Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Махно, Предельная теорема для одномерных стохастических уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 1, 156–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp306>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:39:29

© 2003 г.

МАХНО С. Я.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

Рассматриваются одномерные стохастические уравнения, коэффициенты которых зависят от малого параметра. Получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости их решений к решению стохастического уравнения, содержащего локальное время неизвестного процесса.

Ключевые слова и фразы: стохастические уравнения, локальное время, необходимые условия сходимости, достаточные условия сходимости.

0. Введение. В работе рассматриваются решения одномерных уравнений Ито

$$\xi_\varepsilon(t) = x + \int_0^t [b_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))] ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) dw(s), \quad t \in [0, T]. \quad (0.1)$$

Функции, входящие в коэффициент сноса, ведут себя по-разному при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так, коэффициент $g_\varepsilon(x)$ остается равномерно ограниченным, а функция $b_\varepsilon(x)$ может неограниченно возрастать, но так, чтобы равномерно ограниченным был интеграл $\int_0^x (a_\varepsilon(y))^{-1} b_\varepsilon(y) dy$, где $a_\varepsilon(y) = \sigma_\varepsilon^2(y)$. Изучается слабая сходимость решений при стремлении малого параметра ε к нулю. При этом не предполагается существование пределов у коэффициентов уравнения (0.1). В работах [4], [6], [7] рассматривались частные случаи уравнения (0.1) и доказывалось, что при наличии неограниченного коэффициента сноса предельный процесс может не быть решением уравнения Ито. Например, если в уравнении (0.1)

$$b_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad g_\varepsilon(x) = 0, \quad \sigma_\varepsilon(x) = 1, \quad \int_{E_1} b(x) dx = b < \infty,$$

то предельным процессом будет «skew Brownian motion» в терминологии [4], [8], или обобщенный диффузионный процесс по [6]. Этот процесс может быть описан как решение уравнения

$$\xi(t) = x + (\text{th } b) L^\xi(t, 0) + w(t),$$

где $L^\xi(t, 0)$ есть локальное время процесса ξ в момент t в точке 0.

Введем обозначения. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство с потоком σ -алгебр $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$, E_1 — одномерное евклидово пространство, в уравнении (0.1) $(w(t), \mathfrak{F}_t)$ — одномерный стандартный винеровский процесс. Далее, $I_A(x)$ — индикатор множества A , $(\mathcal{C}[0, T], \mathcal{C}_t)$, $t \in [0, T]$, — пространство функций $f(t)$, непрерывных на интервале $[0, T]$. Пусть μ_ε — мера на $(\mathcal{C}[0, T], \mathcal{C}_t)$, соответствующая процессу ξ_ε . Будет изучаться слабая сходимость мер μ_ε . Этот тип сходимости обозначим символом $\Rightarrow$. Для функции $h(x)$ через $Dh(x)$ обозначим ее симметричную производную:

$$Dh(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{h(x + \delta) - h(x - \delta)}{2\delta}.$$

Если для функции $h(x)$ и произвольной бесконечно дифференцируемой финитной функции $H(x)$ выполняется равенство

$$\int \frac{d^2 H(x)}{dx^2} h(x) dx = \int H(x) n_h(dx),$$

* Институт прикладной математики и механики НАН Украины, ул. Р. Люксембург, 74, 83114 Донецк, Украина; e-mail: makhno@iamm.ac.donetsk.ua

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта INTAS-99-00559.

то $n_h(dx)$ — вторая производная $h(x)$ в смысле распределений на E_1 . Пусть λ, Λ — постоянные такие, что $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. Будем говорить, что пара функций $(f(x), g(x))$ принадлежит классу $\mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$, если эти функции измеримы и выполнены неравенства $|f(x)| \leq \Lambda, \lambda \leq g(x) \leq \Lambda$. Введем условие (I).

У с л о в и е (I). I₁. При любом $\varepsilon > 0$ функции $b_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x), \sigma_\varepsilon(x)$ измеримы, решение уравнения (0.1) единственно в слабом смысле.

