Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Фролов, Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 1, 104–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:32:34

© 2003 г.

ФРОЛОВ А. Н.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Исследовано асимптотическое поведение почти наверное приращений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих одностороннему условию Крамера. Установлено, что нормирующая последовательность в сильных предельных теоремах для приращений сумм, независимо от их длины, определяется поведением функции, обратной к функции уклонений. Это позволяет объединить единой формулировкой следующие известные результаты для приращений сумм: закон больших чисел, закон Эрдёша–Реньи и его расширение, полученное Мэйсоном, закон Шеппа, теоремы Чёргё–Ревеса, закон повторного логарифма. В случае больших приращений получены новые результаты для случайных величин из области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha \in (1, 2]$ и параметром симметрии $\beta = -1$.

Ключевые слова и фразы: приращения сумм независимых случайных величин, большие уклонения, законы Эрдёша–Реньи и Шеппа, законы сильной аппроксимации, закон больших чисел, закон повторного логарифма.

1. Введение и основные результаты. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $S_0 = 0$, $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, $1 \leq a_n \leq n$.

Исследование асимптотического поведения почти наверное максимумов

$$U_n = \max_{0 \leq k \leq n - a_n} (S_{k+a_n} - S_k),$$

описывающих, например, колебания максимального выигрыша игрока в a_n последовательных партиях некоторой игры, представляет существенный интерес. (Отметим, что $U_n = S_n$ при $a_n = n$ и $U_n =$

*С.-Петербургский государственный университет; Старый Петергоф, Университетский пр. 28, 198504 С.-Петербург, Россия; e-mail: andrei.frolov@pobox.spbu.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00732, и гранта ведущих научных школ № 00-15-96019.

$\max_{1 \leq k \leq n} X_k$ при $a_n = 1$.) Имеющиеся в этом направлении работы посвящены отысканию условий, необходимых и/или достаточных для того, чтобы

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.,}$$

где $\{b_n\}$ — некоторая последовательность положительных постоянных. (Всюду, где использованы символы $\limsup$, $\liminf$, $\lim$, O , o , $\rightarrow$, считаем, что $n \rightarrow \infty$, если не оговорено противное.) В зависимости от скорости роста a_n все полученные ранее результаты делятся на два типа. Если $a_n = O(\ln n)$, то нормирующая последовательность $\{b_n\}$ существенно зависит от распределения слагаемых, а иногда даже и определяет это распределение. Этому случаю посвящены работы [1]–[5]. Если $a_n / \ln n \rightarrow \infty$, то нормирующая последовательность универсальна и совпадает с нормировкой для гауссовского распределения. Этот случай рассматривался в работах [6]–[8]. Все эти результаты можно охватить единой формулировкой, в которую оказываются включенными следующие известные сильные предельные теоремы для приращений сумм: закон больших чисел, закон Эрдёша–Реньи и его расширение, полученное Мэйсоном, закон Шеппа, закон Чёргё–Ревеса, закон повторного логарифма.

Наряду с U_n мы рассмотрим

$$W_n = \max_{0 \leq k \leq n-a_n} \max_{1 \leq j \leq a_n} (S_{k+j} - S_k), \quad R_n = S_n - S_{n-a_n}, \quad T_n = S_{n+a_n} - S_n.$$

Отметим, что $W_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k$ при $a_n = n$ и $W_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$ при $a_n = 1$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

(А) случайная величина X невырождена;

(В) $0 \leq \mathbf{E}X < \infty$;

(С) $h_0 = \sup\{h: \varphi(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty\} > 0$.

Обозначим $F(x) = \mathbf{P}\{X < x\}$, $\omega = \text{ess sup } X$. Положим для $0 < h < h_0$

$$m(h) = \frac{\varphi'(h)}{\varphi(h)}, \quad \sigma^2(h) = m'(h), \quad f(h) = hm(h) - \ln \varphi(h).$$

Обозначим $A = \lim_{h \nearrow h_0} m(h)$, $1/c_0 = \lim_{h \nearrow h_0} f(h)$,

$$\zeta(z) = \sup\{zh - \ln \varphi(h): h \geq 0, \varphi(h) < \infty\}, \quad \gamma(x) = \sup\{z: \zeta(z) \leq x\}.$$

Свойства функций $m(h)$, $\sigma^2(h)$ и $\zeta(z)$ хорошо известны из теории больших отклонений (см., например, [9], [10]). Функции $m(h)$ и $\sigma^2(h)$ — это соответственно математическое ожидание и дисперсия преобразования Крамера случайной величины X , а $\zeta(z)$ — функция отклонений. Функции

$m(h)$, $f(h)$, $\zeta(z)$ и $\gamma(x)$ связаны следующими соотношениями:

$$\zeta(z) = f(m^{-1}(z)) \quad \text{при } z \in [\mathbf{E}X, A), \quad (1)$$

$$\gamma(x) = m(f^{-1}(x)) \quad \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{c_0}\right), \quad (2)$$

где $m^{-1}(z)$ и $f^{-1}(x)$ — это функции, обратные к $m(h)$ и $f(h)$ соответственно. Функция $\gamma(x)$ обладает следующими свойствами: $\gamma(0) = \mathbf{E}X$, $\gamma(x) \rightarrow \omega$ при $x \rightarrow \infty$, $\gamma(x)$ выпукла вверх.

В зависимости от того, каковы постоянные h_0 , A и c_0 , существует пять классов распределений:

I. $h_0 = \infty$, $A < \infty$, $c_0 = 0$. В этом случае $\omega = A$.

II. $h_0 = \infty$, $A < \infty$, $c_0 > 0$. В этом случае $\omega = A$, $c_0 = -1/\ln \mathbf{P}\{X = A\}$.

III. $h_0 = \infty$, $A = \infty$. В этом случае $\omega = \infty$, $c_0 = 0$.

IV. $h_0 < \infty$, $A = \infty$. В этом случае $\omega = \infty$, $c_0 = 0$.

V. $h_0 < \infty$, $A < \infty$. В этом случае $\omega = \infty$, $c_0 = (h_0 A - \ln \varphi(h_0))^{-1} > 0$. (См. также [9] и [4].)

Например, классам I–V принадлежат соответственно равномерное, бернуллиевское, нормальное, экспоненциальное распределения и распределение с плотностью $p(x) = Cx^{-3}e^{-x}$, $x \geq 1$.

Далее запись $F \in K_i$ обозначает, что распределение F принадлежит классу i , $i = \text{I}, \dots, \text{V}$.

Для $F \in K_V$ доопределим функции $m(h)$ и $f(h)$ для $h \geq h_0$ следующим образом:

$$m(h) = m(h_0) + h - h_0, \quad f(h) = f(h_0) + h_0(h - h_0). \quad (3)$$

В этом случае соотношение (1) будет выполнено для всех $z \geq \mathbf{E}X$, а (2) — для всех $x \geq 0$.

