалярное уравнение (1.1) в случае, когда предъядро F является функцией распределения неотрицательной случайной величины и обладает нетривиальной абсолютно непрерывной компонентой. Тогда

$$F = F_a + F_1 \in \text{MON}, \quad \lambda \equiv F(+\infty) = 1, \quad F_a(+\infty) > 0. \quad (3.17)$$

Здесь F_a — абсолютно непрерывная компонента F , а F_1 — сумма сингулярной и дискретной компонент.

Мы будем следовать подходу работы [10]. Перепишем скалярное уравнение (1.1) в операторном виде (2.3). В силу $F_1(+\infty) < 1$ оператор $J - \check{F}_1$ обратим в E и (2.3) сводится к уравнению (3.1), где ядро u и свободный член γ определяются из следующих уравнений:

$$u(t) = F'_a(t) + \int_0^t u(t-x) dF_1(x), \quad (3.18)$$

$$\gamma(t) = g(t) + \int_0^t \gamma(t-x) dF_1(x). \quad (3.19)$$

Из (3.17) легко следует, что u удовлетворяет условиям (3.2). Применяя к уравнениям (3.18) и (3.19) лемму 2.1, мы делаем вывод о наличии моментов соответствующих порядков у функций u и γ в зависимости от свойств F . Объединяя полученные результаты с теоремой 5.1 работы [10], приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. Пусть предъядро скалярного уравнения восстановления (1.1) (или (2.3)) обладает свойствами (3.17) и $g \in L_1$. Тогда решение уравнения имеет структуру

$$\varphi(t) = \nu_1^{-1} \int_0^\infty g(x) dx + \rho(t) + \psi(t) \equiv \nu_1^{-1} \int_0^\infty g(x) dx + \omega(t), \quad (3.20)$$

где $\rho \in C_0$, $\psi \in L_1$; $\nu_k = m_k(dF) \leq \infty$, $k \geq 1$.

Если $g \in L_1 \cap M_0$ и $g(+\infty) = 0$, то

$$\psi(\infty) = 0, \quad \varphi(\infty) = \nu_1^{-1} \int_0^\infty g(x) dx. \quad (3.21)$$

Если $\nu_2 = m_2(dF) < \infty$, $m_1(|g|) < \infty$, то

$$\rho \in L_1, \quad \int_0^\infty \omega(t) dt = \frac{\nu_2}{2\nu_1^2} \tau_0(g) - \nu_1^{-1} \tau_1(g). \quad (3.22)$$

Если $\nu_k = m_k(dF) < \infty$, $\tau_{k-1}(|g|) < \infty$, $k \geq 2$, то $\tau_{k-2}(|\omega|) < \infty$.

§ 4. Уравнение марковского восстановления (УМВ)

В настоящем параграфе рассматривается система (1.1) при следующих условиях критичности на матричное предъядро F :

$$F \in \text{MON}^{n \times n}, \quad A \equiv F(+\infty) \in P_N, \quad \lambda \equiv r(A) = 1. \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует (см. (2.1)), что существуют положительные векторы η и ς такие, что

$$A\eta = \eta, \quad \varsigma A = \varsigma, \quad \eta \in \mathbf{R}^n, \quad \varsigma \in \mathbf{R}_n, \quad \eta, \varsigma > 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (1.1) с условиями (4.1) называется уравнением многомерного восстановления (см. [1]). Формально оно более общее, чем УМВ, так как матрица A может не быть стохастической. Однако уравнение (1.1), (4.1) простым матричным преобразованием сводится к УМВ.

Предполагается, что матрица-функция F является распределением абсолютно непрерывного типа.

Применяемый факторизационный подход подробно изложен в работе [6], поэтому мы ограничимся его схематическим описанием в следующих двух пунктах.

4.1. Факторизация матрицы $I - A$. Введем следующие подалгебры треугольных матриц $G^\pm$ алгебры $\mathbf{R}^{n \times n}$:

$$\begin{aligned} \text{если } B = (b_{ij}) \in G^+, \quad C = (c_{ij}) \in G^-, \\ \text{то } b_{ij} = 0, \quad j \geq i; \quad c_{ij} = 0, \quad j < i. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Обозначим через P_+ и P_- проекторы, переводящие $\mathbf{R}^{n \times n}$ в G^+ и G^- соответственно.

Рассмотрим факторизацию

$$I - A = (I - B)(I - C), \quad (4.4)$$

где матрица A определяется согласно (4.1), B и C суть искомые матрицы вида (4.3).

