Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Клыкова, Предельное распределение числа
совпадающих промежутков, *Теория вероятн. и ее
примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 147–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3069>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 09:25:48

© 2002 г.

КЛЫКОВА Н. В.*

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СОВПАДАЮЩИХ ПРОМЕЖУТКОВ

Пусть $X_1, \dots, X_T$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на множестве $\{1, \dots, N\}$, и $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(T)}$ — построенный по ним вариационный ряд, а $\zeta(T, N)$ — число таких пар (i, j) , $1 \leq i < j \leq T-1$, что $X_{(i+1)} - X_{(i)} = X_{(j+1)} - X_{(j)}$. Приводится полное доказательство теоремы о сходимости распределения $\zeta(T, N)$ к распределению Пуассона с параметром λ при $T, N \rightarrow \infty$, $T^3/4N \rightarrow \lambda$. Эвристическое обоснование этого утверждения было приведено в книге Олдуса [2].

Ключевые слова и фразы: задача о днях рождения, вариационный ряд, спейсинги.

Классическую задачу о днях рождения можно математически сформулировать как задачу о распределении числа пар совпадающих исходов в T испытаниях по равновероятной полиномиальной схеме с N исходами. Хорошо известно (см., например, [1]), что если $N, T \rightarrow \infty$ так, что $T^2/2N \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$, то распределение числа таких пар сходится к пуассоновскому распределению с параметром λ .

В книге Олдуса [2] в виде задачи Е6 формулируется предложенный Дж. Марсалья критерий проверки качества датчиков псевдослучайных чисел, который состоит в следующем. Будем считать, что последовательность псевдослучайных чисел представляет собой последовательность $X_1, \dots, X_T$ независимых случайных величин, равномерно распределенных на множестве $\{1, \dots, N\}$. Построим по $X_1, \dots, X_T$ вариационный ряд $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(T)}$ и рассмотрим разности $\Delta_k = X_{(k+1)} - X_{(k)}$, $k = 1, \dots, T-1$. В качестве новой характеристики качества датчика псевдослучайных чисел Марсалья предложил использовать число $\zeta(T, N)$ таких пар (i, j) , $i < j \leq T-1$, что $\Delta_i = \Delta_j$. В [2] с помощью эвристических способов исследования предельных распределений сумм зависимых индикаторов (которым и посвящена эта книга) обоснована естественность пуассоновской аппроксимации для распределения $\zeta(T, N)$, когда $T, N \rightarrow \infty$ так, что $T^3/4N \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$. Цель настоящей работы состоит в строгом доказательстве этого утверждения.

Теорема. Если $T^3/4N \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\zeta(T, N) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Следствие. Пусть $\tau_N = \min\{T: \zeta(T, N) > 0\}$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tau_N \geq x(4N)^{1/3}\} = e^{-x^3}, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

Доказательство теоремы. Для троек $d = (r, u, v)$, $0 \leq r < N/2$, $1 \leq u \leq u+r \leq v \leq N-r$, введем события

$$A(r, u, v) = \bigcup_{1 \leq m < n < T} \{X_{(m)} = u, X_{(m+1)} = u+r, X_{(n)} = v, X_{(n+1)} = v+r\}$$

и их индикаторы $\chi(d) = \chi(r, u, v)$. Положим

$$\zeta(T, N) = \sum_{r=0}^{[(N-1)/2]} \sum_{u=1}^{N-2r} \sum_{v=u+r}^{N-r} \chi(r, u, v), \quad (3)$$

$$\zeta_R(T, N) = \sum_{r=1}^R \sum_{u=1}^{N-2r-1} \sum_{v=u+r+1}^{N-r} \chi(r, u, v) = \sum_B \chi(d), \quad (4)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899, ГСП-1, Москва, Россия.

где B — множество всех троек $d = (r, u, v)$, образующих область суммирования тройной суммы в средней части (4).