Предположим, что $a_n/a(n) \rightarrow 1$, где $a(x)$ — неубывающая функция такая, что $1 \leq a(x) \leq x$, $x/a(x)$ не убывает. Пусть функция

$$b(x) = a(x) \gamma \left(\frac{1}{a(x)} \left(\ln \frac{x}{a(x)} + \ln \ln x \right) \right)$$

не убывает. Положим

$$b_n = a_n \gamma \left(\frac{1}{a_n} \left(\ln \frac{n}{a_n} + \ln \ln n \right) \right).$$

Всюду в дальнейшем $[x]$ обозначает целую часть x .

Сформулируем сначала результат, дающий представление о наибольшей возможной скорости роста максимальных приращений сумм независимых случайных величин.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A), (B) и (C). Пусть существует функция $g(\theta)$, $\theta \in (1, \theta_0)$, такая, что $g(\theta) \rightarrow 1$ при $\theta \rightarrow 1$ и $b(\theta x)/b(x) \leq g(\theta)$ при всех достаточно больших x .

Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\ln a_n / \ln n \rightarrow 0$;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $q \in (0, 1)$ такое, что для всех $i \leq I_n = \min\{[(1 + \varepsilon) a_n], n\}$ и всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\{S_i \geq -\varepsilon b_n\} \geq q. \quad (4)$$

Тогда

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} \leq 1 \quad \text{п.н.}$$

З а м е ч а н и е. Если $|I_{n+1} - I_n| \leq C$ для всех достаточно больших n и $b_n \rightarrow \infty$, то неравенство (4) достаточно проверить только для $i = I_n$. В частности, если $a_n = [a(n)]$, то $|I_{n+1} - I_n| \leq 3$. Условие $b_n \rightarrow \infty$ может не выполняться только для распределений из классов I и II. Для таких распределений при $a_n = o(\ln n)$ заключение теоремы 1 выполнено автоматически, так как в этом случае $\omega < \infty$ и $b_n \sim a_n \omega$.

Перейдем к оценкам снизу для скорости роста приращения сумм независимых случайных величин.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A), (B) и (C). Для $\varepsilon \in (0, 1)$ положим

$$h^* = f^{-1} \left(\frac{1 - \varepsilon}{a_n} \left(\ln \frac{n}{a_n} + \ln \ln n \right) \right).$$

Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- 1) для всех достаточно малых $\varepsilon \in (0, 1)$ справедливы неравенство $h^* < h_0$ и условие

$$h^* \sigma(h^*) = o(\sqrt{a_n} f(h^*)); \quad (5)$$

- 2) $F \in K_I$ и $h^* \rightarrow \infty$;
- 3) $F \in K_{II}$ и $(\ln(n/a_n) + \ln \ln n)/a_n \geq 1/c_0$;
- 4) $F \in K_{III}$ или $F \in K_V$, $h^* \rightarrow \infty$ и

$$\mathbf{P}\{X \geq (1 - \tau) m(h)\} \geq \exp\{-(1 + \delta) f(h)\} \quad (6)$$

для любых $\tau > 0$, $\delta > 0$ и всех достаточно больших h ;

- 5) $F \in K_{IV}$, $h^* \nearrow h_0$ и неравенство (6) выполнено для любых $\tau > 0$, $\delta > 0$ и всех h , достаточно близких к h_0 ;
- 6) $F \in K_V$, $h^* > h_0$, h^* не зависит от n .

Если $a_n/n \rightarrow 1$, то предположим дополнительно, что выполнено условие 2) теоремы 1.

Тогда

$$\limsup \frac{R_n}{b_n} \geq 1 \quad \text{п.н.}$$

В последнем соотношении R_n можно заменить на T_n .

Условия 1)–6) теоремы 2 позволяют охватить практически весь возможный диапазон последовательностей $\{a_n\}$ для всех пяти классов распределений.

Если $F \in K_I$, то условие 1) нужно проверять для $h^* = O(1)$ ($\liminf a_n / \ln n > 0$). Условие 2) следует использовать, если $h^* \rightarrow \infty$ ($a_n = o(\ln n)$).

Если $F \in K_{II}$, то областью значений функции $f(h)$ является интервал $[0, 1/c_0]$. Поэтому условие 1) можно применять только для $a_n > c_0 \ln n$. Случай $a_n \leq c_0 \ln n$ включен в 3).

Если $F \in K_{III}$ или $F \in K_{IV}$, то условие 1) удобно проверять для $h^* = O(1)$ ($\liminf a_n / \ln n > 0$). Условия 4) и 5) могут быть проще условия 1) при $h^* \rightarrow h_0$ ($a_n = o(\ln n)$).

Если $F \in K_V$, то условие 1) удобно использовать для $h^* = O(1)$ ($\liminf a_n / \ln n > 0$), условие 6) следует применять для фиксированного $h^* > h_0$ ($a_n = c \ln n, 0 < c < c_0$), а условие 4) нужно проверять для $h^* \rightarrow \infty$ ($a_n = o(\ln n)$).

Отметим, что в некоторых случаях условие 1) и дополняющее его условие могут выполняться одновременно.

Условия 1)–6) теоремы 2 можно заменить любым условием, позволяющим получить следующую оценку снизу вероятностей больших отклонений:

$$P\{S_n \geq (1 - \varepsilon) nm(h_n)\} \geq \exp\{-nf(h_n)(1 + \delta)\}$$

для любых $\varepsilon, \delta > 0$ и всех достаточно больших n .

Отметим, что если выполнено одно из условий 2)–6), то мы приходим к результатам из [4] и [5]. Однако в случаях 3) и 6) доказательства в [4] нуждаются в некоторых дополнениях и изменениях. Заметим, что наши доказательства универсальны.

Наш следующий результат содержит оценку снизу скорости роста максимальных приращений сумм независимых случайных величин для достаточно медленно возрастающих последовательностей $\{a_n\}$.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2 и $\ln \ln n = o(\ln(n/a_n))$, то

$$\liminf \frac{U_n}{b_n} \geq 1 \quad \text{п.н.}$$

Из теорем 1–3 и неравенств $R_n \leq U_n \leq W_n$ вытекает следующая теорема, дающая общее представление о поведении почти наверное приращений сумм независимых случайных величин.

Теорема 4. Если выполнены условия теорем 1 и 2, то

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} = \limsup \frac{U_n}{b_n} = \limsup \frac{R_n}{b_n} = \limsup \frac{T_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.} \quad (7)$$

Если дополнительно $\ln \ln n = o(\ln(n/a_n))$, то

$$\lim \frac{W_n}{b_n} = \lim \frac{U_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.} \quad (8)$$

Приведем различные важные следствия из теоремы 4. При этом мы переносим полную проверку соответствующих условий в п 2. Наша ближайшая цель — показать, как в различных случаях находить нормирующую последовательность $\{b_n\}$.

I) Пусть $a_n = [c \ln n]$. В этом случае условие (5) выполнено автоматически. Теорема 4 влечет следующее соотношение:

$$\lim \frac{W_n}{a_n} = \lim \frac{U_n}{a_n} = \limsup \frac{T_n}{a_n} = \gamma\left(\frac{1}{c}\right) \quad \text{п.н.}$$

Это полная форма законов Эрдёша–Реньи и Шеппа, полученная в [1]–[4].