В [6] доказано существование факторизации (4.4), где матрицы B и C обладают свойствами:

$$\begin{aligned} 0 \leq C \in G^-, \quad C\eta = \eta, \quad c_{nn} = 1, \quad c_{kk} < 1, \quad k < n; \\ 0 \leq B \in G^+, \quad \varsigma - \varsigma B = (0, \dots, 0, \varsigma_n). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Имеем: $(I - B)^{-1} = I + \tilde{B} \equiv I + B + \dots + B^{n-1}$.

4.2. Факторизация оператора $J - \check{F}$. Введем следующие подалгебры $\Omega^\pm$ операторной алгебры Ω , введенной в п. 2.4: если $\check{V} \in \Omega^+$, $\check{W} \in \Omega^-$, то их предъядра $V(t) = (v_{ij}(t))$, $W(t) = (w_{ij}(t))$ принимают значения из G^+ и G^- соответственно, т.е. $v_{ij}(t) = 0$, $j \geq i$; $w_{ij}(t) = 0$, $j < i$.

Рассмотрим следующую факторизацию оператора $J - \check{F}$, фигурирующего в (2.3):

$$J - \check{F} = (J - \check{V})(J - \check{W}), \quad (4.6)$$

где $\check{V} \in \Omega^+$, $\check{W} \in \Omega^-$.

Из (4.6) получаем следующую систему уравнений гауссовской факторизации относительно искомым предъядер V, W :

$$V = P_+ F + P_+(V * W), \quad W = P_- F + P_-(V * W). \quad (4.7)$$

Рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$V_{k+1} = P_+ F + P_+ (V_k * W_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad V_0 = W_0 = 0, \quad (4.8)$$

$$W_{k+1} = P_- F + P_- (V_k * W_k),$$

Пусть выполнены условия (4.1). Тогда индукцией по k доказываются неравенства $0 \leq V_k \leq B$, $0 \leq W_k \leq C$, где B и C суть матрицы, фигурирующие в факторизации (4.4). Из монотонного возрастания по конусу MON и ограниченности последовательностей V_k, W_k следует их поэлементная сходимость в пространстве VAR .

Теорема 4.1. Пусть предъядро системы (2.3) удовлетворяет условиям (4.1). Тогда справедливы следующие утверждения:

а) имеет место факторизация (4.6); предъядра операторов $\check{V} \in \Omega^+$, $\check{W} \in \Omega^-$ обладают свойствами:

$$V, W \in \text{MON}, \quad V(+\infty) = B, \quad W(+\infty) = C; \quad (4.9)$$

матрицы B и C обладают свойствами (4.5).

б) для произвольного элемента F_{ij} матрицы F существуют $\alpha, \beta \in \text{MON}$, $\alpha(+\infty) > 0$ такие, что

$$W_{nn} = \alpha * F_{ij} + \beta. \quad (4.10)$$

Доказательство. Нам остается доказать (4.10). Достаточно рассмотреть случай $F_{ij}(+\infty) > 0$. Пусть $\tilde{F}$ — матрица, полученная из F аннулированием элемента F_{ij} . В силу неприводимости матрицы A имеем $\tilde{\lambda} \equiv r(\tilde{A}) < 1$, где $\tilde{A} = \tilde{F}(+\infty) \prec A$. Пусть $\tilde{V}_k, \tilde{W}_k$ определяются из итераций вида (4.8), в которых матрица F заменена на $\tilde{F}$. Очевидно, $\tilde{V}_k \leq V_k (\leq V)$, $\tilde{W}_k \leq W_k (\leq W)$. Поэтому итерации $\tilde{V}_k, \tilde{W}_k$ сходятся: $\tilde{V}_k \rightarrow \tilde{V} \leq V$, $\tilde{W}_k \rightarrow \tilde{W} \leq W$. Имеем $I - \tilde{A} = (I - \tilde{B})(I - \tilde{C})$, где $\tilde{B} = \tilde{V}(+\infty)$, $\tilde{C} = \tilde{W}(+\infty)$. Ясно, что $(\tilde{C})_{nn} < 1$. В противном случае обратимая матрица $I - \tilde{A}$ имела бы необратимый сомножитель $I - \tilde{C}$. С учетом равенства $c_{nn} = 1$ заключаем, что $(\tilde{W}_k)_{nn}(+\infty) < (\tilde{W}_k)_{nn}(+\infty)$, начиная с некоторого k . Поскольку функция $(W_k)_{nn}$ получается из элементов матрицы F путем применения операций сложения и свертывания, то $(W_k)_{nn} = \alpha * F_{ij} + (\tilde{W}_k)_{nn}$, где $\alpha(+\infty) > 0$. Ясно, что слагаемое $\alpha * F_{ij}$ сохраняется в выражении W_{nn} . Теорема доказана.

