Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Боровских, М. Л. Пури, В. В. Сазонов, Нормальная аппроксимация U -статистик в гильбертовом пространстве, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 481–504

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:00:10

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 41
Выпуск 3, 1996 год
июль, август, сентябрь

© 1996 г.

БОРОВСКИХ Ю. В.*, ПУРИ М. Л.**,
САЗОНОВ В. В.***

НОРМАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ U -СТАТИСТИК В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\{U_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность U -статистик с ядром $\Phi(\cdot, \cdot)$ со значениями в гильбертовом пространстве H , построенная по последовательности наблюдений (случайных величин) $X_1, X_2, \dots$. Исследуется скорость сходимости на шарах в центральной предельной теореме для $\{U_n\}$. Полученная оценка имеет порядок $n^{-1/2}$ и явно зависит от $E\|\Phi(X_1, X_2)\|^3$, а также от следа и первых девяти собственных значений ковариационного оператора величины $E(\Phi(X_1, X_2)|X_1)$.

Ключевые слова и фразы: U -статистика, центральная предельная теорема, нормальная аппроксимация, разложение Хёфдинга, неравенство Эссеена.

1. Введение. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathcal{X})$ и одинаковым распределением P на нем; H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим UH -статистику

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi(X_i, X_j)$$

*С.-Петербургский Транспортный университет, кафедра прикладной математики, Московский просп., 9, 190031 С.-Петербург, Россия.

**Indiana University, Department of Mathematics, Bloomington, Indiana 47405, USA.

***Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова, 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

с симметрическим ядром $\Phi: X^2 \rightarrow H$ таким, что $E\Phi(X_1, X_2) = 0$, $E\|\Phi(X_1, X_2)\| < \infty$.

По разложению Хёффдинга,

$$U_n = 2n^{-1} \sum_{j=1}^n g_1(X_j) + 2n^{-1}(n-1)^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_2(X_i, X_j), \quad (1)$$

где

$$g_1(x) = \int_X \Phi(x, y) P(dy) = E(\Phi(X_1, X_2) | X_1 = x),$$

$$g_2(x, y) = \Phi(x, y) - g_1(x) - g_1(y).$$

Предполагается, что $\sigma^2 = E\|g_1(X_1)\|^2 > 0$, т.е. рассматривается U -статистика с невырожденным ядром Φ . Функция $g_2(x, y)$ обладает свойством вырожденности:

$$\int_X g_2(x, y) P(dy) = 0 \quad (\text{п.н.}) \quad (2)$$

При условии $\sigma^2 < \infty$ определим ковариационный оператор V :

$$(Vx, y) = \int_X (x, g_1(z)) (y, g_1(z)) P(dz), \quad x, y \in H,$$

и пусть Y — гауссов случайный элемент в H с нулевым средним значением и ковариационным оператором $\sigma^{-2}V$. Пусть $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots$ — собственные значения V ; $B_r(a) = \{x \in H: \|x - a\| < r\}$ для любых $r \geq 0$, $a \in H$ и $B_r = B_r(0)$.

По центральной предельной теореме для UH -статистик в условиях

$$E\|g_1(X_1)\|^2 < \infty, \quad E\|g_2(X_1, X_2)\|^{4/3} < \infty$$

справедливо соотношение (см. [1], [2], [5])

$$\Delta_n(a) = \sup_r \left| P\{\|2^{-1}n^{1/2}\sigma^{-1}U_n - a\| < r\} - P\{\|Y - a\| < r\} \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Скорость убывания к нулю относительно n величины $\Delta_n(0)$ оценивалась в [1], [2], [5], [12], где при дополнительных моментных условиях

$$E\|g_1(X_1)\|^3 < \infty, \quad E\|g_2(X_1, X_2)\|^2 < \infty$$

установлено, что

$$\Delta_n(0) = \rho_n(V) n^{-1/2},$$

где $\rho_n(V) \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$. Метод доказательства этого результата основан на том, что задачу об оценке вероятности попадания UH -статистики в шар B_r можно трактовать как задачу об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве для шаров с ненулевым случайным центром, с вероятностью 1 стремящимся при $n \rightarrow \infty$ к нулевому элементу в H . Однако, в [1], [2], [5], [12] предполагается, что число ненулевых собственных чисел ковариационного оператора V достаточно велико. Явная зависимость величины $\rho_n(V)$ от V в [1], [2], [5], [12] не определялась. Оценки порядка $O(n^{-1/3})$ для любых $a \in H$ получены в [14], при этом указана их явная зависимость от первых 6 собственных чисел оператора V .

Отметим, что в одномерном случае исследование задачи, рассматриваемой в настоящей работе, имеет довольно долгую историю, начало которой было положено Грамсом и Серфлингом [11] в 1973 году. Этапы этой истории освещены в [13] и [10], в [10] показано также, что результат, полученный В. С. Королюком и Ю. В. Боровских в 1985 году в [4], по существу, неулучшаем.

В настоящей работе изучается зависимость $\Delta_n(a)$ от n и ковариационного оператора V . При условии $\beta = \mathbb{E}\|\Phi(X_1, X_2)\|^3 < \infty$ вычислена оценка скорости сходимости порядка $n^{-1/2}$ и показано, что от ядра Φ эта оценка зависит только через β , σ и 9 собственных чисел σ_j , $j = 1, \dots, 9$ оператора V . Зависимость нашей оценки от n по порядку правильна, однако ее зависимость от σ_j^2 , σ^2 и β , по-видимому, допускает улучшение. Доказательство проводится методами работ [3] и [12].

2. Теорема. *Существует абсолютная постоянная c такая, что для всех $n \geq 2$ и $a \in H$*

$$\Delta_n(a) \leq c(1 + \|a\|^3)\sigma^4 \left(\prod_{j=1}^9 \sigma_j^{-1} \right) \sigma_9^{-1} \beta^2 n^{-1/2}, \quad (3)$$

когда $\beta < \infty$ и $\sigma_9 > 0$.

В дальнейшем мы можем и будем считать, что $\sigma = 1$. Общий случай сводится к этому переходом от функции Φ к функции $\sigma^{-1}\Phi$. Кроме того, мы будем предполагать, что $\beta < \infty$ и $\sigma_9 > 0$, ибо при нарушении этих условий неравенство (3) очевидно.

В процессе доказательства неравенства (3) верхние оценки для $\Delta_n(a)$ относительно моментов ядра Φ будут выписаны более точно, в явном виде они выражаются только через моменты $\mathbb{E}\|g_1\|^3 = \mathbb{E}\|g_1(X_1)\|^3$, $\mathbb{E}\|g_2\|^3 = \mathbb{E}\|g_2(X_1, X_2)\|^3$, которые связаны с β неравенствами

$$\mathbb{E}\|g_1\|^3 \leq \beta, \quad \mathbb{E}\|g_2\|^3 \leq 27\beta. \quad (4)$$

Учитывая (4), мы даем окончательную формулировку теоремы с параметром β ради простоты.

3. Доказательство теоремы. В последующем символами $c, c_1, c_2, \dots$ будут обозначаться абсолютные постоянные, не обязательно одни и те же. Доказательство (3) разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\Delta_n(a) \leq \Delta_{n1}(a) + n \mathbf{P}\{\|g_1(X_1)\| > n^{1/2}\}, \quad (5)$$

где

$$\Delta_{n1}(a) = \sup_r \left| \mathbf{P}\{\|\bar{S}_n - a + V_n\| < r\} - \mathbf{P}\{\|Y - a\| < r\} \right|,$$

$$\bar{S}_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n g_1(X_j) I(\|g_1(X_j)\| \leq n^{1/2}),$$

$I(A)$ — индикаторная функция множества $A \in \mathcal{X}$,

$$V_n = (n-1)^{-1} n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} g_2(X_i, X_j).$$

Доказательство. В соответствии с (1), $2^{-1} n^{1/2} U_n - a = S_n - a + V_n$, где $S_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n g_1(X_j)$, и мы имеем, очевидно,

$$\Delta_n(a) \leq \Delta_{n1}(a) + \sup_r \left| \mathbf{P}\{\|S_n - a + V_n\| < r\} - \mathbf{P}\{\|\bar{S}_n - a + V_n\| < r\} \right|.$$

Применяя теперь лемму 1 из [17] с $f(x) = I(\|x\| < r)$, $u_1 = \infty$, $u_2 = n^{1/2}$ и $Z = -a + V_n$, мы видим, что второе слагаемое в правой части этого неравенства не превосходит $n \mathbf{P}\{\|g_1(X_1)\| > n^{1/2}\}$, что и доказывает лемму.