II) Пусть $a_n = o(\ln n)$. Мы имеем из (8)

$$\lim \frac{W_n}{a_n \gamma(\ln n/a_n)} = \lim \frac{U_n}{a_n \gamma(\ln n/a_n)} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Результат, несколько лучший, чем этот, получен Мэйсоном [5]. Он доказал, что если выполнены условия (A), (B), (C), то

$$\limsup \frac{U_n}{a_n \gamma(\ln n/a_n)} = 1 \quad \text{п.н.}$$

В последнем соотношении $\limsup$ можно заменить на $\lim$, если $\omega < \infty$ или $\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(-\ln(1 - F(x)))/x = 1$. Отметим, что последнее условие Мэйсона эквивалентно условию (6). Согласно [5], условие (6) выполнено для нормального, геометрического, пуассоновского распределений и для распределения Вейбулла.

III) Пусть $a_n / \ln n \rightarrow \infty$. Рассмотрим отдельно следующие случаи:

1. $\mathbf{E}X = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}X^2 < \infty$. Далее мы покажем, что в этом случае

$$\varphi(h) = 1 + \frac{\sigma^2 h^2}{2} (1 + o(1)), \quad m(h) = \sigma^2 h (1 + o(1)), \quad (9)$$

$$\sigma^2(h) = \sigma^2 (1 + o(1)), \quad f(h) = \frac{\sigma^2 h^2}{2} (1 + o(1)) \quad (10)$$

при $h \rightarrow 0$. Отсюда следует соотношение (5). Из (9), (10) и (2) получаем, что $\gamma(x)/\sqrt{2\sigma^2 x} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$. (Отметим, что для нормального распределения $\gamma(x) = \sqrt{2\sigma^2 x}$ для всех $x \geq 0$.) Поэтому соотношения (7) и (8) теоремы 4 выполнены при

$$b_n = \left(2\sigma^2 a_n \left(\ln \left(\frac{n}{a_n} \right) + \ln \ln n \right) \right)^{1/2}.$$

Мы приходим к обобщению закона Чёргё–Ревеса [6], полученному автором в [8]. Отметим, что автор в [8] показал, что условие (С) является необходимым для того, чтобы $\limsup W_n/b_n = 1$ п.н. для всех последовательностей $\{a_n\}$ таких, что $a_n/\ln n \rightarrow \infty$.

Если a_n удовлетворяет условию $\ln(n/a_n)/\ln \ln n \rightarrow c \geq 0$, то мы получаем из (7) следующую форму закона повторного логарифма для приращений:

$$\limsup \frac{W_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = \limsup \frac{U_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = \sqrt{1+c} \sigma \quad \text{п.н.}$$

При $a_n = n$ последнее соотношение превращается в утверждение закона повторного логарифма для S_n и $\max_{1 \leq k \leq n} S_k$.

2. $EX = 0$, $EX^2 = \infty$. Здесь мы рассмотрим три случая.

а) Предположим, что F принадлежит области притяжения нормального закона. Мы покажем далее, что в этом случае

$$\varphi(h) = 1 + \frac{h^2}{2} G\left(\frac{1}{h}\right) (1 + o(1)), \quad m(h) = hG\left(\frac{1}{h}\right) (1 + o(1)), \quad (11)$$

$$\sigma^2(h) = G\left(\frac{1}{h}\right) (1 + o(1)), \quad f(h) = \frac{h^2}{2} G\left(\frac{1}{h}\right) (1 + o(1)) \quad (12)$$

при $h \rightarrow 0$. Здесь $G(x) = \int_{-x}^0 y^2 dF(y)$. Условие (5) следует из (11) и (12). Постоянные b_n , при которых выполняются соотношения (7) и (8), определяются из соотношений (11), (12) и (2).

Этот случай ранее не рассматривался.

б) Предположим, что F — функция распределения устойчивого закона с характеристической функцией

$$\psi(t) = \exp \left\{ -c|t|^\alpha \left(1 + i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \right) \right\}, \quad \alpha \in (1, 2), \quad (13)$$

где $c = \cos(\pi(2-\alpha)/2)$. В этом случае условие (С) выполнено, а $\varphi(h) = \exp\{h^\alpha\}$, $h > 0$ (см. [12, с. 80]). Это дает

$$m(h) = \alpha h^{\alpha-1}, \quad \sigma^2(h) = \alpha(\alpha-1) h^{\alpha-2}, \quad f(h) = (\alpha-1) h^\alpha$$

при $h > 0$. Отсюда следуют соотношение (5) и, с учетом (2), равенство $\gamma(x) = \alpha(\alpha-1)^{(1-\alpha)/\alpha} x^{(\alpha-1)/\alpha}$. Поэтому соотношение (7) теоремы 4 выполнено при

$$b_n = \alpha(\alpha-1)^{(1-\alpha)/\alpha} a_n^{1/\alpha} \left(\ln \left(\frac{n}{a_n} \right) + \ln \ln n \right)^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

Этот результат фактически был получен в [7], где рассматривалось поведение устойчивого процесса. Наша теорема 4 не только дает соотношение для $\limsup$, но и позволяет заменить $\limsup$ на $\lim$ для a_n , удовлетворяющих условию $\ln \ln n = o(\ln(n/a_n))$.

с) Пусть F принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией $\psi(t)$, определенной в (13). Как мы покажем далее, в этом случае

$$\varphi(h) = 1 + c_1 h^\alpha g(h^{-1}) (1 + o(1)), \quad m(h) = c_2 h^{\alpha-1} g(h^{-1}) (1 + o(1)), \quad (14)$$

$$\sigma^2(h) = c_3 h^{\alpha-2} g(h^{-1}) (1 + o(1)), \quad f(h) = c_4 h^\alpha g(h^{-1}) (1 + o(1)) \quad (15)$$

при $h \rightarrow 0$, где $g(x) = x^\alpha F(-x)$, $x > 0$. Отсюда следует (5). Постоянные b_n , при которых выполняются соотношения (7) и (8), определяются из (14), (15) и (2).

Если F принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона, то нормирующие постоянные b_n те же, что и в п. б). Соотношение (7) доказано в [7] при более слабых моментных предположениях для a_n , удовлетворяющих условию $n^\alpha/b_n \rightarrow \infty$. Предположение о конечности экспоненциального момента существенно расширяет класс рассматриваемых последовательностей $\{a_n\}$. Кроме того, в силу (8) мы можем заменить $\limsup$ на $\lim$ для a_n , возрастающих достаточно медленно.

Случай, при котором F принадлежит области ненормального притяжения устойчивого закона ранее не рассматривался.