Из $V \in \Omega^+$ следует, что

$$(J - \check{V})^{-1} = J + \check{V} + \check{V}^2 + \dots + \check{V}^{n-1} \equiv J + \tilde{V}. \quad (4.11)$$

Из свойств (4.5) следует, что все скалярные операторы $J - W_{kk}$ обратимы, за исключением $J - W_{nn}$.

Рассмотрим теперь вопрос существования моментов у предъядер V, W . Можно показать, что

$$(m_k(dF) < \infty) \implies (m_k(dV) < \infty, m_k(dW) < \infty); \quad k \geq 0. \quad (4.12)$$

Доказательство основано на использовании рекуррентного характера уравнений гауссовской факторизации (4.7) относительно элементов искоемых матриц: эти соотношения либо чисто рекуррентны, либо представляют собой скалярные уравнения со сжимающими операторами U_{jj} , $j < n$. В последнем случае применяется лемма 2.1.

4.3. Применение факторизации (4.6) к уравнению (2.3). Факторизация (4.6) и формула (4.11) сводят УВ (2.3) к следующей системе с треугольным матричным ядром:

$$(J - \check{W})\varphi = \tilde{g}, \quad (4.13)$$

где

$$\tilde{g} = (I + \check{V})g. \quad (4.14)$$

Имеем: $(m_k(dF) < \infty, \tau_k(|g|) < \infty) \implies (\tau_k(|g|) < \infty), k \geq 0$.

Пусть выполнено условие

$$(F_{nn})_a(+\infty) > 0. \quad (4.15)$$

Из (4.7) следует, что тогда

$$(W_{nn})_a(+\infty) > 0. \quad (4.16)$$

Рассмотрим последнее из уравнений (4.13): $\check{W}_{nn}\varphi_n = \tilde{g}_n$. Оно представляет собой скалярное УВ относительно φ_n . Из (4.5) следует, что предъядро W_{nn} этого уравнения является функцией распределения неотрицательной случайной величины. Поэтому при выполнении (4.16) W_{nn} удовлетворяет условиям (3.17). При $g \in L_1^n$ к рассматриваемому уравнению может быть применена теорема 4.1: функция φ_n имеет структуру (3.20). Остальные уравнения системы (4.13) являются рекуррентными уравнениями относительно $\varphi_{n-1}, \dots, \varphi_1$ со сжимающими операторами. Поэтому структура вида (3.20) функции φ_n переходит на функции $\varphi_{n-1}, \dots, \varphi_1$. Нами доказана следующая лемма.

Лемма 4.1. Пусть матрица-ядро уравнения (1.1) удовлетворяет условиям (4.1) и (4.16). Тогда решение имеет вид

$$\varphi(t) = \mu + \rho(t) + \psi(t) \equiv \mu + \omega(t), \quad (4.17)$$

где $\rho \in C_0^n$, $\psi \in L_1^n$.

а) Если $g \in L_1^n \cap C_0^n$, то $\psi(\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = \mu$.

б) Если $\nu_2 = m_2(dF) < \infty$, $m_1(|g|) < \infty$, то $\rho \in L_1^n$, $\omega \in L_1^n$.

в) Если $\nu_k = m_k(dF) < \infty$, $\tau_{k-1}(|g|) < \infty$, $k \geq 2$, то $\tau_{k-2}(|\omega|) < \infty$.

4.4. Случай предъядра абсолютно непрерывного типа. Мы воспользуемся следующим определением распределения абсолютно непрерывного типа в многомерном случае $n > 1$. Матрицу-функцию $F \in \text{MON}^{n \times n}$ назовем распределением абсолютно непрерывного типа, если существует $p \geq 1$ такое, что

$$(F^{p\bullet})_a(+\infty) \succ 0. \quad (4.18)$$

Через $F^{p\bullet}$ обозначена сверточная p -я степень F .

Лемма 4.2. Пусть $F \in \text{MON}^{n \times n}$ является распределением абсолютно непрерывного типа и выполняется условие $A \equiv F(+\infty) \in P_N$. Тогда существует $q \geq 1$ такое, что

$$(F^{q\bullet})_a(+\infty) \succ 0, \quad F^{q\bullet}(+\infty) \in P_N. \quad (4.19)$$

Доказательство. Из (4.18) и неприводимости матрицы A легко следует, что $(F^{p\bullet})_a(+\infty) \succ 0 \quad \forall q \geq p$. Если число q и степень импримитивности матрицы A взаимно простые числа, то матрица $(F^{p\bullet})(+\infty) = A^q$ будет неприводимой. Лемма доказана.

