Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, А. С. Холево, О гипотезе мультипликативности для квантовых каналов связи, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 143–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3068>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:07:29

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2002 г.

АМОСОВ Г. Г.*, ХОЛЕВО А. С.*

О ГИПОТЕЗЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ
КАНАЛОВ СВЯЗИ¹⁾

Дается формулировка гипотезы мультипликативности для квантовых каналов связи, справедливость которой для значений параметра гипотезы p , сколь угодно близких к единице, влечет положительное решение фундаментальной проблемы аддитивности пропускной способности в квантовой теории информации. Приводится доказательство этой гипотезы для деполяризующих каналов, в случае, когда p является натуральным числом.

Ключевые слова и фразы: квантовый канал связи, проблема аддитивности пропускной способности, мультипликативность норм, деполяризующий канал.

1. Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — алгебра всех операторов в конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}$. Мы обозначаем множество всех квантовых состояний, т.е. положительных операторов с единичным следом (операторов плотности) в $\mathcal{H}$, символом $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Хорошо известно, что $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ — компактное выпуклое подмножество $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, крайними точками которого являются чистые состояния, задаваемые одномерными проекторами в $\mathcal{H}$. Степень «чистоты» произвольного состояния $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ может быть определена с помощью некоммутативных ℓ_p -норм

$$\|S\|_p = (\text{Tr}|S|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

с операторной нормой $\|S\|$, естественным образом отвечающей случаю $p = \infty$. Чем ближе значение любой из этих мер к единице, тем «чище» состояние S .

Квантовым каналом Φ называется линейное, вполне положительное, сохраняющее след отображение алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е. отображение, допускающее представление

$$\Phi(S) = \sum_k A_k S A_k^*, \quad (1)$$

где A_k — набор операторов, удовлетворяющих условию $\sum_k A_k^* A_k = I$ (более подробно о понятии канала в квантовой теории информации см., например, [4]). Канал Φ отображает входное состояние S в выходное $\Phi(S)$. В настоящей работе исследуется следующая проблема мультипликативности функционалов, характеризующих «максимальную чистоту» выходного состояния канала

$$\nu_p(\Phi) = \max_S \|\Phi(S)\|_p, \quad (2)$$

где максимум берется по отношению ко всем входным операторам плотности S (в силу выпуклости норм максимум достигается на чистых входных состояниях).

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 ГСП-1, Москва, Россия; e-mail: gramos@mail.sitek.ru; holevo@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (грант № 00-738).

Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — произвольные каналы в унитарных пространствах $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, соответственно, и пусть $\Phi_1 \otimes \dots \otimes \Phi_n$ — их тензорное произведение в пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$. В [1] была выдвинута следующая *гипотеза мультипликативности*:

$$\nu_p(\Phi_1 \otimes \dots \otimes \Phi_n) = \nu_p(\Phi_1) \cdots \nu_p(\Phi_n). \quad (3)$$

Как замечено в [1], выполнение этого свойства для значений p , сколь угодно близких к единице, влечет положительное решение фундаментальной *проблемы аддитивности пропускной способности* для одного важного класса квантовых каналов связи, поставленной в работах П. Шора, Ч. Беннета и других авторов (см., например, [3], [1], [6]) и до сих пор остающейся открытой. Отметим, что в классическом случае, когда $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ заменяется на коммутативную алгебру операторов, диагональных в фиксированном базисе, состояния задаются распределениями вероятностей, а каналы — переходными вероятностями на спектре этой алгебры, аналог сформулированных выше проблем аддитивности/мультипликативности имеет достаточно очевидное положительное решение. Трудность задачи в некоммутативном случае обусловлена необычными с классической точки зрения свойствами составных квантовых систем, описываемых тензорными, а не декартовыми произведениями, и наличием в таких системах так называемых «сцепленных» (entangled) чистых состояний, не сводящихся к произведению чистых состояний подсистем [5].

2. Мы обозначаем $\ell_p(\mathcal{H})$ класс Шаттена *эрмитовых* операторов A в $\mathcal{H}$ с нормой $\|A\|_p$.

Лемма. Величина $\nu_p(\Phi)$ равна норме $\|\Phi\|_{1 \rightarrow p}$ отображения Φ действующего из класса $\ell_1(\mathcal{H})$ в $\ell_p(\mathcal{H})$.