Лемма 1. Если $R = R(T, N)$ изменяется так, что $N = o(RT)$ при $T^3/4N \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$, $N \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{E}\zeta_R(T, N) \rightarrow \lambda, \quad \mathbf{E}\zeta(T, N) \rightarrow \lambda \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\zeta_R(T, N) = \zeta(T, N)\} \rightarrow 1.$$

Доказательство. 1) Сначала получим оценки и асимптотические формулы для $\mathbf{P}\{\chi(r, u, v) = 1\}$. Пусть $M(r, u, v) = \{u, u+r, v+r\}$, $m(r, u, v)$ обозначает число различных элементов множества $M(r, u, v)$, а $M^*(r, u, v) = \{j: u+1 \leq j \leq u+r-1\} \cup \{j: v+1 \leq j \leq v+r-1\}$. Если $r \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\chi(r, u, v) = 1\} &= \mathbf{P}(A(r, u, v)) \\ &= \mathbf{P}\left\{\exists 1 \leq m < n < T: X_{(m)} = u, X_{(m+1)} = u+r, X_{(n)} = v, X_{(n+1)} = v+r\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{M(r, u, v) \subset \{X_1, \dots, X_T\}, M^*(r, u, v) \cap \{X_1, \dots, X_T\} = \emptyset\right\}. \end{aligned}$$

Эту вероятность можно интерпретировать следующим образом. Пусть T частиц независимо по равновероятной схеме размещаются по N ячейкам $\{1, \dots, N\}$, $\mu_0(T, N)$ — число пустых ячеек, а $\eta_j(T, N)$ — число частиц, попавших в j -ю ячейку. Тогда

$$A(r, u, v) = \left\{ \eta_j(T, N) > 0 \quad \forall j \in M(r, u, v), \quad \eta_j(T, N) = 0 \quad \forall j \in M^*(r, u, v) \right\}.$$

Используя формулу полной вероятности по числу частиц, попавших в ячейки из множества $M(r, u, v)$, находим, что при $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$, $r > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A(r, u, v)) &= \sum_{n=m(r, u, v)}^T C_T^n m(r, u, v)^n (N - 2(r-1) - m(r, u, v))^{T-n} N^{-T} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{\mu_0(n, m(r, u, v)) = 0\} \\ &= (1 + o(1)) C_T^{m(r, u, v)} (N - 2r)^{T-m(r, u, v)} m(r, u, v)^{m(r, u, v)} N^{-T} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{\mu_0(m(r, u, v), m(r, u, v)) = 0\} \\ &= (1 + o(1)) C_T^{m(r, u, v)} (N - 2r)^{T-m(r, u, v)} m(r, u, v)! N^{-T} \\ &= (1 + o(1)) T^{m(r, u, v)} (N - 2r)^{T-m(r, u, v)} N^{-T}. \end{aligned}$$

При $r = 0$ и $u \neq v$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A(0, u, v)) &= \sum_{n=4}^T C_T^n 2^n (N - 2)^{T-n} N^{-T} \mathbf{P}\{\eta_1(n, 2) \geq 2, \eta_2(n, 2) \geq 2\} \\ &< 16 C_T^4 N^{-4} \frac{1}{1 - 2T/5N}. \end{aligned}$$

Если $r = 0$ и $u = v$, то

$$\mathbf{P}(A(0, u, u)) = \sum_{n=3}^T C_T^n (N - 1)^{T-n} N^{-T} < C_T^3 N^{-3} \frac{1}{1 - T/4N}.$$

2) Покажем теперь, что в условиях леммы

$$\mathbf{E}\zeta(T, N) = \sum_{r=0}^{[(N-1)/2]} \sum_{u=1}^{N-2r} \sum_{v=u+r}^{N-r} \mathbf{P}\{\chi(r, u, v) = 1\} \rightarrow \lambda \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\zeta_R(T, N) \rightarrow \lambda.$$

а) Вклад в $\mathbf{E}\zeta(T, N)$ слагаемых, для которых $m(r, u, v) = 4$ (т.е. $r \neq 0$ и $u+r \neq v$), при $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$ составляет