Положим $k = n - [n^{2/3}]$, где $[n^{2/3}]$ — целая часть числа $n^{2/3}$, и обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} g_2(X_i, X_j), \quad \beta_k = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n g_2(X_i, X_j), \\ \delta_k &= \sum_{k+1 \leq i < j \leq n} g_2(X_i, X_j), \quad \bar{S}_n^k = n^{-1/2} \sum_{j=1}^k \bar{g}_1(X_j), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{g}_1(X_j) = g_1(X_j) I(\|g_1(X_j)\| \leq n^{1/2}), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$Z_n = 2\varepsilon_n (\bar{S}_n^k - a, \alpha_k), \quad \varepsilon_n = (n-1)^{-1} n^{-1/2}.$$

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$\Delta_{n1}(a) \leq \Delta_{n2}(a) + c_1 (1 + \|a\|^3) (\beta^2 + \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}) n^{-1/2}, \quad (7)$$

где $\Delta_{n2}(a) = \sup_r |\mathbf{P}\{\|\bar{S}_n - a\|^2 + Z_n < r\} - \mathbf{P}\{\|Y - a\|^2 < r\}|$.

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$\begin{aligned}\|\bar{S}_n - a + V_n\|^2 &= (\bar{S}_n - a + V_n, \bar{S}_n - a + V_n) \\ &= \|\bar{S}_n - a\|^2 + 2(\bar{S}_n - a, V_n) + \|V_n\|^2.\end{aligned}\quad (8)$$

В принятых обозначениях

$$\begin{aligned}\|V_n\|^2 &= (n-1)^{-2} n^{-1} \left\| \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} g_2(X_i, X_j) \right\|^2, \\ 2(\bar{S}_n - a, V_n) &= Z_n + 2\varepsilon_n(\bar{S}_n^k - a, \beta_k + \delta_k) + 2(\bar{S}_n - \bar{S}_n^k, V_n),\end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned}(\bar{S}_n^k - a, \beta_k + \delta_k) &= (\bar{S}_n^k, \beta_k) - (a, \beta_k) + (\bar{S}_n^k, \delta_k) - (a, \delta_k), \\ (\bar{S}_n - \bar{S}_n^k, V_n) &= \varepsilon_n(\bar{S}_n - \bar{S}_n^k, \alpha_k) + \varepsilon_n(\bar{S}_n - \bar{S}_n^k, \beta_k) \\ &\quad + \varepsilon_n(\bar{S}_n - \bar{S}_n^k, \delta_k).\end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие неравенства: для любых $p \geq 2$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|\bar{S}_n^k\|^p &\leq c_p, \\ \|\mathbf{E}\bar{g}_1(X_1)\| &= \left\| \int_{\|\bar{g}_1(x)\| > n^{1/2}} \bar{g}_1(x) \mathbf{P}(dx) \right\| \leq n^{-1/2}\end{aligned}\quad (9)$$

(см. [9], [16]) и

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|\alpha_k\|^p &\leq c_p \mathbf{E}\|g_2\|^p k^p, \\ \mathbf{E}\|\beta_k\|^p &\leq c_p \mathbf{E}\|g_2\|^p k^{p/2} (n-k)^{p/2}, \\ \mathbf{E}\|\delta_k\|^p &\leq c_p \mathbf{E}\|g_2\|^p (n-k)^p\end{aligned}\quad (10)$$

(см. [5, с. 57]).

С помощью (10) и неравенства Чебышева получаем оценку

$$\mathbf{P}\{\|V_n\|^2 \geq n^{-1/2}\} \leq n^{1/2} \mathbf{E}\|V_n\|^2 \leq c_1 \mathbf{E}\|g_2\|^2 n^{-1/2}.$$

Далее,

$$\mathbf{P}\left\{ |(\bar{S}_n^k, \varepsilon_n \beta_k)| > n^{-1/2} \right\} \leq \Pi_1 + \Pi_2, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \mathbf{P}\left\{ 2k\varepsilon_n \left| \left(\mathbf{E}\bar{g}_1(X_1), \sum_{i=1}^k h(X_i) \right) \right| > 1 \right\}, \\ \Pi_2 &= \mathbf{P}\left\{ 2\varepsilon_n \left| \left(\sum_{i=1}^k \bar{g}(X_i), \sum_{i=1}^k h(X_i) \right) \right| > 1 \right\},\end{aligned}$$

$$\bar{g}(X_i) = \bar{g}_1(X_i) - \mathbf{E}\bar{g}_1(X_1), \quad h(X_i) = \sum_{j=k+1}^n g_2(X_i, X_j), \quad i = 1, \dots, k.$$

Для Π_1 по (9)–(10) и неравенству Чебышева получаем оценку:

$$\Pi_1 \leq (2k\varepsilon_n)^3 \|\mathbf{E} g_1(X_1)\|^3 \mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^k h(X_i) \right\|^3 \leq c_1 \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-1/2}.$$

Чтобы оценить Π_2 , сначала заметим, что

$$\left(\sum_{i=1}^k \bar{g}(X_i), \sum_{i=1}^k h(X_i) \right) = \sum_{i=1}^4 A_i,$$

где

$$A_1 = k \mathbf{E}_1 (\bar{g}(X_1), h(X_1)),$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^k \left((\bar{g}(X_i), h(X_i)) - \mathbf{E}_1 (\bar{g}(X_1), h(X_1)) \right),$$

$$A_3 = \sum_{i_1=2}^k \sum_{i_2=1}^{i_1-1} (\bar{g}(X_{i_1}), h(X_{i_2})), \quad A_4 = \sum_{i_1=1}^{k-1} \sum_{i_2=i_1+1}^k (\bar{g}(X_{i_1}), h(X_{i_2}))$$

и, очевидно, $\mathbf{E}_k |A_1|^3 \leq k^3 |\mathbf{E}_1 (\bar{g}(X_1), h(X_1))|^3$, по [12]

$$\mathbf{E}_k |A_2|^3 \leq c_1 k^{3/2} \mathbf{E}_1 \left| (\bar{g}(X_1), h(X_1)) \right|^3$$

и по (10)

$$\mathbf{E}_k |A_3|^3 \leq c_1 k^3 \mathbf{E}_2 \left| (\bar{g}(X_1), h(X_2)) \right|^3,$$

$$\mathbf{E}_k |A_4|^3 \leq c_1 k^3 \mathbf{E}_2 \left| (\bar{g}(X_1), h(X_2)) \right|^3,$$

при этом $\mathbf{E}_k(\cdot)$ обозначает математическое ожидание по переменным $X_1, \dots, X_k$ при фиксированных $X_{k+1}, \dots, X_n$, $k = 1, \dots, n$.

Кроме того, поскольку $\mathbf{E} \|g_1(X_1)\|^2 = 1$,

$$\left| \mathbf{E}_1 (\bar{g}(X_1), h(X_1)) \right|^3 \leq \mathbf{E}_1 \|h(X_1)\|^3,$$

очевидно также, что

$$\mathbf{E}_1 \left| (\bar{g}(X_1), h(X_1)) \right|^3 \leq 8n^{3/2} \mathbf{E}_1 \|h(X_1)\|^3,$$

$$\mathbf{E}_2 \left| (\bar{g}(X_1), h(X_2)) \right|^3 \leq c_1 \mathbf{E}_1 \|\bar{g}(X_1)\|^3 \mathbf{E}_1 \|h(X_1)\|^3,$$

и по [12]

$$\overline{\mathbf{E}}_k \|h(X_1)\|^3 \leq c_1(n-k)^{3/2} \overline{\mathbf{E}}_k \|g_2(X_1, X_{k+1})\|^3,$$

при этом $\overline{\mathbf{E}}_k(\cdot)$ обозначает математическое ожидание по переменным $X_{k+1}, \dots, X_n$ при фиксированных $X_1, \dots, X_k$, $k = 1, \dots, n$.

В результате получаем неравенство $\Pi_2 \leq c_1 \mathbf{E} \|g_1\|^3 \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-1/2}$ и, следовательно, оценку для вероятности слева в (11).