I₂. Пара $(g_\varepsilon, a_\varepsilon) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.

I₃. Для любого $x \in E_1$

$$\left| \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy \right| \leq \Lambda.$$

Обозначим

$$F_\varepsilon(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy \right\}, \quad f_\varepsilon(x) = \int_0^x F_\varepsilon(y) dy.$$

В работе автора [5] рассматривались уравнения (0.1), получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости их решений к решению уравнения Ито. В замечании 2 этой работы отмечено, что необходимым условием сходимости решения уравнения (0.1) к решению уравнения Ито является существование дифференцируемой функции $f(x)$ такой, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x)$ при каждом $x \in E_1$. При предположении I₃ семейство функций $f_\varepsilon(x)$ относительно компактно в пространстве непрерывных функций, поэтому если непрерывная функция $f(x)$ не будет дифференцируемой при некоторых x , то в пределе получится другой класс процессов. В этой статье рассматривается случай, когда функция $f(x)$, вообще говоря, не имеет производной в точке 0.

Предельная мера μ на $(\mathcal{C}[0, T], \mathcal{C}_t)$ будет соответствовать процессу

$$\xi(t) = x + \beta L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s). \quad (0.2)$$

В уравнение (0.2) входит симметричное локальное время $L^\xi(t, 0)$ процесса ξ в момент времени t в точке 0. Локальное время в момент t в точке a определяется для произвольного непрерывного семимартингала $X(t)$ формулой Танака [3], [8]

$$L^X(t, a) = |X(t) - a| - |X(0) - a| - \int_0^t \text{sign}(X(s) - a) dX(s), \quad (0.3)$$

где

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Отметим следующее свойство локального времени. Для произвольной измеримой функции $h(x)$

$$\int_0^t h(X(s)) d\langle M \rangle_s = \int h(y) L^X(t, y) dy,$$

если хотя бы один из интегралов имеет смысл [8]. Здесь $\langle M \rangle$ — непрерывный возрастающий процесс, ассоциированный с непрерывным локальным мартингалом $M(t)$ из разложения для $X(t)$.

Следуя [3], дадим определение решения уравнения (0.2).

О п р е д е л е н и е. Непрерывный случайный процесс $\xi(t)$ называется решением уравнения (0.2), если i) $P\{\xi(0) = x\} = 1$; ii) $(\xi(t), \mathfrak{F}_t)$ есть семимартингал, $t \in [0, T]$; iii) существует винеровский процесс $(w(t), \mathfrak{F}_t)$ такой, что (0.2) справедливо для всех $t \in [0, T]$ с вероятностью 1.

Определение слабой единственности решения уравнения (0.2) дается точно так же, как и для уравнений Ито. Введем условия для коэффициентов уравнения (0.2). Обозначим $a(x) = \sigma^2(x)$.

У с л о в и е (II). II₁. Функции $(b, a) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.

II₂. Постоянная $|\beta| < 1$.

Из теоремы 4.35 [3] следует, что при условии (II) уравнение (0.2) имеет единственное слабое решение. Равенство $|\beta| = 1$ соответствует наличию отражающего барьера

в начале координат. Исследование этого случая проводится другими методами и в работе не рассматривается.

1. Предельная теорема. В этом пункте мы докажем предельную теорему о слабой сходимости решений уравнения (0.1) к решению уравнения (0.2). Используемые при доказательстве вспомогательные результаты доказываются в следующем пункте. Функция $f_\varepsilon(x)$, как функция x , монотонно возрастает. Обратную к ней функцию обозначим $\varphi_\varepsilon(x)$.