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{[(N-2)/2]} \sum_{u=1}^{N-2r-1} \sum_{v=u+r+1}^{N-2r} \mathbf{P}\{\chi(r, u, v) = 1\} \\ &= (1 + o(1)) \sum_{r=1}^{[(N-2)/2]} \sum_{u=1}^{N-2r-1} T^4 N^{-T} (N-2r)^{T-4} (N-2r-u) \\ &= (1 + o(1)) T^4 N^{-T} \sum_{r=1}^{[(N-2)/2]} (N-2r)^{T-4} (N-2r) \frac{N-2r-1}{2} \\ &= (1 + o(1)) \frac{1}{2} T^4 N^{-T} \sum_{r=0}^{N/2} (N-2r)^{T-2} = (1 + o(1)) \frac{T^3}{4N} \rightarrow \lambda. \end{aligned}$$

Заметим, что при $N, T, R \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$

$$2 \sum_{r=1}^R (N-2r)^{T-2} = (1 + o(1)) \frac{N^{T-1}}{T-1} \left(1 - \left(1 - \frac{2R}{N} \right)^{T-1} \right).$$

Если $N = o(RT)$, то $(1 - 2R/N)^{T-1} \rightarrow 0$ в условиях леммы. Тогда при $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$, $N = o(RT)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\zeta_R(T, N) &= \sum_{r=1}^R \sum_{u=1}^{N-2r-1} \sum_{v=u+r+1}^{N-r} \mathbf{P}\{\chi(r, u, v) = 1\} \\ &= (1 + o(1)) \frac{T^3}{4N} \left(1 - \left(1 - \frac{2R}{N} \right)^{T-1} \right) \rightarrow \frac{T^3}{4N} \rightarrow \lambda. \end{aligned}$$

Первое утверждение леммы доказано.

б) При $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$ вклад в $\mathbf{E}\zeta(T, N)$ слагаемых, для которых $r \neq 0$ и $m(r, u, v) = 3$, составляет

$$(1 + o(1)) \sum_{r=1}^{[(N-1)/2]} \sum_{u=1}^{N-2r} N^{-T} C_T^3 3! (N-2r-1)^{T-3} = (1 + o(1)) \frac{T^2}{2N} = o(1),$$

вклад слагаемых, для которых $r = 0$, $u \neq v$, меньше

$$(1 + o(1)) \sum_{u=1}^{N-1} \sum_{v=u+1}^N T^4 N^{-4} \frac{1}{1 - 2T/5N} = O\left(\frac{T^4}{N^2}\right) = o(1)$$

и вклад слагаемых, для которых $r = 0$, $u = v$, меньше

$$(1 + o(1)) \sum_{u=1}^N C_T^3 N^{-3} \frac{1}{1 - T/4N} = O\left(\frac{T^3}{N^2}\right) = o(1).$$

Из а), б) следует, что существенное влияние на асимптотическое поведение $\mathbf{E}\zeta(T, N)$ оказывают лишь слагаемые из п. а), следовательно, $\mathbf{E}\zeta(T, N) \rightarrow \lambda$ в условиях леммы.

3) Соотношение $\mathbf{P}\{\zeta_R(T, N) = \zeta(T, N)\} \rightarrow 1$ следует из того, что $\mathbf{P}\{\zeta_R(T, N) \leq \zeta(T, N)\} = 1$, а пределы $\mathbf{E}\zeta(T, N)$ и $\mathbf{E}\zeta_R(T, N)$ совпадают

$$\mathbf{P}\{\zeta_R(T, N) \neq \zeta(T, N)\} \leq \mathbf{E}(\zeta(T, N) - \zeta_R(T, N)) = \mathbf{E}\zeta(T, N) - \mathbf{E}\zeta_R(T, N) = o(1).$$

Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 теорему достаточно доказать для случайных величин $\zeta_R(T, N)$. Для этого воспользуемся методом моментов в форме, предложенной Б. А. Севастьяновым [3]. Для доказательства сходимости факториальных моментов $m_k = \mathbf{E}(\zeta_R(T, N))^{[k]}$ к λ^k при $N, T \rightarrow \infty$ достаточно показать, что $\mathbf{E}\zeta_R(T, N) \rightarrow \lambda$ и что