Вернемся к рассмотрению уравнения (1.1). Предполагается, что его предъядро является распределением абсолютно непрерывного типа. Функция φ удовлетворяет следующему уравнению с предъядром $F^{q\bullet}$, где q выбрано согласно требованиям леммы 4.2:

$$\varphi = g^{(q)} + \check{F}^q \varphi, \quad (4.20)$$

где $g^{(q)} = g + \check{F}g + \dots + \check{F}^{(q-1)}g$. Нужные нам свойства вектора g легко переходят на вектор $g^{(q)}$. Если $m_k(dF) < +\infty$, то мера $dF^{q\bullet}$ также обладает конечным моментом порядка k . Из (4.19) и (4.10) следует свойство (4.16) для уравнения (4.20).

Применяя к уравнению (4.20) лемму 4.1, заключаем, что вектор-функция φ имеет структуру (4.17). В следующем параграфе будут найдены явные выражения для векторов μ и $\sigma = \int_0^\infty \omega(t) dt$.

§ 5. Основная теорема

5.1. Вычисление векторов μ и σ . Мы будем применять технику преобразования Лапласа. Обозначим (в отличие от § 3) через $\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ преобразование Лапласа функции f , при $s > 0$ или $s \geq 0$.

Введем следующие обозначения, связанные с предъядром уравнения (1.1):

$$A = F(+\infty), \quad F_0(t) = A - F(t) \geq 0. \quad (5.1)$$

Имеем

$$F_0(0) = A, \quad \tau_k(F_0) = \frac{1}{k+1} m_{k+1}(dF) \leq \infty, \quad k \geq 0; \quad (5.2)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} dF(t) = A - s\widehat{F}_0(s), \quad s \geq 0.$$

Пусть в уравнении (1.1) $g \in L_1^n$. Согласно формуле (4.17), имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(s) &= s^{-1}\mu + \widehat{\rho}(s) + \widehat{\psi}(s) = s^{-1}\mu + \widehat{\omega}(s), \\ \widehat{\rho}(s) &= o(s^{-1}), \quad \widehat{\psi}(s) = O(1), \quad \widehat{\omega}(s) = o(s^{-1}), \quad s \rightarrow 0+. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Применяя к уравнению (1.1) преобразование Лапласа, с учетом (5.2) и (5.3) получаем

$$[I - A + s\widehat{F}_0(s)] [s^{-1}\mu + \widehat{\omega}(s)] = \widehat{g}(s), \quad s > 0. \quad (5.4)$$

Умножая обе части (5.4) на s и устремляя s к $0+$, приходим к следующему уравнению относительно μ : $(I - A)\mu = 0$, откуда с учетом (4.2) и $A \in P_N$ (см. (4.1)) получаем

$$\mu = r\eta. \quad (5.5)$$

Постоянная r подлежит определению.

Умножая (5.4) слева на вектор ζ , с учетом (4.2) и (5.5) получаем

$$r\zeta\widehat{F}_0(s)\eta + s\zeta F_0(s)\widehat{\omega}(s) = \zeta\widehat{g}(s). \quad (5.6)$$

Совершая предельный переход при $s \rightarrow 0$ приходим к равенству

$$r = \varkappa^{-1}\zeta \int_0^\infty g(t) dt, \quad (5.7)$$

где $\varkappa = \zeta\nu_1\eta = \zeta m_1(dF)\eta \leq \infty$.

Если хотя бы одна компонента матрицы $m_1(dF)$ бесконечна, то $r = 0$.

Займемся получением формулы для $\sigma = \int_0^\infty \omega(t) dt$ в случае конечного $m_2(dF)$. Из (5.4) с учетом (5.5) получаем

$$(I - A)\sigma = \widehat{g}(0) - rm_1(dF)\eta. \quad (5.8)$$

Равенство (5.7) обеспечивает выполнение условия

$$\zeta[\widehat{g}(0) - rm_1(dF)\eta] = 0$$

разрешимости системы (5.8) с необратимой матрицей $I - A$. Общее решение (5.8) имеет вид

$$\sigma = \sigma_0 + \lambda\eta, \quad (5.9)$$

где σ_0 — некоторое решение уравнения (5.8), а постоянная λ подлежит определению.