Аналогичным образом с помощью (9)–(10) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|c(\overline{S}_n^k, \varepsilon_n \delta_k)| > n^{-1/2}\} &\leq \mathbf{P}\{c\|\overline{S}_n^k\| > n^{1/6}\} + \mathbf{P}\{n^{1/6} \varepsilon_n \|\delta_k\| > n^{-1/2}\} \\ &\leq c^3 \mathbf{E} \|\overline{S}_n^k\|^3 n^{-1/2} + n^{1/2} n^{3/2} \varepsilon_n^3 \mathbf{E} \|\delta_k\|^3 \leq c_1 n^{-1/2} + c_2 \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-1/2}, \\ \mathbf{P}\{|c(a, \varepsilon_n \beta_k)| > n^{-1/2}\} &\leq c^3 \|a\|^3 \varepsilon_n^3 n^{3/2} \mathbf{E} \|\beta_k\|^3 \leq c_1 \mathbf{E} \|a\|^3 \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-1/2}, \\ \mathbf{P}\{|c(a, \varepsilon_n \delta_k)| > n^{-1/2}\} &\leq c^3 \|a\|^3 \varepsilon_n^3 n^{3/2} \mathbf{E} \|\delta_k\|^3 \leq c_1 \mathbf{E} \|a\|^3 \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-1/2}, \\ \mathbf{P}\{|c(\overline{S}_n - \overline{S}_n^k, \varepsilon_n \alpha_k)| > n^{-1/2}\} &\leq c^3 n^{3/2} \mathbf{E} \|\overline{S}_n - \overline{S}_n^k\|^3 \varepsilon_n^3 \mathbf{E} \|\alpha_k\|^3 \\ &\leq c_1 \mathbf{E} \|g_1\|^3 \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-1/2}, \\ \mathbf{P}\{|c(\overline{S}_n - \overline{S}_n^k, \varepsilon_n \beta_k)| > n^{-1/2}\} &\leq \mathbf{P}\{c\|\overline{S}_n - \overline{S}_n^k\| > 1\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\varepsilon_n \|\beta_k\| > n^{-1/2}\} \\ &\leq c^3 \mathbf{E} \|\overline{S}_n - \overline{S}_n^k\|^3 + n^{3/2} \varepsilon_n^3 \mathbf{E} \|\beta_k\|^3 \leq c_1 \mathbf{E} \|g_1\|^3 n^{-1/2} + c_2 \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-1/2}, \\ \mathbf{P}\{|c(\overline{S}_n - \overline{S}_n^k, \varepsilon_n \delta_k)| > n^{-1/2}\} &\leq \mathbf{P}\{c\|\overline{S}_n - \overline{S}_n^k\| > 1\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\varepsilon_n \|\delta_k\| > n^{-1/2}\} \\ &\leq c^3 \mathbf{E} \|\overline{S}_n - \overline{S}_n^k\|^3 + n^{3/2} \varepsilon_n^3 \mathbf{E} \|\delta_k\|^3 \leq c_1 \mathbf{E} \|g_1\|^3 n^{-1/2} + c_2 \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-1/2}. \end{aligned}$$

Далее, обозначим

$$Y_n = 2\varepsilon_n(\overline{S}_n^k - a, \beta_k + \delta_k) + 2(\overline{S}_n - \overline{S}_n^k, V_n) + \|V_n\|^2.$$

Тогда, в соответствии с (8),

$$\|\overline{S}_n - a + V_n\|^2 = \|\overline{S}_n - a\|^2 + Z_n + Y_n,$$

и оценки, приведенные выше, дают

$$\mathbf{P}\{|Y_n| > n^{-1/2}\} \leq c_1(1 + \|a\|^3) \mathbf{E} \|g_1\|^3 \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-1/2}. \quad (12)$$

Так как для всех $r \geq 0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\|\overline{S}_n - a\|^2 + Z_n < r - n^{-1/2}\} - \mathbf{P}\{|Y_n| > n^{-1/2}\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\|\overline{S}_n - a\|^2 + Z_n + Y_n < r\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\|\overline{S}_n - a\|^2 + Z_n < r + n^{-1/2}\} + \mathbf{P}\{|Y_n| > n^{-1/2}\}, \end{aligned}$$

то

$$\Delta_{n1}(a) \leq \Delta_{n2}(a) + \mathbf{P}\{|Y_n| > n^{-1/2}\} + \sup_r \mathbf{P}\{r - n^{-1/2} \leq \|Y - a\|^2 \leq r + n^{-1/2}\}. \quad (13)$$

В [6, с. 84] показано, что

$$\sup_r \mathbf{P}\{r - n^{-1/2} \leq \|Y - a\|^2 \leq r + n^{-1/2}\} \leq c \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} n^{-1/2}. \quad (14)$$

Из (12)–(14) следует (7).

Далее, обозначим $\varphi_n(t) = \mathbf{E} \exp(it \|\bar{S}_n - a\|^2 + it Z_n)$,

$$\varphi(t) = \mathbf{E} \exp(it \|Y - a\|^2), \quad \psi_n(t) = \mathbf{E} \exp(it \|\bar{S}_n - a\|^2).$$

Плотность распределения случайной величины $\|Y - a\|^2$ не превосходит (см. [6]) $c(\sigma_1 \sigma_2)^{-1}$. Поэтому с помощью неравенства Эссеена (см., например, [7, с. 154]) можно написать для величины $\Delta_{n2}(a)$ в (7) оценку: для любого $T > 0$

$$\Delta_{n2}(a) \leq c_1 \int_{-T}^T |\varphi_n(t) - \varphi(t)| |t|^{-1} dt + c_2 (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} T^{-1}. \quad (15)$$

В (15) выберем параметр

$$T = \frac{c n^{1/2}}{L}, \quad L = 3 \sigma_9^{-2} \mathbf{E} \|g_1\|^3, \quad \sigma_9 > 0, \quad (16)$$

с достаточно малой абсолютной постоянной, с тем чтобы в дальнейшем применить лемму 12 из [3]. Отметим, что при данном L в (16) выполняются следующие условия леммы 12 из [3]:

$$\frac{2}{3} \leq L^2 \leq \frac{n}{2e}, \quad \mathbf{P}(B_L) \geq \frac{1}{2} \quad (17)$$

(доказательство см. в [3], [9], [16]). При условии (17) распределение случайной величины $\bar{g}_1 = g_1(X_1) I(\|g_1(X_1)\| \leq n^{1/2})$ можно представить в виде суммы $(Q + Q_1)/2$, где $Q(A) = \mathbf{P}(A \cap B_L)/\mathbf{P}(B_L)$, $A \in \mathcal{H}$ и Q_1 — некоторая вероятностная мера (см. [15, с. 89]).

Пусть V_1 — ковариационный оператор меры Q и $\sigma_{11}^2 \geq \sigma_{12}^2 \geq \dots$ — собственные значения V_1 . По предположению $\text{tr } V = 1$. Тогда (см. [3]) при условии (17) $\text{tr } V_1 \leq 2$ и

$$\frac{2\sigma_j^2}{3} \leq \sigma_{1j}^2 \leq 2\sigma_j^2, \quad j = 1, \dots, 9. \quad (18)$$

В последующих оценках интеграла в (15) нам понадобится лемма 11 из [3] (см. также лемму 4 в [9]), которую мы приведем здесь в такой формулировке.

Лемма 3. Пусть

$$Z = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{l+m} \bar{g}_1(X_j), \quad Z_1(f) = \sum_{j=1}^{l+m} f(X_j),$$

где $\bar{g}_1 = g_1(X_1) I(\|g_1(X_1)\| \leq n^{1/2})$, а $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ — любая измеримая функция; l, m — натуральные числа, $l \leq m, l+m \leq n$. Тогда для всякого $A > 0$, четного $k \geq 0$, целых $r \geq 0, k_j \geq 0, j = 1, \dots, r$, и любых $x, x_j \in H, j = 1, \dots, r$ при $l > L^2$ в области $|t| \leq c(A) n L^{-1} (l \log(l/L^2))^{-1/2}$ и при $l \leq L^2$ для всех t справедлива оценка

$$\left| \mathbf{E} \exp(it \|Z + x\|^2 + it Z_1(F)) \|Z\|^k \prod_{j=1}^r (x_j, Z)^{k_j} \right| \leq c_1 \prod_{j=1}^r \|x_j\|^{k_j} \left(\exp(-c_2 l) + c_3 \left(\frac{L^2}{l} \right)^A + h^{1/2} \left(\frac{c_4 T_1^2 l m}{n^2}, V_1 \right) \right), \quad (19)$$

где c_1, c_2 — функции от $\bar{k} = k + k_1 + \dots + k_r$; c_3, c_4 — функции от A и $\bar{k}$;

$$T_1 = \min \left\{ |t|, n L^{-1} \left(m \log \left(\frac{m}{L^2} \right) \right)^{-1/2} \right\}, \quad h(s, V_1) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + 2s \sigma_{1j}^4)^{-1/2}.$$

Доказательство см. в [3, с. 233–237]. Приведенная здесь формулировка содержит величину $Z_1(f)$ слева в неравенстве (19), а лемма 11 в [3] дана лишь для случая $Z_1(f) = 0$.