для каждого $k = 2, 3, \dots$ можно указать исключительные множества $I_k \subset B^k$, состоящие из упорядоченных попарно различных наборов $(d_1, \dots, d_k)$, где $d_i = (r_i, u_i, v_i)$, $i = 1, \dots, k$, и удовлетворяющие следующим условиям:

$$\lim_{N, T \rightarrow \infty} \sum_{I_k} \prod_{i=1}^k \mathbf{P}(A(d_i)) = \lim_{N, T \rightarrow \infty} \sum_{I_k} \mathbf{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^k A(d_i) \right\} = 0, \quad (5)$$

$$\lim_{N, T \rightarrow \infty} \max_{d_i \notin I_k} \left| \frac{\mathbf{P}(A(d_1), \dots, A(d_k))}{\mathbf{P}(A(d_1)) \cdots \mathbf{P}(A(d_k))} - 1 \right| = 0. \quad (6)$$

Для набора $(d_1, \dots, d_k) \subset B^k$, где $d_i = (r_i, u_i, v_i)$, $i = 1, \dots, k$, введем обозначение $m(d_1, \dots, d_k) = |\cup_{i=1}^k M(r_i, u_i, v_i)|$. Положим

$$I_k = I_k^1 \cup I_k^2, \quad (7)$$

где

$$I_k^1 = \left\{ (d_1, \dots, d_k) \in B^k : \mathbf{P}(A(d_1), \dots, A(d_k)) = 0 \right\},$$

$$I_k^2 = \left\{ (d_1, \dots, d_k) \in B^k : m(d_1, \dots, d_k) \neq 4k \right\}.$$

Лемма 2. Если множества I_k выбраны в соответствии с формулой (7), то соотношения (5) и (6) выполняются.

Доказательство. Легко проверить, что

$$\mathbf{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^k A(d_i) \right\} = \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{i=1}^k M(r_i, u_i, v_i) \subset \{X_1, \dots, X_T\}, \right. \\ \left. \bigcup_{i=1}^k M^*(r_i, u_i, v_i) \cap \{X_1, \dots, X_T\} = \emptyset \right\}.$$

Используем такую же интерпретацию, как в п. 1) доказательства леммы 1, и применим формулу полной вероятности по числу частиц, попавших в ячейки из множества $\cup_{i=1}^k M(r_i, u_i, v_i)$. Если $d_i \notin I_k^1$, т.е. $\cup_{i=1}^k M(r_i, u_i, v_i) \cap \cup_{i=1}^k M^*(r_i, u_i, v_i) = \emptyset$, то при $k = \text{const}$, $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$

$$\mathbf{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^k A(d_i) \right\} \\ = (1 + o(1)) N^{-T} C_T^{m(d_1, \dots, d_k)} m(d_1, \dots, d_k)! (N - 2(r_1 + \dots + r_k))^{T - m(d_1, \dots, d_k)} \\ = (1 + o(1)) N^{-T} T^{m(d_1, \dots, d_k)} (N - 2(r_1 + \dots + r_k))^{T - m(d_1, \dots, d_k)}. \quad (8)$$

Если $d_i \in I_k^1$, то $\mathbf{P}\{\cap_{i=1}^k A(d_i)\} = 0$, причем в силу определения величины $\zeta_R(T, N)$

$$\mathbf{P}(A(d_i)) = (1 + o(1)) N^{-T} T^4 (N - 2r_i)^{T-4}. \quad (9)$$

2) Покажем теперь, что выполняется соотношение (6). Пусть $(d_1, \dots, d_k) \notin I_k$, тогда, используя соотношения (8) и (9), получим при $k = \text{const}$, $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$

$$\frac{\mathbf{P}(A(d_1), \dots, A(d_k))}{\mathbf{P}(A(d_1)) \cdots \mathbf{P}(A(d_k))} = (1 + o(1)) \frac{(N - 2(r_1 + \dots + r_k))^{T-4k} N^{Tk}}{N^T (N - 2r_1)^{T-4} \cdots (N - 2r_k)^{T-4}} \\ = (1 + o(1)) \frac{(1 - 2(r_1 + \dots + r_k)/N)^{T-4k}}{\prod_{i=1}^k (1 - 2r_i/N)^{T-4}}.$$