Доказательство. Имеем

$$\|\Phi\|_{1 \rightarrow p} = \max_{A \neq 0} \frac{(\text{Tr} |\Phi(A)|^p)^{1/p}}{\text{Tr} |A|},$$

следовательно, $\|\Phi\|_{1 \rightarrow p} \geq \nu_p(\Phi)$. Обратно, пусть $A = A_+ - A_-$ — разложение A на положительную и отрицательную части, тогда $\text{Tr} |A| = \text{Tr} (A_+ + A_-)$ и $-\Phi(A_+ + A_-) \leq \Phi(A) \leq \Phi(A_+ + A_-)$ в силу положительности Φ . Выпуклость функции x^p дает $\text{Tr} |\Phi(A)|^p \leq \text{Tr} \Phi(A_+ + A_-)^p$. Действительно, обозначим $\{e_j\}$ базис из собственных векторов оператора $\Phi(A)$, тогда

$$\text{Tr} |\Phi(A)|^p = \sum_j |\langle e_j | \Phi(A) | e_j \rangle|^p \leq \sum_j \langle e_j | \Phi(|A|) | e_j \rangle^p \leq \sum_j \langle e_j | \Phi(|A|)^p | e_j \rangle = \text{Tr} \Phi(|A|)^p,$$

откуда следует обратное неравенство. Лемма доказана.

Обобщая гипотезу (3), можно предположить, что аналогичное свойство мультипликативности справедливо для норм $\|\Phi\|_{q \rightarrow p}$, $1 \leq q \leq p$, вполне положительных отображений $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Заметим, что классический (коммутативный) аналог этой гипотезы действительно справедлив для произвольных отображений $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ (и доказывается с помощью неравенства Минковского, [2, лемма 2]).

В [1] соотношение (3) было доказано в специальном случае деполаризующих каналов $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ (см. ниже определение (9)) и $p = 2, \infty$. Здесь мы установим это свойство для деполаризующих каналов и произвольного натурального p .

3. Рассмотрим семейство унитарных пространств $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, с размерностями $\dim \mathcal{H}_i = d_i$. Пусть $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$, $d = \prod_{i=1}^n d_i$. Далее мы используем обозначения I_i и $I = \bigotimes_{i=1}^n I_i$ для единичного оператора в $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}$ соответственно. Для непустого множества $L \subset \{1, 2, \dots, n\}$ мы обозначаем

$$\mathcal{H}_L = \bigotimes_{i \in L} \mathcal{H}_i, \quad I_L = \bigotimes_{i \in L} I_i, \quad d_L = \prod_{i \in L} d_i = \dim \mathcal{H}_L.$$

Мы также полагаем $d_\emptyset = 1$.

Пусть $L_1, \dots, L_m$ — семейство непустых подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$, $A_1, \dots, A_m$ — операторы в $\mathcal{H}$ вида $A_k = B_k \otimes I_{L_k}$, где B_k — оператор в $\mathcal{H}_{L_k}$.

Лемма.

$$|\text{Tr} A_1 \cdots A_m| \leq d_{\cap_k L_k} \|B_1\|_1 \cdots \|B_m\|_1. \quad (4)$$

Доказательство. Используя разложения по s -числам операторов B_k , сводим задачу к случаю операторов B_k ранга 1, $B_k = |a_k\rangle\langle b_k|$ с единичными векторами $|a_k\rangle, |b_k\rangle$. Более того, исключая общий множитель $I_{\cap_k L_k}$, приходим к случаю $\bigcap_{k=1}^m L_k = \emptyset$. Тем самым неравенство (4) сводится к неравенству

$$|\mathrm{Tr} A_1 \cdots A_m| \leq 1. \quad (5)$$

Возьмем произвольный ортонормированный базис $\{e_{j_s}^s\}$ в $\mathcal{H}_s$ и построим базис $\{e_J\}$ в пространстве $\mathcal{H}$ как тензорное произведение

$$e_J = e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_n},$$

где $J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$. Обозначим $J_L = (j_s)_{s \in L}$. Тогда, разлагая единичные векторы $|a_k\rangle, |b_k\rangle$, получаем

$$|a_k\rangle = \sum_{J_{\bar{L}_k}} \alpha_{J_{\bar{L}_k}}^k |e_{J_{\bar{L}_k}}\rangle, \quad |b_k\rangle = \sum_{J_{\bar{L}_k}} \beta_{J_{\bar{L}_k}}^k |e_{J_{\bar{L}_k}}\rangle,$$