Теорема. Пусть выполнены условия (I), (II) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x) = \begin{cases} f_1 x, & \text{если } x \leq 0, \\ f_2 x, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

где $f_i > 0$, $i = 1, 2$. Для того чтобы имела место слабая сходимость $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$, необходимы и достаточны следующие условия:

$$\text{i)} \quad \beta = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2};$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon(y) a_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x \frac{1}{a(y) Df(y)} dy \quad \text{для каждого } x \in E_1;$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x \frac{g(y)}{a(y)} dy \quad \text{для каждого } x \in E_1.$$

Доказательство. Пусть процесс $\eta_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))$ и $\nu_\varepsilon(A)$ — мера, соответствующая ему на $(\mathcal{C}[0, T], \mathcal{C}_t)$. Из формулы Ито получим, что процесс $\eta_\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\eta_\varepsilon(t) = \eta_\varepsilon(0) + \int_0^t \hat{g}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s)) ds + \int_0^t \hat{\sigma}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s)) dw. \quad (1.1)$$

Здесь $\hat{g}_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x)) g_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x))$ и $\hat{\sigma}_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x)) \sigma_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x))$. Пусть $\eta(t) = f(\xi(t))$ и $\nu(A)$ — соответствующая ему мера. Согласно лемме 5, нужно проверить, что условия i)–iii) необходимы и достаточны для слабой сходимости мер ν_ε к мере ν . Определим функцию $\varphi(x)$ как обратную к функции $f(x)$. В силу условия (I) пара $(\hat{g}_\varepsilon, \hat{\sigma}_\varepsilon^2) \in \mathcal{L}(k, K)$, с некоторыми постоянными k, K . Из результатов работы [5] следует, что предельный процесс для η_ε может быть только решением уравнения Ито. С другой стороны, из леммы 3 получим, что процесс $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению (2.9). Поэтому, согласно лемме 4, выполнено условие i). Учитывая это, из теоремы 1 [5], получим, что при предположении (I) следующие условия необходимы и достаточны для сходимости $\nu_\varepsilon \Rightarrow \nu$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon^2(\varphi_\varepsilon(y)) a_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(y))} dy &\rightarrow \int_0^x \frac{1}{a(\varphi(y)) [Df(y)]^2} dy, \\ \int_0^x \frac{g_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(y))}{F_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(y)) a_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(y))} dy &\rightarrow \int_0^x \frac{g(\varphi(y))}{a(\varphi(y)) Df(y)} dy, \end{aligned}$$

что эквивалентно условиям ii), iii). Теорема доказана.

В качестве примера исследуем сходимость решений стохастических уравнений:

$$\xi_\varepsilon(t) = x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t g\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) dw(s). \quad (1.2)$$

Предположим, что

$$\left| \int_0^x \frac{b(y)}{a(y)} dy \right| < \text{const}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{b(y)}{a(y)} dy = B_1, \quad \int_0^\infty \frac{b(y)}{a(y)} dy = B_2$$

и существуют пределы

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{g(y)}{a(y)} dy = A_1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dy}{a(y)} = A_2 > 0.$$

В этом случае выполнены условия теоремы и

$$f_1 = \exp(2B_1), \quad f_2 = \exp(-2B_2), \quad \beta = \text{th}(B_1 + B_2), \quad a(x) = \frac{1}{A_2}, \quad g(x) = \frac{A_1}{A_2}.$$

Поэтому предельным процессом для решений уравнения (1.2) будет процесс

$$\xi(t) = x + \text{th}(B_1 + B_2) L^\xi(t, 0) + \frac{A_1}{A_2} t + \frac{1}{\sqrt{A_2}} w(t).$$

2. Преобразования уравнений. Пусть случайный процесс $X(t)$ является решением уравнения

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(X(s)) ds + \int_0^t \gamma(X(s)) dw(s). \quad (2.1)$$

Будем считать, что пара $(\alpha, \gamma^2) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$, тогда (2.1) имеет единственное слабое решение [2]. Справедлива формула Танака [3], [8], обобщающая формулу Ито:

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t Df(X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int L^X(t, y) n_f(dy). \quad (2.2)$$

Для положительных постоянных u_1 и u_2 определим функцию $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} u_1 x, & \text{если } x \leq 0, \\ u_2 x, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

и обратную к ней функцию обозначим через $v(x)$. Имеем:

$$Du(x) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \text{sign } x, \quad n_u(dx) = (u_2 - u_1) \delta_0(x) dx,$$

где $\delta_0(x)$ есть δ -функция Дирака, сосредоточенная в 0.