3. $\mathbf{E}X > 0$. Условие (5) при дополнительных условиях на распределение F проверяется так же, как в случаях 1 и 2. Так как $\gamma(0) = \mathbf{E}X$, то (7) превращается в

$$\limsup \frac{W_n}{a_n} = \limsup \frac{U_n}{a_n} = \limsup \frac{R_n}{a_n} = \limsup \frac{T_n}{a_n} = \mathbf{E}X \quad \text{п.н.}$$

Если $\ln \ln n = o(\ln(n/a_n))$, то

$$\lim \frac{W_n}{a_n} = \lim \frac{U_n}{a_n} = \mathbf{E}X \quad \text{п.н.}$$

С помощью несложных рассуждений можно показать, что последние соотношения верны для W_n и в случае $\mathbf{E}X = 0$. Для остальных статистик эти соотношения верны и для $\mathbf{E}X < 0$.

Отметим, что $R_n = S_n$ для $a_n = n$. В этом случае $\limsup$ можно заменить на $\lim$, так как доказательство достаточно провести для неотрицательных случайных величин, а для них S_n не убывает. Таким образом, мы получили закон больших чисел.

Приведенные примеры показывают, что нормирующая последовательность во всех упоминавшихся выше сильных предельных теоремах для приращений сумм и сумм вычисляется по одной и той же формуле! Эта нормирующая последовательность зависит от поведения функции $\gamma(x)$. Поведение $\gamma(x)$ в окрестности нуля определяет асимптотику больших приращений, ее поведение при ограниченных значениях аргумента — асимптотику приращений логарифмической длины, а ее поведение на бесконечности — асимптотику совсем коротких приращений.

2. Доказательства. Нам понадобится следующая лемма. Положим $h'_0 = \infty$, если $F \in K_V$, и $h'_0 = h_0$ в противоположном случае.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (A), (B) и (C). Тогда

$$\mathbf{P}\{S_n \geq nt(h)\} \leq \exp\{-nf(h)\} \quad (16)$$

для любого $h \in (0, h'_0)$ и всех n .

Пусть $\{h_n\}$ — последовательность положительных чисел. Предположим, что выполнено также одно из следующих условий:

- 1) $h_n < h_0$, $nf(h_n) \rightarrow \infty$ и $h_n\sigma(h_n) = o(\sqrt{n}f(h_n))$;
- 2) $F \in K_{III}$ или $F \in K_V$, $h_n \rightarrow \infty$ и неравенство (6) выполнено для любых $\tau > 0$, $\delta > 0$ и всех достаточно больших h ;
- 3) $F \in K_{IV}$, $h_n \nearrow h_0$ и неравенство (6) выполнено для любых $\tau > 0$, $\delta > 0$ и всех h достаточно близких к h_0 ;
- 4) $F \in K_V$, $h_n = h_* > h_0$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{S_n \geq (1 - \varepsilon)nt(h_n)\} \geq \exp\{-nf(h_n)(1 + \delta)\} \quad (17)$$

для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и всех достаточно больших n .

Доказательство. Для случая, когда справедливо условие 1) и $\mathbf{E}X = 0$, оценки (16) и (17) были получены Феллером [13]. Заметим, что оценка сверху (16) следует из неравенства Чебышёва без выполнения условий 1) и $\mathbf{E}X = 0$. Для $\mathbf{E}X > 0$ оценка (17) вытекает из оценки для централизованной величины, неравенства $\mathbf{P}\{S_n + x \geq y + (1 - \varepsilon)x\} \geq \mathbf{P}\{S_n \geq y\}$, где $x > 0$, и того факта, что при сдвиге случайной величины X функция $f(h)$ не меняется, а $t(h)$ увеличивается на величину сдвига.

Если выполнено условие 2) или 3), то (17) следует из (6) и легко проверяемого неравенства $\mathbf{P}\{S_n \geq nx\} \geq (\mathbf{P}\{X \geq x\})^n$.

Пусть выполнено условие 4).

Сначала покажем, что для любых $\tau \in (0, 1)$, $\delta > 0$ и $H > 0$ существует $h > H$ такое, что

$$\mathbf{P}\{h \geq X \geq (1 - \tau)h\} \geq \exp\{-(1 + \delta)h_0h\}. \quad (18)$$

Предположим противное. Тогда найдутся $\tau \in (0, 1)$, $\delta > 0$ и $H > 0$ такие, что для любых $h > H$ выполнено неравенство противоположное (18). Обозначим $t_k = (1 - \tau)^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Для всех достаточно больших k справедливо неравенство

$$\int_{(1-\tau)t_k}^{t_k} e^{hx} dF(x) \leq e^{ht_k} \mathbf{P}\{(1 - \tau)t_k \leq X \leq t_k\} < e^{(h-(1+\delta)h_0)t_k}.$$

Следовательно, $\varphi(h) < \infty$ для $0 < h < (1 + \delta)h_0$, что противоречит определению h_0 . Неравенство (18) доказано.

Пусть $\bar{X}, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин с функцией распределения $(\varphi(h_0))^{-1} \int_{-\infty}^x e^{h_0 t} dF(t)$. Обозначим $\bar{S}_n = \bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n$, $\bar{F}_n(t) = \mathbf{P}\{\bar{S}_n < t\}$.

Пусть δ — фиксированное положительное число, $\tau = \delta/2$, $\tau = 6\rho$.

Положим $z = h_* - h_0$, $x = nm(h_*)$, $y = x + \tau n z$, $Q_n = \mathbf{P}\{x \leq \bar{S}_n \leq y\}$.

Используя известное соотношение, связывающее функцию распределения сумм независимых случайных величин и функцию распределения сумм преобразований Крамера (см., например, [9]), получим

$$P_n = \mathbf{P}\{S_n \geq x\} = (\varphi(h_0))^n \int_x^\infty e^{-th_0} d\bar{F}_n(t) \geq (\varphi(h_0))^n e^{-h_0 y} Q_n. \quad (19)$$

Пусть $a > 1$ — фиксированное число, выбором которого распорядимся позднее. Положим $T_n = \bar{S}_n - \mathbf{E}\bar{S}_n$, $u = m(h_0) + (1 + 2\rho)za$, $v = m(h_0) + (1 + 3\rho)za$. Учитывая (3) и $\mathbf{E}\bar{S}_n = nm(h_0)$, имеем

$$\begin{aligned} Q_n &= \mathbf{P}\{zn \leq T_n \leq (1 + 6\rho)zn\} \\ &\geq \mathbf{P}\{(1 + 2\rho)zn \leq T_{n/a} \leq (1 + 3\rho)zn\} \mathbf{P}\{-2\rho zn \leq T_n - T_{n/a} \leq 3\rho zn\} \\ &\geq \frac{1}{2} \mathbf{P}\{(1 + 2\rho)zn \leq T_{n/a} \leq (1 + 3\rho)zn\} \geq \frac{1}{2} (\mathbf{P}\{u \leq \bar{X} \leq v\})^{n/a} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших n . Здесь мы использовали слабый закон больших чисел. Имеем

$$Q_n \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varphi(h_0)} \int_u^v e^{h_0 t} dF(t) \right)^{n/a} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{e^{h_0 u}}{\varphi(h_0)} \mathbf{P}\{u \leq X \leq v\} \right)^{n/a} \quad (20)$$

для всех достаточно больших n . Так как $\lim_{a \rightarrow \infty} u/v = \varepsilon \in (0, 1)$, то, если a было выбрано достаточно большим, выполняются неравенства

$$\mathbf{P}\{u \leq X \leq v\} \geq \mathbf{P}\{v\varepsilon^{1/2} \leq X \leq v\} \geq \exp \left\{ -\frac{1 + 4\rho}{1 + 3\rho} h_0 v \right\}. \quad (21)$$

В последнем неравенстве мы использовали (18). Из (19)–(21) следует, что для всех достаточно больших n имеет место неравенство $P_n \geq \frac{1}{2} \exp\{np(a)\}$, где $p(a)$ не зависит от n и $\lim_{a \rightarrow \infty} p(a) = -f(h_*) - 8\rho h_0 z \geq -(1 + 8\rho)f(h_*)$. Если a было выбрано достаточно большим, то отсюда мы получим (17).