где $\sum_{J_{\bar{L}_k}} |\alpha_{J_{\bar{L}_k}}^k|^2 = \sum_{J_{\bar{L}_k}} |\beta_{J_{\bar{L}_k}}^k|^2 = 1$, так что

$$A_k = \sum_{J_{\bar{L}_k}} \alpha_{J_{\bar{L}_k}}^k |e_{J_{\bar{L}_k}}\rangle \sum_{J'_{\bar{L}_k}} \beta_{J'_{\bar{L}_k}}^k \langle e_{J'_{\bar{L}_k}}| \otimes \sum_{J_{L_k}} |e_{J_{L_k}}\rangle \langle e_{J_{L_k}}|. \quad (6)$$

Теперь введем мультииндекс $\mathfrak{J} = (J_{\bar{L}_k})_{k=1, \dots, m}$, компоненты которого занумерованы парами (k, p) , где $k \in \{1, \dots, m\}$ и $p \in \bar{L}_k$, и положим

$$\alpha_{\mathfrak{J}} = \prod_{k=1}^m \alpha_{J_{\bar{L}_k}}^k, \quad \beta_{\mathfrak{J}} = \prod_{k=1}^m \beta_{J_{\bar{L}_k}}^k.$$

Тогда

$$\sum_{\mathfrak{J}} |\alpha_{\mathfrak{J}}|^2 = \sum_{\mathfrak{J}} |\beta_{\mathfrak{J}}|^2 = 1. \quad (7)$$

Покажем, что, подставляя (6) в левую часть (5), мы получаем

$$\mathrm{Tr} A_1 \cdots A_m = \sum_{\mathfrak{J}} \tilde{\beta}_{\mathfrak{J}} \alpha_{\mathfrak{J}}, \quad (8)$$

где $\mathcal{P}\mathfrak{J}$ — некоторая перестановка компонент мультииндекса $\mathfrak{J}$, и, следовательно, неравенство (5) вытекает из неравенства Коши–Буняковского и нормировки (7).

Перестановка $\mathcal{P}$ возникает следующим образом: подставим A_k вида (6) в выражение $\mathrm{Tr} A_1 \cdots A_m$. Пусть $p \in \bar{L}_k$, тогда сопряженные векторы $\langle e_{j_p}|$ входят в разложение $\langle b_k|$. Будем последовательно (циклически) двигаться вправо в выражении под знаком следа, начиная от A_k , минуя тождественные операторы, до того момента, когда p опять появится в $\bar{L}_{k \boxplus l}$, где $\boxplus$ обозначает сложение mod m . Тогда векторы $|e_{j_p}\rangle$ будут присутствовать в разложении для $|a_{k \boxplus l}\rangle$, приводя к суммированию по j_p в (8).

Более точно, обозначим $\mathcal{A}$ множество всех пар (k, p) , где $k \in \{1, \dots, m\}$ и $p \in \bar{L}_k$. Тогда компоненты $\mathfrak{J}$ могут быть записаны как $j(k, p)$, где $(k, p) \in \mathcal{A}$. Пусть l — минимальное mod m положительное число, при котором $(k \boxplus l, p) \in \mathcal{A}$. Отображение $(k, p) \rightarrow (k \boxplus l, p)$ является биекцией множества $\mathcal{A}$, следовательно, оно индуцирует перестановку $\mathcal{P}$ мультииндекса $\mathfrak{J}$, приводящую к формуле (8).

4. Рассмотрим семейство деполаризующих каналов

$$\Phi_i(S) = (1 - p_i) S + \frac{p_i}{d_i} (\mathrm{Tr} S) I_i, \quad S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i), \quad 0 < p_i < 1, \quad (9)$$

в унитарных пространствах $\mathcal{H}_i$, с параметрами p_i, d_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и обозначим $\Phi = \bigotimes_{i=1}^n \Phi_i$. Легко видеть, что Φ_i — действительно каналы, т.е. могут быть представлены в форме (1). Если S — чистое состояние (одномерный проектор), то оператор (9) имеет простое собственное значение $1 - (d_i - 1)p_i/d_i$ и $(d_i - 1)$ -кратное собственное значение p_i/d_i . Следовательно,

$$\nu_k(\Phi_i) = \left[\left(1 - (d_i - 1) \frac{p_i}{d_i} \right)^p + (d_i - 1) \left(\frac{p_i}{d_i} \right)^p \right]^{1/p}.$$