Возьмем для простоты доказательства $R = T^{9/4}$, тогда $N = o(RT)$ и $r_1 + \dots + r_k = O(R)$ при $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$, поэтому

$$\ln \frac{\mathbf{P}(A(d_1), \dots, A(d_k))}{\mathbf{P}(A(d_1)) \cdots \mathbf{P}(A(d_k))} = (T-4) \frac{2(r_1 + \dots + r_k)}{N} - (T-4k) \frac{2(r_1 + \dots + r_k)}{N} \\ + O\left(\frac{R}{N} + T \frac{R^2}{N^2}\right) = O(N^{-1/6}) = o(1),$$

следовательно, (6) выполняется.

3) Покажем сначала, что соотношения (5) выполняются для множества $I_k^2 \subset I_k$. Так как набор $(d_1, \dots, d_k) \in I_k^2$, если $m(d_1, \dots, d_k) \neq 4k$, то существуют такие $i \neq j$, что $M(r_i, u_i, v_i) \cap M(r_j, u_j, v_j) \neq \emptyset$.

а) При $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$, $k = \text{const}$

$$\begin{aligned} \sum_{I_k^2} \prod_{i=1}^k \mathbf{P}(A(d_i)) &\leq C_k^2 \sum^* \mathbf{P}(A(d_1)) \mathbf{P}(A(d_2)) \left(\sum_d \mathbf{P}(A(d)) \right)^{k-2} \\ &= C_k^2 \sum^* \mathbf{P}(A(d_1)) \mathbf{P}(A(d_2)) \lambda^{k-1} \\ &= O \left(\sum_{r_1, r_2=0}^{N/2} N^{-2T} T^8 (N-2r_1)^{T-4} (N-2r_2)^{T-4} N^3 \right) = O(N^{-1}) = o(1), \end{aligned}$$

где суммирование в $\sum^*$ ведется по d_1, d_2 таким, что $M(d_1) \cap M(d_2) \neq \emptyset$.

б) Используя формулу (8), находим:

$$\begin{aligned} \sum_{I_k^2} \mathbf{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^k A(d_i) \right\} &\leq \sum_{l=1}^{4k-1} \sum' \mathbf{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^k A(d_i) \right\} \\ &\leq \sum_{l=1}^{4k-1} \sum' N^{-T} T^{4k-l} (N-2(r_1 + \dots + r_k))^{T-4k+l} \\ &= O \left(\sum_{l=1}^{4k-1} \sum'' T^{4k-l} N^{-2k} \left(1 - \frac{2(r_1 + \dots + r_k)}{N} \right)^T \right) \\ &= O \left(\sum_{l=1}^{4k-1} \sum'' T^{4k-l} N^{-2k} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{2T \sum_{i=1}^k r_i} \right), \end{aligned}$$

где сумма $\sum'$ берется по $(d_1, \dots, d_k)$ таким, что $m(d_1, \dots, d_k) = 4k-l$, а сумма $\sum''$ — по $r_1, \dots, r_k \geq 0$ таким, что $r_1 + \dots + r_k < N/2$. Заметим, что

$$\sum'' \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{2T \sum_{i=1}^k r_i} \leq \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{2Tr} \right)^k < \left(\frac{N}{T} \right)^k. \quad (10)$$

Используя неравенство (10), получим:

$$\sum_{I_k^2} \mathbf{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^k A(d_i) \right\} = O \left(\sum_{l=1}^{4k-1} T^{4k-l} N^{-2k} \frac{N^k}{T^k} \right) = O \left(\frac{1}{T} \right) = o(1).$$

Из пп. а), б) следует, что для множества $I_k^2 \subset I_k$ соотношения (5) выполняются.