Мы будем использовать следующую известную лемму.

Лемма 2. Пусть $r, s \geq 0$, $q > 0$. Если $\mathbf{P}\{S_i \geq -s\} \geq q$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, то

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{0 \leq i < j \leq n} (S_j - S_i) \geq r \right\} \leq q^{-2} \mathbf{P}\{S_n \geq r - s\}.$$

В доказательстве теоремы 1 ключевое место занимает следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $A_n(\varepsilon) = \{W_n \geq (1 + \varepsilon) b_n\}$, где $\varepsilon > 0$. Если выполнены условия теоремы 1, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tau > 0$ такое, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(A_n(\varepsilon)) \leq (\ln n)^{-(1+\tau)}. \quad (22)$$

Доказательство. Положим

$$\beta_n = \ln \frac{n}{a_n} + \ln \ln n. \quad (23)$$

Рассмотрим сначала случай $\ln a_n / \ln n \rightarrow 0$. Используя выпуклость вверх функции $\gamma(x)$, получим $(1 + \varepsilon) b_n \geq k\gamma((1 + \varepsilon) \beta_n / k)$ при $1 \leq k \leq a_n$. С учетом (16) и (2) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n(\varepsilon)) &\leq n \sum_{k=1}^{a_n} \mathbf{P}\{S_k \geq (1 + \varepsilon) b_n\} \leq n \sum_{k=1}^{a_n} \mathbf{P}\left\{S_k \geq k\gamma\left((1 + \varepsilon) \frac{\beta_n}{k}\right)\right\} \\ &\leq n \sum_{k=1}^{a_n} \exp\{- (1 + \varepsilon) \beta_n\} = n^{-\varepsilon} a_n^{2+\varepsilon} (\ln n)^{-(1+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (22). Отметим, что здесь возможен случай $a_n = \text{const}$.

Перейдем ко второму случаю. Пусть $a_n \rightarrow \infty$, $a_n/n < 1 - \delta$ при всех достаточно больших n , где $\delta \in (0, 1)$. Используя лемму 2 и условие 2), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n(2\varepsilon)) &\leq \sum_{j=1}^{[(n-a_n)/(\varepsilon a_n)]-1} \mathbf{P}\left\{\max_{(j-1)\varepsilon a_n \leq m \leq j\varepsilon a_n} \max_{1 \leq k \leq a_n} (S_{k+m} - S_m) \geq (1 + 2\varepsilon) b_n\right\} \\ &\leq \frac{n}{\varepsilon a_n} \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq m \leq \varepsilon a_n} \max_{1 \leq k \leq a_n} (S_{k+m} - S_m) \geq (1 + 2\varepsilon) b_n\right\} \\ &\leq \frac{n}{\varepsilon a_n q^2} \mathbf{P}\{S_{(1+\varepsilon)a_n} \geq (1 + \varepsilon) b_n\} \\ &= \frac{n}{\varepsilon a_n q^2} \mathbf{P}\left\{S_{(1+\varepsilon)a_n} \geq (1 + \varepsilon) a_n \gamma\left(\frac{\beta_n}{a_n}\right)\right\} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших n . Отсюда и из соотношений (16) и (2) следует (22).

Осталось рассмотреть последний случай $a_n/n \rightarrow 1$. Положим $W'_n = \max_{0 \leq k < j \leq n} (S_j - S_k)$. Тогда

$$\mathbf{P}(A_n(2\varepsilon)) \leq \mathbf{P}\{W'_n \geq (1 + 2\varepsilon) b_n\} \leq \mathbf{P}\{W'_{(1+\varepsilon)n} \geq (1 + 2\varepsilon) b_n\}.$$

Снова применяя лемму 2, условие 2), соотношения (16) и (2), приходим к (22).

Доказательство теоремы 1. Положим $n_k = [\theta^k]$, $\theta \in (1, \theta_0)$. Из соотношения (22) и леммы Бореля–Кантелли следует, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{W_{n_k}}{b_{n_k}} \leq 1 \quad \text{п.н.} \quad (24)$$

Далее, $b_{n_k} \leq b_{n_{k+1}} \leq b_{n_k} g(\theta)$ для всех достаточно больших k . Так как W_n не убывает, то $W_n/b_n \leq g(\theta) W_{n_{k+1}}/b_{n_{k+1}}$ при $n_k \leq n \leq n_{k+1}$. Из последних неравенств и (24) следует, что $\limsup W_n/b_n \leq g(\theta)$ п.н. Устремляя в последнем соотношении θ к 1, мы получаем требуемое.

Лемма 4. Пусть $A_n^\varepsilon = \{T_n \geq (1-\varepsilon)b_n\}$, где $\varepsilon > 0$. Если выполнены условия теоремы 2, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tau > 0$ такое, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \geq \exp \left\{ -(1-\tau) \left(\ln \frac{n}{a_n} + \ln \ln n \right) \right\}. \quad (25)$$

Доказательство. Определим β_n равенством (23).

Пусть выполнено одно из условий 1), 4)–6) теоремы 2. В силу выпуклости вверх функции $\gamma(x)$ выполняется неравенство $(1-\varepsilon)^2 b_n \leq (1-\varepsilon) a_n \gamma((1-\varepsilon)\beta_n/a_n)$. Используя (17) и (2), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}) &= \mathbf{P}\{S_{a_n} \geq (1-\varepsilon)^2 b_n\} \\ &\geq \mathbf{P}\{S_{a_n} \geq (1-\varepsilon) \gamma((1-\varepsilon)\beta_n/a_n)\} \geq \exp \{ -(1+\delta)(1-\varepsilon)\beta_n \} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших n . Выбирая δ достаточно малым, приходим к (25).

Если выполнено условие 2) теоремы 2, то $b_n = a_n \omega$, $\beta_n/a_n \rightarrow \infty$, и $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \geq (\mathbf{P}\{X \geq (1-\varepsilon)\omega\})^{a_n} \geq \exp\{-(1-\tau)\beta_n\}$ для всех достаточно больших n .