Пусть ϵ_L — условное ожидание на подалгебру $\mathcal{M}_L$, порожденную операторами вида $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$, где $A_i = I_i$ при $i \in L$. Это условное ожидание является нормированным частичным следом относительно $\mathcal{H}_L$:

$$\epsilon_L(A) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_L} A \otimes d_L^{-1} I_L. \quad (10)$$

Далее мы используем разложение

$$\Phi = \sum_L \prod_{i=1}^n p_i^{\theta_L(i)} (1-p_i)^{1-\theta_L(i)} \epsilon_L, \quad (11)$$

где $\theta_L(i) = 1$, если $i \in L$, и $\theta_L(i) = 0$ в противном случае. Отметим, что $d_L = \prod_{i=1}^n d_i^{\theta_L(i)}$.

Теорема.

$$\nu_k(\Phi) = \prod_{i=1}^n \nu_k(\Phi_i) = \prod_{i=1}^n \left[\left(1 - (d_i - 1) \frac{p_i}{d_i} \right)^k + (d_i - 1) \left(\frac{p_i}{d_i} \right)^k \right]^{1/k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Возьмем одномерный проектор P в $\mathcal{H}$, тогда из (10) и (4) следует $|\text{Tr} \epsilon_{L_1}(P) \cdots \epsilon_{L_k}(P)| \leq d_{\cap_i L_i} / \prod_i d_{L_i}$. Полученное неравенство и разложение (11) приводят к

$$\begin{aligned} \text{Tr} \Phi(P)^k &= \text{Tr} \left(\sum_L \prod_{i=1}^n p_i^{\theta_L(i)} (1-p_i)^{1-\theta_L(i)} \epsilon_L(P) \right)^k \\ &= \sum_{L_1, L_2, \dots, L_k} \prod_{i=1}^n p_i^{\sum_{j=1}^k \theta_{L_j}(i)} (1-p_i)^{\sum_{j=1}^k (1-\theta_{L_j}(i))} \text{Tr} \epsilon_{L_1}(P) \cdots \epsilon_{L_k}(P) \\ &\leq \sum_{L_1, L_2, \dots, L_k} \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{d_i} \right)^{\sum_{j=1}^k \theta_{L_j}(i)} (1-p_i)^{\sum_{j=1}^k (1-\theta_{L_j}(i))} d_i^{\theta_{\cap_{j=1}^k L_j}(i)}. \end{aligned}$$

Число $\theta_{\cap_{j=1}^k L_j}(i) = \min\{\theta_{L_1}(i), \dots, \theta_{L_k}(i)\}$ равно 1 тогда и только тогда, когда все $\theta_{L_j}(i)$, $j = 1, \dots, k$, равны 1. Используя формулу

$$\sum_{L_1, L_2, \dots, L_k} \prod_{i=1}^n f_i(\theta_{L_1}(i), \dots, \theta_{L_k}(i)) = \prod_{i=1}^n \sum_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k=0,1} f_i(\theta_1, \dots, \theta_k),$$

получаем, что предыдущее выражение равно $\prod_{i=1}^n [(1 - (d_i - 1) p_i / d_i)^k + (d_i - 1) (p_i / d_i)^k]$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов Г. Г., Холево А. С., Вернер Р. Ф. О некоторых проблемах аддитивности в квантовой теории информации. — Проблемы передачи информации, 2000, т. 36, № 4, с. 25–34.
2. Beckner W. Inequalities in Fourier analysis. — Ann. Math., 1975, v. 102, p. 159–182.
3. Bennett C. H., Shor P. W. Quantum information theory. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1998, v. 44, № 6, p. 2724–2742.
4. Холево А. С. Квантовые теоремы кодирования. — Успехи матем. наук, 1998, т. 53, в. 6, с. 193–230; LANL e-print quant-ph/9808023.
5. Холево А. С. Вероятность в квантовой теории. — Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия. Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999, с. 97–98.
6. King C., Ruskai M. B. Minimal entropy of states emerging from noisy quantum channels. — LANL e-print quant-ph/9911079.

Поступила в редакцию
2.IV.2001