Займемся оценкой интеграла в (15). Сначала пишем

$$\int_{-T}^T |\varphi_n(t) - \varphi(t)| |t|^{-1} dt \leq I_1 + I_2, \quad (20)$$

где

$$I_1 = \int_{-T}^T |\psi_n(t) - \varphi(t)| |t|^{-1} dt, \quad I_2 = \int_{-T}^T |\varphi_n(t) - \psi(t)| |t|^{-1} dt.$$

По лемме 12 из [3, с. 238]

$$I_1 \leq c_1 U, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} U &= c_7(V) \left(\mathbf{E}(\|g_1\|^2 + (a, g_1)^2) I(\|g_1\| > n^{1/2}) \right) \\ &\quad + \left(\mathbf{E}(\|g_1\|^3 + |(a, g_1)|^3) I(\|g_1\| \leq n^{1/2}) + (Va, a)^{3/2} \right) n^{-1/2} \\ &\quad + c_3(V) \sigma_9^{-2} \mathbf{E} \|g_1\|^3 n^{-1/2}, \quad c_s(V) = \prod_{j=1}^s \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что в (21)

$$\begin{aligned} U &\leq (1 + \|a\|^3) c_7(V) \mathbf{E} \|g_1\|^3 n^{-1/2} + c_3(V) \sigma_9^{-2} \mathbf{E} \|g_1\|^3 n^{-1/2} \\ &\leq 2 (1 + \|a\|^3) \beta c_9(V) \sigma_9^{-1} n^{-1/2}. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим слагаемое I_2 в (20). Очевидно, что

$$\varphi_n(t) - \psi_n(t) = \mathbf{E} \exp \{it \|\bar{S}_n - a\|^2\} (e^{it Z_n} - 1).$$

В формуле

$$e^z - 1 = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{z^s}{s!} + z^r \int_0^1 \frac{(1-u)^{r-1} e^{uz} du}{(r-1)!}, \quad (22)$$

справедливой при всех комплексных z и целых r , положим $r = 3$, $z = it Z_n$. Тогда

$$\varphi_n(t) - \psi_n(t) = it J_1(t) - \frac{t^2 J_2(t)}{2} + \frac{(it)^3 J_3(t)}{2}, \quad (23)$$

где

$$J_1(t) = \mathbf{E} \left(Z_n \exp \{it \|\bar{S}_n - a\|^2\} \right), \quad J_2(t) = \mathbf{E} \left(Z_n^2 \exp \{it \|\bar{S}_n - a\|^2\} \right),$$

$$J_3(t) = \int_0^1 du (1-u)^2 \mathbf{E} \left(Z_n^3 \exp \{it \|\bar{S}_n - a\|^2 + itu Z_n\} \right).$$

Лемма 4. В области $|t| \leq T = cn^{1/2} L^{-1}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |J_3(t)| &\leq c_1 \left(L^{3/2} n^{-1/2} + \prod_{j=1}^7 \left(1 + \frac{c_2 \sigma_j^4 t^2}{n^{2/3}} \right)^{-1/4} \right) \\ &\quad \times (\mathbf{E} \|g_1\|^3 + \|a\|^3) \mathbf{E} \|g_2\|^3 n^{-3/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Доказательство. Случайная величина Z_n не зависит от последовательности $X_{k+1}, \dots, X_n$. Учитывая это, имеем

$$\left| \mathbf{E} \left(Z_n^3 \exp \{it \|\bar{S}_n - a\|^2 + itu Z_n\} \right) \right| \leq \mathbf{E}_k |Z_n|^3 \left| \bar{\mathbf{E}}_k \exp \{it \|\bar{S}_n - a\|^2\} \right|,$$

где, как и прежде, $\bar{\mathbf{E}}_k(\cdot)$ обозначает математическое ожидание по переменным $X_{k+1}, \dots, X_n$ при фиксированных $X_1, \dots, X_k$. Отметим, что $\bar{S}_n = (\bar{S}_n - \bar{S}_n^k) + \bar{S}_n^k$. Применим лемму 3, полагая $Z = \bar{S}_n - \bar{S}_n^k$, $1 \sim n^{2/3}/4$, $m \sim 3n^{2/3}/4$, $A = \frac{3}{4}$ и замечая, что $T_1 = |t|$. Тогда

$$\begin{aligned} &\left| \bar{\mathbf{E}}_k \exp \{it \|\bar{S}_n - a\|^2\} \right| \\ &\leq c_1 \left(\exp(-c_2 n^{2/3}) + c_3 L^{3/2} n^{-1/2} + \prod_{j=1}^7 \left(1 + \frac{c_4 \sigma_j^4 t^2}{n^{2/3}} \right)^{-1/4} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Для оценки $\mathbf{E}|Z_n|^3$ сначала имеем

$$\mathbf{E}|Z_n|^3 \leq 32 \varepsilon_n^3 \left(\mathbf{E} |(\bar{S}_n^k, \alpha_k)|^3 + \|a\|^3 \mathbf{E} \|\alpha_k\|^3 \right). \quad (26)$$

Затем скалярное произведение $(\bar{S}_n^k, \alpha_k)$ распишем в виде

$$\begin{aligned} (\bar{S}_n^k, \alpha_k) = n^{-1/2} & \left(\sum_{j=1}^k \bar{g}(X_j), \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} g_2(X_{i_1}, X_{i_2}) \right) \\ & + n^{-1/2} k \left(\mathbf{E} \bar{g}_1(X_1), \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} g_2(X_{i_1}, X_{i_2}) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

В (27) с помощью (9)–(10) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \left(\mathbf{E} \bar{g}_1(X_1), \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} g_2(X_{i_1}, X_{i_2}) \right) \right|^3 \\ \leq \|\mathbf{E} \bar{g}_1(X_1)\|^3 \mathbf{E} \left\| \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} g_2(X_{i_1}, X_{i_2}) \right\|^3 \leq c_1 n^{-3/2} k^3 \mathbf{E} \|g_2\|^3 \end{aligned}$$

Для оценки второго скалярного произведения в правой части (27) воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^k \bar{g}_1(X_j), \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} g_2(X_{i_1}, X_{i_2}) \right) \\ & = \sum_{j=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} (\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_1}, X_{i_2})) = \sum_{i=1}^5 G_i, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= \sum_{j=3}^k \sum_{i_2=2}^{j-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} (\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_1}, X_{i_2})), \\ G_2 &= \sum_{j=2}^k \sum_{i_1=1}^{j-1} (\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_1}, X_j)), \\ G_3 &= \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{i_1=1}^{j-1} \sum_{i_2=j+1}^k (\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_1}, X_{i_2})), \\ G_4 &= \sum_{j=1}^k \sum_{i_2=j+1}^k (\bar{g}_1(X_j), g_2(X_j, X_{i_2})), \\ G_5 &= \sum_{j=1}^k \sum_{i_2=j+2}^k \sum_{i_1=j+1}^{i_2-1} (\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_1}, X_{i_2})). \end{aligned}$$

С помощью (10) далее имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|G_i|^3 &\leq c_1 \mathbf{E}\|g_1\|^3 \mathbf{E}\|g_2\|^3 n^{9/2}, & i = 1, 3, 5, \\ \mathbf{E}|G_i|^3 &\leq c_2 \mathbf{E}\|g_2\|^3 n^{9/2}, & i = 2, 4. \end{aligned} \quad (28)$$

Объединяя вместе (27)–(28), получим

$$\mathbf{E}|Z_n|^3 \leq c_1 (\mathbf{E}\|g_1\|^3 + \|a\|^3) \mathbf{E}\|g_2\|^3 n^{-3/2}.$$

Отсюда и из (25) следует (24).