Если выполнено условие 3) теоремы 2, то снова $b_n = a_n \omega$. Далее считаем, что $a_n \rightarrow \infty$, так как в противном случае (25) выполнено автоматически. Пусть m — натуральное число, выбором которого распорядимся позднее. Имеем

$$\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \geq (\mathbf{P}\{S_m \geq (1-\varepsilon)\omega m\})^{a_n/m} \geq (\mathbf{P}\{S_m \geq (1-\varepsilon)\omega m\})^{c_0 \beta_n/m}.$$

Возьмем x_0 такое, что $F(x_0) < F(\omega)$. Выберем m столь большим, чтобы $(1-\varepsilon)m\omega \leq x_0 + (m-1)\omega$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_m \geq (1-\varepsilon)\omega m\} &\geq \mathbf{P}\{S_m \geq x_0 + (m-1)\omega\} \\ &\geq m \mathbf{P}\{\omega > X_1 \geq x_0, X_2 = \dots = X_m = \omega\} \\ &= m \mathbf{P}\{\omega > X \geq x_0\} (\mathbf{P}\{X = \omega\})^{m-1} = m(F(\omega) - F(x_0)) e^{-(m-1)/c_0}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем (25).

Доказательство теоремы 2. По лемме 4

$$\begin{aligned} P_n &= \mathbf{P}\{R_n \geq (1-\varepsilon)b_n\} = \mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \\ &\geq \exp \left\{ -(1-\delta) \left(\ln \frac{n}{a_n} + \ln \ln n \right) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

для всех достаточно больших n .

Пусть сначала $a_n/n \rightarrow \rho \in [0, 1)$. Выберем $\tau \in (\rho, 1)$ и натуральное N такими, что для всех $n > N$ выполняются неравенства $(a_n + 1)/n < \tau$ и (26). Положим $n_1 = N$, $n_{k+1} = \min\{n: n > n_k, n - a_n \geq n_k\}$, $k = 2, 3, \dots$. Используя неравенство $a_n/n \geq (a_n + 1)/(2n)$, получим

$$\sum_{k=2}^m P_{n_k} \geq \frac{1}{2} (\ln n_m)^{-1+\delta} \sum_{k=2}^m \frac{a_{n_k} + 1}{n_k}.$$

В силу неравенств $n_k - a_{n_k} - 1 \leq n_k - a_{n_{k-1}} - 1 < n_{k-1}$ и $-\ln(1-x) \leq C_\tau x$ при $x \in (0, \tau)$, имеем

$$C_\tau \sum_{k=2}^m \frac{a_{n_k} + 1}{n_k} \geq \sum_{k=2}^m \ln \frac{n_k}{n_k - a_{n_k} - 1} \geq \sum_{k=2}^m \ln \frac{n_k}{n_{k-1}} = \ln \frac{n_m}{n_1}.$$

Следовательно, ряд $\sum_k P_{n_k}$ расходится. Так как события $\{R_{n_k} \geq (1-\varepsilon)b_{n_k}\}$ независимы, то заключение теоремы следует из леммы Бореля–Кантелли.

Пусть теперь $a_n/n \rightarrow 1$. Положим $n_k = [\theta^k]$, $k = 1, 2, \dots$, $\theta > 1$. Покажем, что соотношение

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{R_{n_k}}{b_{n_k}} \leq a < 1 \quad \text{п.н.} \quad (27)$$

не выполнено.

Рассмотрим события $A_k = \{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1 + 2\varepsilon)ab_{n_k}\}$, $D_k = \{S_{n_{k-1}} - S_{n_k - a_{n_k}} > -\varepsilon ab_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$.

Так как $n_{k-1} - n_k + a_{n_k} \sim n_{k-1}$, то $n_{k-1} - n_k + a_{n_k} \leq n_k$ для всех достаточно больших k . Из условия 2) следует, что $\mathbf{P}\{D_k\} \geq q$ для всех достаточно больших k .

Следующие пары событий независимы: A_k и D_k , A_k и $D_k \overline{A_{k-1} D_{k-1}}$, A_k и $D_k \overline{A_{k-1} D_{k-1} A_{k-2} D_{k-2}}, \dots$.

Так как $a_{n_k} \sim (n_k - n_{k-1})\theta/(\theta - 1)$, то

$$\mathbf{P}(A_k) \geq \mathbf{P}\left\{S_{n_k - n_{k-1}} > (1 + \varepsilon)a \frac{\theta}{\theta - 1} (n_k - n_{k-1}) \gamma\left(\frac{\beta_{n_k}}{a_{n_k}}\right)\right\}$$

для всех достаточно больших k . Выберем θ большим, а ε маленьким так, чтобы $(1 + \varepsilon)a\theta/(\theta - 1) = (1 - \tau)^2$, $\tau > 0$. Используя выпуклость $\gamma(x)$ и соотношения (17) и (2) так же, как при доказательстве леммы 4, получим

$$\mathbf{P}(A_k) \geq \exp\left\{-(1 - \tau)(1 + \delta)(n_k - n_{k-1})\beta_{n_k}a_{n_k}^{-1}\right\} \geq k^{-(1-\tau)(1+\delta)}$$

для всех достаточно больших k . Выбирая δ достаточно малым, заключаем, что ряд $\sum_k \mathbf{P}(A_k)$ расходится.

По лемме 5 на с. 267 книги Петрова [11], $\mathbf{P}(A_k D_k \text{ б.ч.}) \geq q > 0$. С другой стороны, из (27) следует, что $\mathbf{P}(A_k D_k \text{ б.ч.}) = 0$. Полученное противоречие показывает, что (27) не выполнено, и теорема доказана для R_n .

Доказательство для T_n в силу (25) не отличается от доказательства леммы 4 в работе автора [8] и здесь опущено.

Доказательство теоремы 3. Доказательство в силу неравенства (25) не отличается от доказательства леммы 5 в работе автора [8] и здесь опущено.

Перейдем к доказательству утверждений, сделанных ранее по поводу проверки условий теоремы 4 в случае III.

Докажем сначала соотношения (9)–(12), (14), (15).

Пусть $\mathbf{E}X = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}X^2 < \infty$. Покажем, что выполнены (9) и (10). По формуле Тейлора

$$\varphi(h) = 1 + \frac{h^2}{2} \varphi''(\theta_1), \quad \ln \varphi(h) = \frac{h^2}{2} \sigma^2(\theta_2), \quad m(h) = h\sigma^2(\theta_3),$$

где $\theta_i = \theta_i(h)$, $\theta_i \in (0, h)$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно,

$$f(h) = hm(h) - \ln \varphi(h) = \frac{h^2}{2} (2\sigma^2(\theta_3) - \sigma^2(\theta_2)).$$

Переходя во всех этих соотношениях к пределу при $h \rightarrow 0$ и учитывая соотношения $\varphi''(h) \rightarrow \sigma^2$ и $\sigma^2(h) \rightarrow \sigma^2$ при $h \rightarrow 0$, получим (9) и (10).

Пусть $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}X^2 = \infty$ и F принадлежит области притяжения нормального закона. Покажем, что выполнены (11) и (12).