Лемма 1. Пусть $Y(t) = u(X(t))$. Тогда

$$L^Y(t, 0) = \frac{u_1 + u_2}{2} L^X(t, 0), \quad (2.3)$$

$$Y(t) = Y(0) + \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} L^Y(t, 0) + \int_0^t \hat{\alpha}(Y(s)) ds + \int_0^t \hat{\gamma}(Y(s)) dw, \quad (2.4)$$

где $\hat{\alpha}(x) = Du(x) \alpha(v(x))$ и $\hat{\gamma}(x) = Du(x) \gamma(v(x))$.

Доказательство. Для функции $u(x)$ и процесса (2.1) из формулы (2.2) имеем:

$$Y(t) = Y(0) + \frac{u_2 - u_1}{2} L^X(t, 0) + \int_0^t Du(X(s)) \alpha(X(s)) ds + \int_0^t Du(X(s)) \gamma(X(s)) dw. \quad (2.5)$$

Поскольку $X(s) = v(Y(s))$, формула (2.4) будет следовать из (2.5) и (2.3). Покажем (2.3). Для этого применим формулу (2.2) к процессу (2.1) и функции $\hat{u}(x) = |u(x)|$:

$$\begin{aligned} |Y(t)| &= |Y(0)| + \frac{u_2 + u_1}{2} L^X(t, 0) + \int_0^t D\hat{u}(X(s)) \alpha(X(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t D\hat{u}(X(s)) \gamma(X(s)) dw. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из формул (0.3) и (2.6) получим

$$\begin{aligned} L^Y(t, 0) &= \frac{u_2 + u_1}{2} L^X(t, 0) + \int_0^t D\hat{u}(X(s)) \alpha(X(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t D\hat{u}(X(s)) \gamma(X(s)) dw - \int_0^t \text{sign } Y(s) dY(s). \end{aligned}$$

Последний интеграл в правой части этого равенства выразим, используя (2.5):

$$\begin{aligned} L^Y(t, 0) &= \frac{u_2 + u_1}{2} L^X(t, 0) + \frac{u_2 - u_1}{2} \int_0^t \text{sign } X(s) L^X(ds, 0) \\ &\quad + \frac{u_2 - u_1}{2} \int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) dX(s). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Так как функция $L^X(s, 0)$ возрастает только в тех точках, где $X(s) = 0$, то первый интеграл в (2.7) равен 0. Докажем, что и второй интеграл в (2.7) равен 0, тогда (2.3) будет следовать из (2.7). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) dX(s) &= \int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) \frac{\alpha(X(s))}{\gamma^2(X(s))} \gamma^2(X(s)) ds \\ &= \int_{E_1} I_{\{0\}}(y) \frac{\alpha(y)}{\gamma^2(y)} L^X(t, y) dy = 0. \end{aligned}$$

Здесь первое равенство есть результат [8, с. 217], а второе вытекает из (0.4). Лемма доказана.

Для $|\beta| < 1$ введем функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} (1 - \beta)x, & \text{если } x \leq 0, \\ (1 + \beta)x, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

и пусть $\chi(x)$ — обратная к ней функция. Положим

$$\tilde{g}(x) = \frac{g(\psi(x))}{1 + \beta \text{sign } x}, \quad \tilde{\sigma}(x) = \frac{\sigma(\psi(x))}{1 + \beta \text{sign } x}, \quad \tilde{a}(x) = \tilde{\sigma}^2(x)$$

и рассмотрим уравнение

$$\zeta(t) = \chi(x) + \int_0^t \tilde{g}(\zeta(s)) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) dw(s). \quad (2.8)$$

Известно [2], что при условии (II) уравнение (2.8) имеет единственное слабое решение. Из леммы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть выполнено условие (II). Тогда процесс $\psi(\zeta(t))$ является решением уравнения (0.2).