Для $m \sim n$ разобьем область $|t| \leq T = cn^{1/2} L^{-1}$ на две области:

$$|t| \leq T(m) = nL^{-1} \left(m \log \frac{m}{L^2} \right)^{-1/2} \quad (29)$$

и

$$T(m) \leq |t| \leq T. \quad (30)$$

Лемма 5. В области (29) справедлива оценка

$$\begin{aligned} |J_1(t)| &\leq c_1 (1 + \|a\|^3) (\mathbf{E}\|g_1\|^3) (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} \\ &\times \left(L^3 n^{-1/2} + (|t| + t^2) \prod_{j=1}^7 (1 + c_2 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right. \\ &\quad \left. + |t|^3 \prod_{j=1}^9 (1 + c_2 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right) n^{-1/2}, \end{aligned} \quad (31)$$

а в области (30)

$$|J_1(t)| \leq c_1 (1 + \|a\|^3) (\mathbf{E}\|g_1\|^3) (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} c_9(V) L^2 n^{-1}. \quad (32)$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\begin{aligned} J_1(t) &= 4n^{-1/2} \varepsilon_n \binom{k}{2} h_1(t) + 2(k-2) n^{-1/2} \varepsilon_n \binom{k}{2} h_2(t) \\ &\quad - 2\varepsilon_n \binom{k}{2} h_3(t), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1), g_2(X_1, X_2)) \exp \left\{ it \|\bar{g}_{1n}(X_1) + \bar{g}_{1n}(X_2) + \bar{S}_{n2}\|^2 \right\} \right), \\ h_2(t) &= \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ it \|\bar{g}_{1n}(X_1) + \bar{g}_{1n}(X_2) + \bar{g}_{1n}(X_3) + \bar{S}_{n3}\|^2 \right\} \right), \end{aligned}$$

$$h_3(t) = \mathbf{E} \left((a, g_2(X_1, X_2)) \exp \left\{ it \left\| \bar{g}_{1n}(X_1) + \bar{g}_{1n}(X_2) + \bar{S}_{n2} \right\|^2 \right\} \right),$$

$$\bar{g}_{1n}(X_j) = \bar{g}_1(X_j) n^{-1/2}, \quad \bar{S}_{nr} = n^{-1/2} \sum_{j=r+1}^n \bar{g}_1(X_j) - a.$$

Действительно, в соответствии с определением,

$$J_1(t) = 2n^{-1/2} \varepsilon_n \sum_{i=1}^5 H_i(t) - 2\varepsilon_n H_6,$$

$$H_1(t) = \sum_{j=3}^k \sum_{i_2=2}^{j-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_1}, X_{i_2})) \exp \left\{ it \left\| \bar{S}_n - a \right\|^2 \right\} \right)$$

$$= \binom{k}{3} h_2(t),$$

$$H_2(t) = \sum_{j=2}^k \sum_{i_2=1}^{j-1} \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_2}, X_j)) \exp \left\{ it \left\| \bar{S}_n - a \right\|^2 \right\} \right)$$

$$= \binom{k}{2} h_1(t),$$

$$H_3(t) = \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{i_1=1}^{j-1} \sum_{i_2=j+1}^k \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_1}, X_{i_2})) \exp \left\{ it \left\| \bar{S}_n - a \right\|^2 \right\} \right)$$

$$= \binom{k}{3} h_2(t),$$

$$H_4(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i_1=j+1}^k \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_1}, X_j)) \exp \left\{ it \left\| \bar{S}_n - a \right\|^2 \right\} \right)$$

$$= \binom{k}{2} h_1(t),$$

$$H_5(t) = \sum_{j=1}^{k-2} \sum_{i_2=j+2}^k \sum_{i_1=j+1}^{i_2-1} \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_j), g_2(X_{i_1}, X_{i_2})) \exp \left\{ it \left\| \bar{S}_n - a \right\|^2 \right\} \right)$$

$$= \binom{k}{3} h_2(t),$$

$$H_6(t) = \sum_{i_2=2}^k \sum_{i_1=1}^{i_2-1} \mathbf{E} \left((a, g_2(X_{i_1}, X_{i_2})) \exp \left\{ it \left\| \bar{S}_n - a \right\|^2 \right\} \right) = \binom{k}{2} h_3(t).$$

Из этих представлений следует (33).

Далее, оценим функции $h_i(t)$ в (33). Очевидно, что

$$\left\| \bar{g}_{1n}(X_1) + \bar{g}_{1n}(X_2) + \bar{S}_{n2} \right\|^2 = \left\| \bar{S}_{n2} \right\|^2 + W_1 + W_2,$$

где

$$W_1 = \|\bar{g}_{1n}(X_1) + \bar{g}_{1n}(X_2)\|^2, \quad W_2 = 2(\bar{g}_{1n}(X_1) + \bar{g}_{1n}(X_2), \bar{S}_{n2}).$$

По формуле (22) при $r = 1$ и $z = it(W_1 + W_2)$ с учетом свойства вырожденности (2) функции $g_2(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} h_1(t) = & it \int_0^1 du \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1), g_2(X_1, X_2)) W_1 \exp\{it u W_1\} \right. \\ & \times \bar{\mathbf{E}}_2 \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n2}\|^2 + itu W_2 \right\} \Big) \\ & + it \int_0^1 du \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1), g_2(X_1, X_2)) \exp\{itu W_1\} \right. \\ & \times \bar{\mathbf{E}}_2 \left(\exp \left\{ it \|\bar{S}_{n2}\|^2 + itu W_2 \right\} W_2 \right) \Big). \end{aligned}$$

Математическое ожидание $\bar{\mathbf{E}}_2$ по переменным $X_3, \dots, X_n$ оценим с помощью леммы 3. Для оценки $h_1(t)$ в области (29) положим в лемме 3: $l \sim n/2$, $m = n - l$, $A = 1$. Тогда $T_1 = |t|$ и

$$\begin{aligned} & \left| \bar{\mathbf{E}}_2 \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n2}\|^2 + itu W_2 \right\} \right| \\ & \leq c_1 \left(\exp(-c_2 n) + c_3 L^2 n^{-1} + \prod_{j=1}^5 (1 + c_2 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \left| \bar{\mathbf{E}}_2 \left(\exp \left\{ it \|\bar{S}_{n2}\|^2 + itu W_2 \right\} W_2 \right) \right| \leq c_1 (1 + \|a\|) \|\bar{g}_{1n}(X_1) + g_{1n}(X_2)\| \\ & \times \left(\exp(-c_2 n) + c_3 L^2 n^{-1} + \prod_{j=1}^5 (1 + c_2 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\left| (\bar{g}_1(X_1), g_2(X_1, X_2)) \right| \|\bar{g}_{1n}(X_1) + \bar{g}_{1n}(X_2)\| \right) \\ & \leq n^{-1/2} \left(\mathbf{E} \left(\|g_1(X_1)\|^2 \|g_2(X_1, X_2)\| \right) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{E} \left(\|g_1(X_1)\| \|g_1(X_2)\| \|g_2(X_1, X_2)\| \right) \right) \\ & \leq 2n^{-1/2} (\mathbf{E} \|g_1\|^3)^{2/3} (\mathbf{E} \|g_2\|^3)^{1/3}, \\ & \mathbf{E} \left(\left| (\bar{g}_1(X_1), g_2(X_1, X_2)) \right| \|\bar{g}_{1n}(X_1) + \bar{g}_{1n}(X_2)\|^2 \right) \\ & \leq 2n^{-1/2} (\mathbf{E} \|g_1\|^3)^{2/3} (\mathbf{E} \|g_2\|^3)^{1/3}. \end{aligned}$$

Таким образом, по (34)–(35) в области (29)

$$|h_1(t)| \leq c_1(1 + \|a\|) (\mathbf{E}\|g_1\|^3)^{2/3} (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} \times \left(Ln^{-1/2} + |t| \prod_{j=1}^7 (1 + c_2 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right) n^{-1/2}. \quad (36)$$

Для оценки $h_1(t)$ в области (30) выберем в лемме 3 $l \sim n/\log n$, $m = n-l$, $A = \frac{5}{4}$. Тогда $T_1 = T(m)$ и аналогичные рассуждения приводят в области (30) к неравенству

$$|h_1(t)| \leq c_1 |t| (1 + \|a\|) (\mathbf{E}\|g_1\|^3)^{2/3} (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} \times \left(\exp \left(-\frac{c_2 n}{\log n} \right) + c_3 L^{5/2} n^{-5/4} (\log n)^{5/4} + \prod_{j=1}^5 \left(1 + \frac{c_4 \sigma_j^4 n}{L^2 (\log n) \log(m/L^2)} \right)^{-1/4} \right) n^{-1/2} \leq c_5 (1 + \|a\|) (\mathbf{E}\|g_1\|^3)^{2/3} (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} c_5(V) L^{3/2} n^{-1}. \quad (37)$$

Рассмотрим $h_2(t)$ в (33). Для удобства обозначим

$$\xi = \sum_{j=1}^3 \xi_j, \quad \bar{\xi} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{E} \bar{g}_{1n}(X_j), \quad \xi_j = \bar{g}_{1n}(X_j) - \mathbf{E} \bar{g}_{1n}(X_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Очевидно, что

$$\|\bar{g}_{1n}(X_1) + \bar{g}_{1n}(X_2) + \bar{g}_{1n}(X_3) + \bar{S}_{n3}\| = \|\xi + \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 = \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + W_3 + W_4 + W_5,$$

где $W_3 = \sum_{j=1}^3 \|\xi_j\|^2$, $W_4 = 2 \sum_{j=1}^3 (\xi_j, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi})$, $W_5 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (\xi_i, \xi_j)$.