Положим $R_0(x) = e^x - 1 - x$, $R_1(x) = x(e^x - 1)$, $R_2(x) = x^2 e^x$,

$$I_k = h^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} R_k(xh) dF(x), \quad k = 0, 1, 2.$$

Тогда

$$\varphi(h) = 1 + I_0, \tag{28}$$

$$\varphi(h) m(h) = I_1, \tag{29}$$

$$(\sigma^2(h) + (m(h))^2) \varphi(h) = I_2. \tag{30}$$

Исследуем поведение интегралов I_k при $h \rightarrow 0$. Имеем

$$\begin{aligned} I_k &= h^{-k} \left(\int_{-\infty}^{-1/h} + \int_{-1/h}^0 + \int_0^{\infty} \right) R_k(xh) dF(x) \\ &= I'_k + I''_k + I'''_k, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Так как $R_k(x) \leq x^2((2-k)!)^{-1}e^x \leq x^2 e^x$, $x > 0$, то для $k = 0, 1, 2$

$$I'''_k = O(h^{2-k}) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \tag{31}$$

Так как F принадлежит области притяжения нормального закона, а $1 - F(x)$ убывает при $x \rightarrow \infty$ экспоненциально (в силу условия (C)), то

$$F(-x) = x^{-2}g(x) \quad \text{при } x > 0, \tag{32}$$

где $g(x)$ — медленно меняющаяся функция (см., например, [15, с. 97]). Интегрируя по частям и делая замену переменных $hx \rightarrow -x$, получим

$$\begin{aligned} I'_k &= h^{-k} R_k(-1) F\left(-\frac{1}{h}\right) - h^{-k} \int_1^\infty F\left(-\frac{x}{h}\right) R'_k(-x) dx \\ &= h^{2-k} R_k(-1) g\left(\frac{1}{h}\right) - h^{2-k} \int_1^\infty g\left(\frac{x}{h}\right) x^{-2} R'_k(-x) dx. \end{aligned} \quad (33)$$

По теореме 2.6 на с. 63 книги [14] для $k = 0, 1, 2$

$$-\int_1^\infty g\left(\frac{x}{h}\right) x^{-2} R'_k(-x) dx \sim -g\left(\frac{1}{h}\right) \int_1^\infty x^{-2} R'_k(-x) dx \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Поэтому для $k = 0, 1, 2$

$$I'_k \sim C_k h^{2-k} g(h^{-1}) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (34)$$

Положим $L_k(x) = R_k - x^2/(2-k)!$, $k = 0, 1, 2$. Снова интегрируя по частям, делая замену переменных $hx \rightarrow -x$ и учитывая (32), получим

$$\begin{aligned} I''_k &= h^{-k} \int_{-1/h}^0 L_k(xh) dF(x) + \frac{h^{2-k}}{(2-k)!} \int_{-1/h}^0 x^2 dF(x) \\ &= -h^{2-k} L_k(-1) g\left(\frac{1}{h}\right) - h^{2-k} \int_0^1 g\left(\frac{x}{h}\right) x^{-2} L'_k(-x) dx + \frac{h^{2-k}}{(2-k)!} G\left(\frac{1}{h}\right). \end{aligned}$$

По теореме 2.7 на с. 65 книги [14] для $k = 0, 1, 2$

$$\int_0^1 g\left(\frac{x}{h}\right) x^{-2} L'_k(-x) dx \sim g\left(\frac{1}{h}\right) \int_0^1 x^{-2} L'_k(-x) dx \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

В силу условия (C) имеем $G(y) \sim G_1(y) = \int_{-y}^y x^2 dF(x)$ и $g(y) \sim g_1(y) = 1 - F(y) + F(-y)$ при $y \rightarrow \infty$. Хорошо известно (см., например, [15, с. 101]), что $g_1(y) = o(G_1(y))$ при $y \rightarrow \infty$. Поэтому для $k = 0, 1, 2$

$$I''_k \sim \frac{h^{2-k}}{(2-k)!} G\left(\frac{1}{h}\right) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (35)$$

Из (31), (34), (35) вытекает, что для $k = 0, 1, 2$

$$I_k \sim \frac{h^{2-k}}{(2-k)!} G\left(\frac{1}{h}\right) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (36)$$

Из (28) и (36) для $k = 0$ вытекает

$$\varphi(h) = 1 + \frac{h^2}{2} G\left(\frac{1}{h}\right) (1 + o(1)) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (37)$$

Из последнего соотношения, (29) и (36) для $k = 1$ следует, что

$$m(h) = hG(h^{-1}) (1 + o(1)) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (38)$$

Из последнего соотношения, (37), (30) и (36) для $k = 2$ следует, что

$$\sigma^2(h) = G(h^{-1}) (1 + o(1)) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (39)$$

Из (37) и (38) заключаем, что

$$f(h) = \frac{h^2}{2} G\left(\frac{1}{h}\right) (1 + o(1)) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (40)$$

Осталось только заметить, что (37)–(40) совпадают с (11)–(12).

Пусть $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}X^2 = \infty$ и F принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем α . Покажем, что выполнены (14) и (15).

Доказательство мало отличается от доказательства в случае притяжения к нормальному закону. Определим R_k и I_k так же, как раньше. Представим $\varphi(h)$, $m(h)$, $\sigma^2(h)$ в виде (28)–(30) и исследуем поведение интегралов I_k при $h \rightarrow 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} I_k &= h^{-k} \int_{-\infty}^0 R_k(xh) dF(x) + h^{-k} \int_0^{\infty} R_k(xh) dF(x) \\ &= J'_k + J''_k, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Интеграл J''_k оценивается так же, как I'''_k : для $k = 0, 1, 2$

$$J''_k = O(h^{2-k}) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (41)$$

Так как F принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем α , а $1 - F(x)$ убывает при $x \rightarrow \infty$ экспоненциально (в силу условия (C)), то $F(-x) = x^{-\alpha}g(x)$, где $g(x)$ — медленно меняющаяся функция (см., например, [15, с. 93]). Интегрируя по частям и делая замену переменных $hx \rightarrow -x$, получим

$$J'_k = -h^{-k} \int_0^{\infty} F\left(-\frac{x}{h}\right) R'_k(-x) dx = -h^{\alpha-k} \int_0^{\infty} g\left(-\frac{x}{h}\right) x^{-\alpha} R'_k(-x) dx.$$

Дальнейшие рассуждения ничем не отличаются от рассуждений, использованных при доказательстве соотношения (36). Нужно лишь заметить 2 на α во всех интегралах. Тогда мы получим

$$I_k \sim C_k h^{\alpha-k} g\left(\frac{1}{h}\right) \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (k = 0, 1, 2).$$

Из последнего соотношения и (28)–(30) мы тем же способом получим (14) и (15).

Перейдем к проверке условий 2) и (5).