Из (5.6) имеем

$$s^{-1}r\zeta[\widehat{F}_0(s) - \widehat{F}_0(0)]\eta + \zeta\widehat{F}_0(s)\widehat{\omega}(s) = s^{-1}\zeta[\widehat{g}(s) - \widehat{g}(0)]. \quad (5.10)$$

Совершая предельный переход при $s \rightarrow 0$, приходим к следующему выражению для постоянной λ :

$$\lambda = \frac{1}{2} \kappa^{-2} [\zeta m_2(dF) \eta] \left[\zeta \int_0^\infty g(t) dt \right] - \kappa^{-1} \zeta [m_1(dF) \sigma_0 + \tau_1(g)]. \quad (5.11)$$

Итак, вычислены важные величины μ и σ , связанные с представлением (4.17).

5.2. Основная теорема. Нами доказана следующая теорема для системы (1.1) с предъядром абсолютно непрерывного типа.

Теорема 5.1. Пусть предъядро уравнения многомерного восстановления (1.1) удовлетворяет условиям критичности (4.1) и является распределением абсолютно непрерывного типа. Тогда решение имеет структуру (4.17). Имеют место все утверждения леммы 4.1: векторы η и ζ определяются в соответствии с (4.2); вектор μ определяется согласно (5.5), коэффициент r определяется согласно (5.7). Вектор $\sigma = \int_0^\infty \omega(t) dt$ определяется по (5.9), где σ_0 является произвольным решением алгебраической системы (5.8), а коэффициент λ определяется из (5.11).

Пусть выполнены условия теоремы 5.1 и $m_2(dF) < \infty$. Тогда, согласно теореме 5.1, имеет место следующая асимптотическая формула типа формулы В. Смита (1.5):

$$\int_0^t \varphi(x) dx = t\mu + \sigma + o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Теорема 5.1 включает в себе различные известные факты по скалярным УВ, их усиления и обобщения на многомерный случай. К числу таких фактов относится узловая теорема В. Смита (см. [7]–[9]) в частном случае распределения абсолютно непрерывного типа.

Рассмотрим теперь тот случай, когда мера dF обладает конечными моментами до порядка $k \geq 3$ включительно. В теории восстановления задача построения третьего и последующих членов асимптотического разложения функции восстановления H недостаточно полно изучена. На наш взгляд, утверждение теоремы 5.1 о конечности моментов функции ω до порядка $k - 2$ является адекватной информацией о свойствах решения УВ в общем случае (если на структуру F не накладываются дополнительные ограничения). В этом отношении представляет интерес вычисление моментов $\tau_k(\omega)$ функции ω . При этом удобно воспользоваться

следующей формулой, вытекающей из (1.1), (4.17) и (5.5):

$$\tau_k(\omega) = \tau_k(g) - \frac{r}{k+1} [m_{k+1}(dF)] \eta + \sum_{p=0}^k C_k^p m_p(dF) \tau_{k-p}(\omega).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Королюк В. С., Броди С. М., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их применение. — Итоги науки и техники, сер. теория вероятн., матем. статист., теорет. кибернет., 1974, т. 11, с. 47–97.
2. *Pyke R.* Markov renewal processes: definitions and preliminary properties. — Ann. Math. Statist., 1961, v. 32, № 4, p. 1231–1242.
3. *Jacod J.* Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1971, v. 7, № 2, p. 83–129; 1974, v. 10, p. 201–209.
4. *Hunter J. J.* On the renewal density matrix of a semi-Markov process. — Sankhyā, Ser. A, 1969, v. 31, № 3, p. 281–308.
5. *Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Уравнения многомерного восстановления и моменты ветвящихся процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 2, с. 201–217.
6. *Енгибарян Н. Б.* Теоремы восстановления для системы интегральных уравнений. — Матем. сб., 1998, т. 189, № 12, с. 59–72.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
8. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967, 299 с.
9. *Севастьянов Б. А.* Теория восстановления. — Итоги науки и техники, сер. теория вероятн. матем. статист., теорет. кибернет., 1974, с. 98–128.
10. *Енгибарян Н. Б.* Уравнения восстановления на полуоси. — Изв. РАН, сер. матем., 1999, т. 63, № 1, с. 61–76.
11. *Цалюк З. Б.* Интегральные уравнения Вольтерра. — Итоги науки и техники, сер. матем. анализ, 1977, т. 15, с. 131–198.
12. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978, 280 с.
13. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. — Успехи матем. наук, 1958, т. 13, № 5, с. 3–120.
14. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979, 493 с.
15. *Григорян Г. А.* Разрешимость одного класса интегральных уравнений Винера–Хопфа. — Изв. НАН Армении, сер. матем., 1996, т. 31, № 2, с. 27–39.

Поступила в редакцию
24.XI.1999