Из лемм 2 и 1 теперь следует лемма 3.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (II). Тогда процесс $\eta(t) = f(\xi(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\eta(t) = f(x) + \frac{f_2 - f_1 + \beta(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2 + \beta(f_2 - f_1)} L^\eta(t, 0) + \int_0^t \hat{g}(\eta(s)) ds + \int_0^t \hat{\sigma}(\eta(s)) dw(s), \quad (2.9)$$

где $\hat{g}(x) = Df(x)g(\varphi(x))$, $\hat{\sigma}(x) = Df(x)\sigma(\varphi(x))$.

Лемма 4. Пусть процесс $z(t)$, $t \in [0, T]$, допускает представления

$$z(t) = z(0) + \int_0^t k_1(s) ds + \int_0^t r_1(s) dw(s), \quad (2.10)$$

$$z(t) = z(0) + qL^x(t, 0) + \int_0^t k_2(s) ds + \int_0^t r_2(s) dw(s). \quad (2.11)$$

Тогда: i) $q = 0$,

$$\text{ii)} \quad \int_0^t k_1(s) ds = \int_0^t k_2(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

$$\text{iii)} \quad \int_0^t r_1(s) dw(s) = \int_0^t r_2(s) dw(s), \quad t \in [0, T].$$

Доказательство. Из (2.10), (2.11) имеем

$$qL^x(t, 0) + \int_0^t (k_2(s) - k_1(s)) ds = \int_0^t (r_1(s) - r_2(s)) dw(s).$$

Так как выражение справа есть мартингал, а выражение слева — процесс ограниченной вариации, то отсюда следует iii) и равенство

$$qL^x(t, 0) = \int_0^t (k_1(s) - k_2(s)) ds. \quad (2.12)$$

Используя представление (2.10), из определения (0.3) получим

$$L^z(t, 0) = |z(t)| - |z(0)| - \int_0^t (\text{sign } z(s)) k_1(s) ds - \int_0^t (\text{sign } z(s)) r_1(s) dw(s). \quad (2.13)$$

Учитывая представление (2.11) и свойство iii), вновь из (0.3) имеем

$$\begin{aligned} L^z(t, 0) &= |z(t)| - |z(0)| - q \int_0^t (\text{sign } z(s)) L^z(ds, 0) - \int_0^t (\text{sign } z(s)) k_2(s) ds \\ &\quad - \int_0^t (\text{sign } z(s)) r_1(s) dw(s). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Так как первый интеграл в правой части этого равенства равен 0, из (2.13) и (2.14) получим $\int_0^t (\text{sign } z(s))(k_1(s) - k_2(s)) ds = 0$ для любого $t \in [0, T]$. Отсюда вытекает ii). Утверждение i) следует из (2.12). Лемма доказана.

Лемма 5. При условии (I) меры $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$ тогда и только тогда, когда $\nu_\varepsilon \Rightarrow \nu$.

Доказательство. Заметим, что при условии I₃ функции $f_\varepsilon(x)$ и $\varphi_\varepsilon(x)$ сходятся к функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ равномерно на компактах. Так как $\eta_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))$, а $\xi_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(\eta_\varepsilon(t))$, то утверждение леммы следует из [1, теорема 5.5, гл. 1]. Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
2. Веретенников А. Ю. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 2, с. 348–360.
3. Engelbert H. J., Schmidt W. Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations. III. — Math. Nachr., 1991, v. 151, p. 149–197.
4. Le Gall J. F. One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. — Lecture Notes in Math., 1983, v. 1095, p. 51–82.
5. Матно С. Я. Сходимость решений одномерных стохастических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 3, с. 555–572.
6. Портенко Н. И. Обобщенные диффузионные процессы. Киев: Наукова думка, 1982, 208 с.
7. Rosenkrantz W. A. Limit theorems for solutions to a class of stochastic differential equations. — Indiana Univ. Math. J., 1975, v. 24, № 7, p. 613–624.
8. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1991, 533 p.

Поступила в редакцию
30.V.2000