В соответствии с определением $h_2(t)$ в (33) с помощью формулы (22) при $r = 2$ и $z = it W_5$ можем написать

$$h_2(t) = h_{21}(t) + h_{22}(t) + h_{23}(t), \quad (38)$$

где

$$h_{21}(t) = \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it(W_3 + W_4) \right\} \right),$$

$$h_{22}(t) = it \mathbf{E} \left((g_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) W_5 \times \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it(W_3 + W_4) \right\} \right),$$

$$h_{23}(t) = -t^2 \int_0^1 du (1-u) \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) W_5^2 \right. \\ \left. \times \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it(W_3 + W_4 + uW_5) \right\} \right).$$

Сначала заметим, что

$$|h_{23}(t)| \leq t^2 \mathbf{E} \left(|(\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3))| W_5^2 \right. \\ \left. \times \left| \bar{\mathbf{E}}_3 \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it W_4 \right\} \right| \right).$$

В области (29) по лемме 3 с $l \sim n/2$, $m = n - l$ и $A = \frac{3}{2}$

$$\left| \bar{\mathbf{E}}_3 \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it W_4 \right\} \right| \\ \leq c_1 \left(\exp(-c_2 n) + c_3 L^3 n^{-3/2} + \prod_{j=1}^7 (1 + c_4 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right), \quad (39)$$

а в области (30) с $l \sim n/\log n$, $m = n - l$, $A = \frac{7}{4}$

$$\left| \bar{\mathbf{E}}_3 \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it W_4 \right\} \right| \\ \leq c_1 \left(\exp \left(-\frac{c_2 n}{\log n} \right) + c_3 L^{7/2} n^{-7/4} (\log n)^{7/4} \right. \\ \left. + \prod_{j=1}^7 \left(1 + \frac{c_4 \sigma_j^4 n}{L^2 (\log n) \log(m/L^2)} \right)^{-1/4} \right). \quad (40)$$

Кроме того,

$$\mathbf{E} \left(|(\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3))| W_5^2 \right) \\ \leq c \left(\mathbf{E} \|g_1(X_1)\|^3 \right)^{2/3} (\mathbf{E} \|g_2\|^3)^{1/3} n^{-3/2}. \quad (41)$$

Объединяя (39)–(41), получим оценку для $h_{23}(t)$. По формуле (22) при $r = 1$, $z = it(W_3 + W_4)$ имеем

$$h_{22}(t) = F_1(t) + F_2(t), \quad (42)$$

где

$$F_1(t) = it \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) \right. \\ \left. \times W_5 \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it(W_3 + W_4) \right\} \right),$$

$$F_2(t) = -t^2 \int_0^1 du \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1) - \mathbf{E}\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) W_5 (W_3 + W_4) \right. \\ \left. \times \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + itu(W_3 + W_4) \right\} \right).$$

Здесь

$$|F_1(t)| \leq |t| \mathbf{E} \left(\left| (\mathbf{E}\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) W_5 \right| \right. \\ \left. \times \left| \bar{\mathbf{E}}_3 \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it W_4 \right\} \right| \right), \\ \mathbf{E} \left(\left| (\mathbf{E}\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) W_5 \right| \right) \leq 24 (\mathbf{E}\|g_2\|^2)^{1/2} n^{-3/2}.$$

Так что в области (29) по лемме 3 с $l \sim n/2$, $m = n - l$, $A = 1$

$$|F_1(t)| \leq c_1 |t| (\mathbf{E}\|g_2\|^2)^{1/2} \\ \times c_1 \left(\exp(-c_2 n) + c_3 L^2 n^{-1} + \prod_{j=1}^5 (1 + c_4 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right) n^{-3/2}, \quad (43)$$

а в области (30) с $l \sim n/\log n$, $m = n - l$ и $A = \frac{5}{4}$

$$|F_1(t)| \leq c_1 |t| (\mathbf{E}\|g_2\|^2)^{1/2} \\ \times c_1 \left(\exp \left(-\frac{c_2 n}{\log n} \right) + c_3 L^{5/2} \bar{n}^{5/4} (\log n)^{5/4} \right. \\ \left. + \prod_{j=1}^5 \left(1 + \frac{c_4 \sigma_j^4 n}{L^2 (\log n) \log(m/L^2)} \right)^{-1/4} \right) n^{-3/2}. \quad (44)$$

Чтобы оценить $F_2(t)$ в (42), сначала заметим, что

$$|F_2(t)| \leq t^2 \int_0^1 du \mathbf{E} \left(\left| (\bar{g}_1(X_1) - \mathbf{E}\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) W_5 \right| \right. \\ \left. \times \left| \bar{\mathbf{E}}_3(W_3 + W_4) \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it W_4 \right\} \right| \right), \\ \mathbf{E} \left(\left| (\bar{g}_1(X_1) - \mathbf{E}\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) W_5 \right| \left[W_3 + \sum_{j=1}^3 \|\xi_j\| (1 + \|a\|) \right] \right) \\ \leq c \mathbf{E}\|g_1\|^3 (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} (1 + \|a\|) n^{-3/2}.$$

С учетом этих неравенств в области (29) по лемме 3 с $l \sim n/2$, $m = n - l$, $A = \frac{3}{2}$

$$|F_2(t)| \leq c_1 t^2 (1 + \|a\|) \mathbf{E}\|g_1\|^3 (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3}$$

$$\times \left(\exp(-c_2 n) c_3 L^3 n^{-3/2} + \prod_{j=1}^7 (1 + c_4 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right) n^{-3/2}, \quad (45)$$

а в области (30) с $l \sim n \log n$, $m = n - l$ и $A = \frac{7}{4}$

$$\begin{aligned} |F_2(t)| \leq & c_1 t^2 (1 + \|a\|) \mathbf{E} \|g_1\|^3 (\mathbf{E} \|g_2\|^3)^{1/3} \\ & \times \left(\exp \left(-\frac{c_2 n}{\log n} \right) + c_3 L^{7/2} n^{-7/4} (\log n)^{7/4} \right. \\ & \left. + \prod_{j=1}^7 \left(1 + \frac{c_4 \sigma_j^4 n}{L^2 (\log n) \log(m/L^2)} \right)^{-1/4} \right) n^{-3/2}. \end{aligned} \quad (46)$$

В (38) осталось оценить $h_{21}(t)$. Для этой цели сначала воспользуемся представлением

$$h_{21}(t) = F_3(t) + F_4(t), \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} F_3(t) &= \mathbf{E} \left((\mathbf{E} \bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it(W_3 + W_4) \right\} \right), \\ F_4(t) &= \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1) - \mathbf{E} \bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) \right. \\ & \quad \left. \times W_5 \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it(W_3 + W_4) \right\} \right). \end{aligned}$$

По свойству вырожденности (2) функции $g_2(x, y)$ справедливы также представления

$$\begin{aligned} F_3(t) &= \mathbf{E} \left((\mathbf{E} \bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) \right. \\ & \quad \times \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it \|\xi_1\|^2 + 2it(\xi_1, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right\} \\ & \quad \left. \times \prod_{j=2}^3 \left(\exp \left\{ it \|\xi_j\|^2 + 2it(\xi_j, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right\} - 1 \right) \right), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} F_4(t) &= \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1) - \mathbf{E} \bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{j=1}^3 \left(\exp \left\{ it \|\xi_j\|^2 + 2it(\xi_j, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right\} - 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (49)$$