4) Осталось показать, что (5) выполняется для множества $I_k^1 \subset I_k$, т.е., что $\lim_{N, T \rightarrow \infty} \sum_{I_k^1} \prod_{i=1}^k \mathbf{P}(A(d_i)) = 0$. Если $(d_1, \dots, d_k) \in I_k^1$, то $M(r_i, u_i, v_i) \cap (\cup_{j \neq i} M^*(r_j, u_j, v_j)) \neq \emptyset$ при некотором i , т.е. $\{u_i, v_i\} \cap (\cup_{j \neq i} ([u_j - r_j + 1, u_j + r_j - 1] \cup [v_j - r_j + 1, v_j + r_j - 1])) \neq \emptyset$. Заметим, что при $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$

$$\sum_{r=0}^{N/2} r(N-2r)^{T-4} = 2^{T-4} \sum_{r=0}^{N/2} r^{T-4} \left(\frac{N}{2} - r \right) = O(N^{T-2} T^{-2}). \quad (11)$$

Используя формулы (9) и (11), при $N, T \rightarrow \infty$, $T^3 = O(N)$, $k = \text{const}$ находим:

$$\begin{aligned} &\sum_{(d_1, \dots, d_k) \in I_k^1} \mathbf{P}(A(d_1)) \dots \mathbf{P}(A(d_k)) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \sum_{d_j: j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}} \sum_{d_i: M(d_i) \cap (\cup_{j \neq i} M^*(d_j)) \neq \emptyset} \prod_{m=1}^k \mathbf{P}(A(d_m)) \\ &= O \left(T^{4k} N^{-kT} N^{2(k-1)} \sum_{i=1}^k N^3 \sum_{r_1, \dots, r_k=0}^{N/2} (r_1 + \dots + r_k + kr_i) \prod_{j=1}^k (N-2r_j)^{T-4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O\left(T^{4k} N^{-kT} N^{2(k+1)} \left(\frac{N^{T-3}}{T}\right)^{k-1} N^{T-2} T^{-2}\right) \\
&= O\left(\left(\frac{T}{N}\right)^k T^{-1}\right) = O(T^{-1}) = o(1).
\end{aligned}$$

Соотношение (5) и тем самым лемма 2 доказаны.

В силу леммы 2 для случайной величины $\zeta_R(T, N)$ выполнены условия теоремы Б. А. Севастьянова, следовательно, $\zeta_R(T, N)$ (а значит, в силу леммы 1 и $\zeta(T, N)$) имеет в пределе пуассоновское распределение с параметром λ . Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 223 с.
2. Aldous D. Probability Approximation via the Poisson Clumping Heuristic. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1989, 269 p.
3. Севастьянов Б. А. Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 4, с. 733–738.

Поступила в редакцию
12.III.2001

© 2002 г.

КУКСИН С. Б.*, НАДИРАШВИЛИ Н. С.**,
ПЯТНИЦКИЙ А. Л.***

ОЦЕНКИ ГЁЛЬДЕРОВСКИХ НОРМ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В работе рассмотрены стохастические уравнения с частными производными второго порядка с аддитивным шумом, заданные в ограниченной области пространства $\mathbf{R}^d$. В предположении, что коэффициенты при шуме являются L^p -функциями с достаточно большим p , мы доказываем, что решения непрерывны по Гёльдеру п.н., и что соответствующие гёльдеровские нормы имеют конечные моменты любого порядка.

Ключевые слова и фразы: стохастические уравнения, непрерывность по Гёльдеру.

* Heriot-Watt University, Edinburgh, EH14 4AS, UK; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: S.B.Kuksin@ma.hw.ac.uk

** University of Chicago, Department of Mathematics, 5734 University Avenue, Chicago, IL 60637, U.S.A.; e-mail: nicholas@math.uchicago.edu

*** Narvik University College, HiN, Postbox 385, 8505, Narvik, Norway; Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Ленинский проспект, 53, 117333 Москва, Россия; e-mail: andrey@sci.lebedev.ru