Начнем с условия (5). Заметим, что во всех рассматриваемых случаях, где $\mathbf{E}X = 0$ и $a_n/\ln n \rightarrow \infty$, выполняются соотношения $h^* \rightarrow 0$ и $h^2 \sigma^2(h) \sim C f(h)$ при $h \rightarrow 0$. Поэтому условие (5) равносильно соотношению $(h^*)^2 \sigma^2(h^*) = o(a_n(f(h^*))^2)$, которое, в свою очередь, эквивалентно $1 = o(a_n f(h^*)) = o(\beta_n)$. Последнее соотношение выполнено, так как $a_n/\ln n \rightarrow \infty$.

Перейдем к условию 2). Для его проверки полезна следующая лемма.

Лемма 5. Пусть выполнено условие (В). Пусть $\{B_n\}$ — неубывающая последовательность положительных постоянных такая, что функции распределения нормированных сумм S_n/B_n слабо сходятся к функции распределения $V(x)$. Тогда для любого $\delta > 0$ такого, что $-\delta$ — точка непрерывности $V(x)$, существует $q > 0$ такое, что для всех $i \leq n$ и всех n выполняется неравенство $\mathbf{P}\{S_i \geq -\delta B_n\} \geq q$.

Доказательство. В силу условия леммы $\mathbf{P}\{S_i \geq -\delta B_i\} \geq (1 - V(-\delta))/2$ для всех $i \geq I_0 = I_0(\delta)$. Для $i < I_0$ имеем

$$\mathbf{P}\{S_i \geq -\delta B_i\} \geq \mathbf{P}\{S_i \geq 0\} \geq \mathbf{P}\{X_1 \geq 0, \dots, X_i \geq 0\} \geq (\mathbf{P}\{X \geq 0\})^{I_0} > 0,$$

так как $\mathbf{E}X \geq 0$. Значит для всех i выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\{S_i \geq -\delta B_i\} \geq q = \min\{2^{-1}(1 - V(-\delta)), (\mathbf{P}\{X \geq 0\})^{I_0}\} > 0.$$

Так как B_n не убывает, то $\mathbf{P}\{S_i \geq -\delta B_n\} \geq \mathbf{P}\{S_i \geq -\delta B_i\} \geq q$ для всех $i \leq n$.

Теперь покажем, что условие 2) выполнено.

1. $\mathbf{E}X = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}X^2 < \infty$. Пусть $a_n/n < 1 - \delta$ для всех достаточно больших n . Положим $\kappa_n = ([(1 + \varepsilon) a_n] \sigma^2 / (1 - q))^{1/2}$. По неравенству Чебышёва $\mathbf{P}\{S_i \geq -\kappa_n\} \geq 1 - i\sigma^2\kappa_n^{-2} \geq q$ для $i \leq [(1 + \varepsilon) a_n]$. Так как $\kappa_n = o(b_n)$, то мы получаем (4). Случай $a_n/n \rightarrow 1$ рассматривается аналогично.

2. $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}X^2 = \infty$.

а) Возьмем $B_n = 1/f^{-1}(1/(2n))$. Тогда в силу (12) имеем $1 = 2nf(1/B_n) \sim nB_n^{-2}G(B_n)$. Поэтому распределения S_n/B_n сходятся к нормальному закону.

Положим $\kappa_n = B_{a_n}$. Покажем, что $\kappa_n = o(b_n)$. Определим β_n равенством (23). Так как $m(h) \sim Cf(h)/h$ при $h \rightarrow 0$, то

$$\frac{\kappa_n}{b_n} = \frac{\kappa_n}{a_n m(f^{-1}(\beta_n/a_n))} \sim \frac{\kappa_n f^{-1}(\beta_n/a_n)}{C\beta_n} = \frac{f^{-1}(\beta_n/a_n)}{Cf^{-1}(1/(2a_n))\beta_n}.$$

Нам потребуется представление произвольной медленно меняющейся функции $L(x)$ в виде

$$L(x) = D(1 + o(1)) \exp \left\{ \int_A^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\},$$

где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ (см., например, [12, теорема 1.2, с. 10]).

Используя это представление и (12), нетрудно проверить, что $f^{-1}(h) \sim h^{1/2}L(1/h)$ при $h \rightarrow 0$, где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция. Поэтому $\kappa_n/b_n \sim L(a_n/\beta_n)/(C_1 L(a_n) \beta_n^{1/2})$. Используя снова представление медленно меняющейся функции, заключаем, что для любого $\delta > 0$ и всех достаточно больших n выполняется неравенство $L(a_n/\beta_n) \leq \beta_n^\delta L(a_n)$. Выбирая $\delta < \frac{1}{2}$, получаем $\kappa_n = o(b_n)$.

Теперь неравенство (4) следует из леммы 5.

б) Так как F устойчива, то для $i \leq [(1+\varepsilon)a_n]$ и $\kappa_n = ((1+\varepsilon)a_n)^{1/\alpha}$ выполняется неравенство $\mathbf{P}\{S_i \geq -\kappa_n\} = \mathbf{P}\{i^{-1/\alpha}S_i \geq -i^{-1/\alpha}\kappa_n\} \geq F(-1) > 0$. Кроме того, ясно, что $\kappa_n = o(b_n)$. Это дает неравенство (4) для $\{a_n\}$ таких, что $a_n/n < 1-\delta$ для всех достаточно больших n . Случай $a_n/n \rightarrow 1$ рассматривается аналогично.

с) Возьмем $B_n = 1/f^{-1}(c_4/n)$. Тогда в силу (15) имеем $1 = nf(1/B_n)/c_4 \sim nB_n^{-\alpha}g(B_n)$. Поэтому распределения S_n/B_n слабо сходятся к соответствующему устойчивому закону. Положим $\kappa_n = B_{a_n}$. Соотношение $\kappa_n = o(b_n)$ доказывается так же, как в случае а). Остается применить лемму 5.

3. $\mathbf{E}X > 0$. Условие 2) выполнено в силу слабого закона больших чисел и леммы 5.

Автор благодарен рецензенту за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shepp L. A. A limit law concerning moving averages. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, p. 424–428.
2. Erdős P., Rényi A. On a new law of large numbers. — J. Anal. Math., 1970, v. 23, p. 103–111.
3. Csörgő S. Erdős–Rényi laws. — Ann. Statist., 1979, v. 7, p. 772–787.
4. Deheuvels P., Devroye L. Limit laws of Erdős–Rényi–Shepp type. — Ann. Probab., 1987, v. 15, p. 1363–1386.
5. Mason D. M. An extended version of the Erdős–Rényi strong law of large numbers. — Ann. Probab., 1989, v. 17, p. 257–265.
6. Csörgő M., Révész P. Strong Approximations in Probability and Statistics. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1981, 285 p.
7. Зинченко Н. М. Асимптотика приращений устойчивых случайных процессов со скачками одного знака. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 4, с. 793–796.
8. Frolov A. N. On one-sided strong laws for large increments of sums. — Statist. Probab. Lett., 1998, v. 37, № 2, p. 155–165.
9. Петров В. В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
10. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 432 с.
11. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
12. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
13. Feller W. Limit theorems for probabilities of large deviations. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1969, v. 14, p. 1–20.
14. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 144 с.
15. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.

Поступила в редакцию
31.III.2000