На следующем шаге в (48)–(49) применим формулу (22) при $r = 1$. Тогда

$$F_3(t) = -t^2 \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) \right. \\ \times \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 + it \|\xi_1\|^2 + 2it(\xi_1, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right\} \\ \times \prod_{j=2}^3 \left(\|\xi_j\|^2 + 2(\xi_j, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right) \\ \left. \times \int_0^1 du \exp \left\{ itu \|\xi_j\|^2 + 2itu(\xi_j, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right\} \right), \quad (50)$$

$$F_4(t) = (it)^2 \mathbf{E} \left((\bar{g}_1(X_1) - \mathbf{E}\bar{g}_1(X_1), g_2(X_2, X_3)) \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n3} + \bar{\xi}\|^2 \right\} \right. \\ \times \prod_{j=1}^3 \left(\|\xi_j\|^2 + 2(\xi_j, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right) \\ \left. \times \int_0^1 du \exp \left\{ itu \|\xi_j\|^2 + 2itu(\xi_j, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right\} \right). \quad (51)$$

Пусть

$$b_j = \|\xi_j\|^2 + 2(\xi_j, \bar{\xi}) - 2(\xi_j, a).$$

Тогда

$$\prod_{j=1}^3 \left(\|\xi_j\|^2 + 2(\xi_j, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right) = \prod_{j=2}^3 \left(b_j + 2(\xi_j, \bar{S}_{n3} + a) \right) \\ = b_2 b_3 + 2b_2(\xi_3, \bar{S}_{n3} + a) + 2b_3(\xi_2, \bar{S}_{n3} + a) \\ + 4(\xi_2, \bar{S}_{n3} + a)(\xi_3, \bar{S}_{n3} + a), \quad (52)$$

где, согласно введенному выше обозначению $\bar{S}_{n3} + a = n^{-1/2}(\bar{g}_1(X_4) + \dots + \bar{g}_1(X_n))$.

Отметим, что

$$\|\xi_j\| \leq 2, \quad \|\xi_j\| \leq n^{-1/2} \left(1 + \|g_1(X_j)\| \right), \\ |b_j| \leq 4(1 + \|a\|) \left(1 + \|g_1(X_j)\| \right) n^{-1/2}. \quad (53)$$

Сделаем замену в (50) по формуле (52). В результате получим четыре математических ожидания. К каждому из них применим лемму 3, учитывая также (53) и оценку $\|\mathbf{E}\bar{g}_1(X_1)\| \leq n^{-1/2}$. Тогда в области (29)

по лемме 3 с $l \sim n/2$, $m = n - l$, $A = \frac{3}{2}$

$$|F_3(t)| \leq c_1 t^2 (1 + \|a\|)^2 (\mathbf{E} \|g_2\|^2)^{1/2} \times \left(\exp(-c_2 n) + c_3 L^3 n^{-3/2} + \prod_{j=1}^7 (1 + c_4 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right) n^{-3/2}, \quad (54)$$

а в области (30) с $l \sim n/\log n$, $m = n - l$ и $A = \frac{7}{4}$

$$|F_3(t)| \leq c_1 t^2 (1 + \|a\|)^2 (\mathbf{E} \|g_2\|^2)^{1/2} \times \left(\exp\left(-\frac{c_2 n}{\log n}\right) + c_3 L^{7/2} n^{-7/4} (\log n)^{7/4} + \prod_{j=1}^7 \left(1 + \frac{c_4 \sigma_j^4 n}{L^2 (\log n) \log(m/L^2)}\right)^{-1/4} \right) n^{-3/2}. \quad (55)$$

Далее, для оценки $F_4(t)$ в (51) сначала напомним следующую формулу, аналогичную (52):

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^3 \left(\|\xi_j\|^2 + 2(\xi_j, \bar{S}_{n3} + \bar{\xi}) \right) &= b_1 b_2 b_3 + 2b_1 b_2 (\xi_3, \bar{S}_{n3} + a) \\ &+ 2b_1 b_3 (\xi_2, \bar{S}_{n3} + a) + 2b_2 b_3 (\xi_1, \bar{S}_{n3} + a) + 4b_1 (\xi_2, \bar{S}_{n3} + a) (\xi_3, \bar{S}_{n3} + a) \\ &+ 4b_2 (\xi_1, \bar{S}_{n3} + a) (\xi_3, \bar{S}_{n3} + a) + 4b_3 (\xi_1, \bar{S}_{n3} + a) (\xi_2, \bar{S}_{n3} + a) \\ &+ 8(\xi_1, \bar{S}_{n3} + a) (\xi_2, \bar{S}_{n3} + a) (\xi_3, \bar{S}_{n3} + a). \end{aligned}$$

Затем по этой формуле делаем замену в (51), и в результате появляется восемь однотипных математических ожиданий, которые мы снова оценим с помощью леммы 3 с $l \sim n/2$, $m = n - l$, $A = 2$ в области (29)

$$|F_4(t)| \leq c_1 |t|^3 (1 + \|a\|)^3 (\mathbf{E} \|g_2\|^2)^{1/2} \times \left(\exp(-c_2 n) + c_3 L^4 n^{-2} + \prod_{j=1}^9 (1 + c_4 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right) n^{-3/2}, \quad (56)$$

а в области (30) с $l \sim n/\log n$, $m = n - l$ и $A = \frac{9}{4}$

$$|F_4(t)| \leq c_1 |t|^3 (1 + \|a\|)^3 (\mathbf{E} \|g_2\|^2)^{1/2} \times \left(\exp\left(-\frac{c_2 n}{\log n}\right) + c_3 L^{9/2} n^{-9/4} (\log n)^{9/4} + \prod_{j=1}^9 \left(1 + \frac{c_4 \sigma_j^4 n}{L^2 (\log n) \log(m/L^2)}\right)^{-1/4} \right) n^{-3/2}. \quad (57)$$

Объединяя (38)–(39), (42)–(43), (54) и (56), находим в области (29) оценку

$$|h_2(t)| \leq c_1 (1 + \|a\|)^3 (\mathbf{E}\|g_1\|^3) (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} \times \left(Ln^{-1/2} + (|t| + t^2) \prod_{j=1}^9 (1 + c_4 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} + |t|^3 \prod_{j=1}^9 (1 + c_4 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right) n^{-3/2}, \quad (58)$$

а из (38), (40), (42), (44), (55) и (57) в области (30) вытекает оценка

$$|h_2(t)| \leq c_1 (1 + \|a\|)^3 (\mathbf{E}\|g_1\|^3) (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} c_9(V) L^{3/2} n^{-2}. \quad (59)$$

Функцию $h_3(t)$ в (33) будем оценивать так же, как и $h_1(t)$. Применим (22) при $r = 1$ и $z = it(W_1 + W_2)$, $z = itu(W_1 + W_2)$ дважды. Тогда

$$h_3(t) = it \int_0^1 du \mathbf{E} \left((a, g_2(X_1, X_2)) W_1 \exp\{itu W_1\} \times \bar{\mathbf{E}}_2 \exp \left\{ it \|\bar{S}_{n2}\|^2 + itu W_2 \right\} \right) - t^2 \int_0^1 dv \int_0^1 du u \mathbf{E} \left((a, g_2(X_1, X_2)) \exp\{ituv W_1\} \times \bar{\mathbf{E}}_2 \left(\exp \{ it \|\bar{S}_{n2}\|^2 + ituv W_2 \} (W_1 + W_2) \right) \right).$$

Действуя далее так же, как при выводе (36) и (37), находим в области (29)

$$|h_3(t)| \leq c_1 (1 + \|a\|)^3 (\mathbf{E}\|g_1\|^3)^{2/3} (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} \times \left[Ln^{-1/2} + (|t| + t^2) \prod_{j=1}^7 (1 + c_4 \sigma_j^4 t^2)^{-1/4} \right] n^{-1}, \quad (60)$$

а в области (30)

$$|h_3(t)| \leq c_1 (1 + \|a\|)^3 (\mathbf{E}\|g_1\|^3)^{2/3} (\mathbf{E}\|g_2\|^3)^{1/3} c_7(V) L^{3/2} n^{-3/2}. \quad (61)$$

Из (33), (36), (58), (60) следует (31), а из (33), (37), (59), (61) следует (32).

Лемма 6. В области (29) справедлива оценка

$$|J_2(t)| \leq c_1 (1 + \|a\|^2) (\mathbf{E}\|g_1\|^3)^{2/3} \times \left(Ln^{-1/2} + n^{1/6} \prod_{j=1}^7 \left(1 + \frac{c_4 \sigma_j^4 t^2}{n^{1/3}} \right)^{-1/6} \right) n^{-1}, \quad (62)$$

а в области (30)

$$|J_3(t)| \leq c_1 (1 + \|a\|^2) (\mathbf{E} \|g_1\|^3)^{2/3} c_9(V) L^3 n^{-3/2}. \quad (63)$$

Доказательство. Замечая, что $J_2(t) = \mathbf{E}(Z_n^2 \bar{\mathbf{E}} \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\})$, имеем

$$\begin{aligned} |J_2(t)| &\leq 4\varepsilon_n^2 \mathbf{E} \left(\|\bar{S}_n^k\|^2 \|\alpha_k\|^2 |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}| \right) \\ &\quad + 4\varepsilon_n^2 \|a\|^2 \mathbf{E} \left(\|\alpha_k\|^2 |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}| \right). \end{aligned} \quad (64)$$

По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left(\|\bar{S}_n^k\|^2 \|\alpha_k\|^2 |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}| \right) \\ &\leq (\mathbf{E} \|\alpha_k\|^3)^{2/3} \left(\mathbf{E} \left(\|\bar{S}_n^k\|^6 |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}|^3 \right) \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (65)$$

Так как для любого $x > 0$ и $p > 0$

$$\|\bar{S}_n^k\|^6 \leq x^6 + x^{-p} \|\bar{S}_n^k\|^{p+6},$$

то в (65)

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left(\|\bar{S}_n^k\|^6 |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}|^3 \right) \\ &\leq x^6 \mathbf{E} |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}|^2 + x^{-p} \mathbf{E} \|\bar{S}_n^k\|^{p+6}. \end{aligned} \quad (66)$$

Второе математическое ожидание в (64) также оценим с помощью неравенства Гёльдера:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left(\|\alpha_k\|^2 |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}| \right) \\ &\leq \mathbf{E} (\|\alpha_k\|^3)^{2/3} \left(\mathbf{E} |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}|^3 \right)^{1/3} \\ &\leq \mathbf{E} (\|\alpha_k\|^3)^{2/3} \left(\mathbf{E} |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}|^2 \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (67)$$

Подставляя (65) в (64) и учитывая также, что $(\alpha + \beta)^{1/3} \leq \alpha^{1/3} + \beta^{1/3}$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} |J_2(t)| &\leq 4\varepsilon_n^2 \mathbf{E} (\|\alpha_k\|^3)^{2/3} \left[x^{-p/3} (\mathbf{E} \|\bar{S}_n^k\|^{p+6})^{1/3} + (x^2 + \|a\|^2) \right. \\ &\quad \left. \times (\mathbf{E} |\bar{\mathbf{E}}_k \exp\{it \|\bar{S}_n - a\|^2\}|^2)^{1/3} \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Далее, повторяя рассуждение, которое приведено в доказательстве леммы 10 в [3, с. 234], при $l \sim n^{2/3}$, $m = n - l$, $A = \frac{3}{2}$ получаем в области $|t| \leq cn^{1/2}L^{-1}$

$$\mathbf{E} \left| \bar{\mathbf{E}}_k \exp \{it \|\bar{S}_n - a\|\} \right|^2 \leq c_1 \left(L^3 n^{-1} + \prod_{j=1}^9 \left(1 + \frac{c_2 \sigma_j^4 T_1^2}{n^{1/3}} \right)^{-1/2} \right),$$

где T_1 определено в лемме 3. Затем в (68) положим $p = 36$, $x = n^{1/12}$. Тогда с учетом (9) и (10) находим оценку

$$\begin{aligned} |J_2(t)| &= c_1 (1 + \|a\|^2) (\mathbf{E} \|g_2\|^3)^{2/3} \\ &\times \left(L^2 n^{-1/2} + n^{1/6} \prod_{j=1}^9 \left(1 + \frac{c_2 \sigma_j^4 T_1^2}{n^{1/3}} \right)^{-1/6} \right) n^{-1}, \end{aligned}$$

из которой вытекают (62) и (63).

Лемма 7. *Справедлива оценка*

$$I_2 \leq c_1 (1 + \|a\|^3) \beta^2 \sigma_9^{-1} c_9(V) n^{-1/2}. \quad (69)$$

Доказательство. Согласно (23)

$$|\varphi_n(t) - \psi_n(t)| |t|^{-1} \leq |J_1(t)| + |t| |J_2(t)| + t^2 |J_3(t)|. \quad (70)$$

По лемме 4

$$\int_{-T}^T t^2 |J_3(t)| dt \leq c_1 (1 + \|a\|^3) \mathbf{E} \|g_1\|^3 \mathbf{E} \|g_2\|^3 c_7(V) n^{-1/2}. \quad (71)$$

По лемме 5

$$\int_{-T}^T |J_1(t)| dt \leq c_1 (1 + \|a\|^3) (\mathbf{E} \|g_1\|^3) (\mathbf{E} \|g_2\|^3)^{1/3} c_9(V) L^{1/2} n^{-1/2}. \quad (72)$$

По лемме 6

$$\int_{-T}^T |t| |J_2(t)| dt \leq c_1 (1 + \|a\|^2) (\mathbf{E} \|g_1\|^3)^{2/3} c_9(V) L n^{-1/2}. \quad (73)$$

В (71)–(73) для моментов выполняется (4). Учитывая это после интегрирования в (70) слева и справа, получим (69).

Из (15), (20), (21) и (69) вытекает

$$\Delta_{n2}(a) \leq c_1 (1 + \|a\|^3) \beta^2 \sigma_9^{-1} c_9(V) n^{-1/2}. \quad (74)$$

Оценки (5), (7) и (74) приводят к (3) и в результате доказывают теорему.

В заключение мы хотим выразить благодарность В. В. Ульянову за замечание, которое привело к простому доказательству леммы 1, данному выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровский Ю. В. Теория U -статистик в гильбертовом пространстве. — Препринт 86.78 Киев: АН УССР, Ин-т математики, 1986, 56 с.
2. Боровский Ю. В., Королюк В. С. UH -статистики. — Докл. АН СССР, 1989, т. 308, № 6, с. 1301–1304.
3. Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В. О нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве, I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. XXXIII, в. 2, с. 225–245, в. 3, с. 508–521.
4. Королюк В. С., Боровский Ю. В. Аппроксимация невырожденных U -статистик. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. XXX, в. 3, с. 417–427.
5. Королюк В. С., Боровский Ю. В. Теория U -статистик. Киев: Наукова думка, 1989, 384 с.
6. Паулаускас В. И., Рачкаускас А. Ю. Точность аппроксимации в центральной предельной теореме в банаховых пространствах. — Вильнюс: Мокслас, 1987, 188 с.
7. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
8. Пинелис И. Ф. Оценки моментов бесконечномерных мартингалов. — Матем. заметки, 1980, т. 27, с. 953–958.
9. Сазонов В. В., Ульянов В. В., Залесский Б. А. Правильная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве. — Матем. сб., 1989, т. 180, № 12, с. 1587–1613.
10. Bentkus V., Götze F., Zitikis R. Lower estimates of the convergence rate for U -statistics. — Ann. Probab., 1994, v. 22, № 4.
11. Grams W. F., Serfling R. J. Convergence rate for U -statistics. — Ann. Statist., 1973, v. 1, № 1, p. 153–160.
12. Королюк В. С., Боровский Ю. В. Скорость сходимости в центральной предельной теореме для UH -статистик. — Укр. матем. журн., 1990, т. 42, № 8, с. 1043–1050.
13. Lee A. J. U -statistics: Theory and Practice. New York: M. Dekker, 1990.
14. Puri M. L., Sazonov V. V. On Hilbert space valued U -statistics. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 3, с. 604–605.
15. Sazonov V. V. Normal approximation — Some recent advances. — Lect. Notes Math., 1981, v. 879, p. 1–105.
16. Sazonov V. V., Ulyanov V. V., Zaleskii B. A. Asymptotically precise estimate of accuracy of Gaussian approximation in Hilbert space. — J. Multivariate Anal., 1989, v. 28, № 2, p. 304–330.
17. Sazonov V. V., Ulyanov V. V. Speed of convergence in the central limit theorem in Hilbert space under weakened moment conditions. — In: Proc. of the 5th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, 1989. Vilnius/Utrecht: Moksas/VSP, 1990, p. 394–410.

Поступила в редакцию
17.V.1994