Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Дудникова, А. И. Комеч, Эргодические свойства гиперболических уравнений с перемешиванием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 505–519

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:30:41

© 1996 г.

ДУДНИКОВА Т. В.*, КОМЕЧ А. И.**

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

В работе доказана эргодичность фазового потока задачи Коши для волновых уравнений относительно предельной меры для статистических решений этой задачи при условии перемешивания для начальной меры.

Ключевые слова и фразы: задача Коши для волнового уравнения, статистические решения, эргодичность потока.

Введение. В работе рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + a_0(x) \right) u(t, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения достаточно гладкие, причем при $|x| \geq R_0$ уравнение (1) имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u(t, x) = 0.$$

Кроме того, $a_0(x) \geq 0$, матрица $(a_{ij}(x))$ — симметрична и положительно определена для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Наконец, требуется выполнение так называемого условия неловушечности (условие Д [1, с. 234]), заключающегося в уходе на бесконечность при $t \rightarrow \infty$ всех лучей уравнения (1).

Для уравнения (1) изучается задача Коши со случайными начальными данными

$$u(0, x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u^1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

*МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2-я Бауманская, 5, 107005 Москва, Россия. Работа выполнена при частичной поддержке грантов АМО и ГМО (грант им. Эйлера).

**МГУ им. М. В. Ломоносова, кафедра дифференциальных уравнений, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия. Работа выполнена при частичной поддержке грантов АМО, ИСФ (грант НД 7000), РАН (гранты РФФИ № 93-011-16035 и № 96-01-00527), РМВО (фонд «Университеты России»).

Предполагается, что начальные данные $u = (u^0, u^1)$ вещественны и принадлежат пространству $\mathcal{H} = H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^n) \oplus H_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n)$.

Через μ_t обозначается вероятностная борелевская мера на $\mathcal{H}$ — распределение $(u(t, \cdot), \partial u(t, \cdot)/\partial t)$, где $u(t, x)$ — решение задачи (1), (2).

В работах Н. Е. Ратанова [2]–[4] доказана стабилизация мер μ_t при условии перемешивания для случайной функции (u^0, u^1) :

$$\mu_t \rightarrow \mu_\infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

где μ_∞ — некоторая гауссова мера на $\mathcal{H}$.

Пусть $V(t)$ — разрешающий оператор задачи (1), (2):

$$V(t): (u^0, u^1) \longrightarrow \left(u(t, \cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right).$$

Основной результат данной статьи: поток $V(t)$ обладает перемешиванием, т.е. $\forall f, g \in L_2(\mathcal{H}, \mu_\infty)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f(V(t)u) g(u) \mu_\infty(du) = \int f(u) \mu_\infty(du) \int g(u) \mu_\infty(du),$$

и, как следствие, поток $V(t)$ эргодичен, т.е. $\forall f \in L_2(\mathcal{H}, \mu_\infty)$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(V(t)u) dt \longrightarrow \int f(u) \mu_\infty(du) \quad \text{при } T \rightarrow \infty$$

в норме $L_2(\mathcal{H}, \mu_\infty)$.

Авторы выражают благодарность И. А. Ибрагимову и Б. М. Гуревичу за обсуждение результатов работы.

1. Формулировка основного результата. Пусть

$$\mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + a_0(x)$$

($n \geq 3$, нечетно) — строго гиперболический оператор второго порядка с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Предположим, что существует такое $R_0 > 0$, что

$$\mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad \text{при } |x| \geq R_0.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^n$.

Будем считать, что матрица $(a_{ij}(x))$ симметрична, $a_0(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}^n$.

Рассмотрим задачу Коши для оператора $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = 0, & x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u(0, x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u^1(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \quad (1.2)$$

Через $H_{\text{loc}}^s(\mathbf{R}^n)$, $s \in \mathbf{R}$, обозначим «локальное» пространство Соболева, состоящее из таких обобщенных функций $v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, что $\varphi v \in H^s(\mathbf{R}^n) \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, где $H^s(\mathbf{R}^n)$ — пространство Соболева (см. [1, с. 129]).

Предполагается, что начальные данные $u = \{u^0, u^1\}$ принадлежат пространству $\mathcal{H} = H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^n) \oplus H_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n)$ с полунормами: $\forall R > 0$

$$\|u\|_{(R)} = \left(\int_{|x| \leq R} (|u^0(x)|^2 + |\nabla u^0(x)|^2 + |u^1(x)|^2) dx \right)^{1/2} < \infty. \quad (1.3)$$

Обозначим через $V_1(t)$ оператор, сопоставляющий начальным условиям $u = \{u^0, u^1\}$ решение задачи (1.1)–(1.2) и его производную по t в момент времени t :

$$V_1(t)u = \left\{ u(t, \cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right\}. \quad (1.4)$$

Из общих результатов о существовании и единственности гиперболических уравнений (см. [5]) вытекает, что $V_1(t)u \in \mathcal{H}$ для всех $u \in \mathcal{H}$, и операторы $V_1(t)$, $t \in \mathbf{R}$, образуют сильно непрерывную группу операторов в $\mathcal{H}$.

Будем предполагать, что оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию неловушечности (см. условие D в [1, с. 234]). Чтобы сформулировать это условие, рассмотрим гамильтонову систему в $\mathbf{R}^n$ с гамильтонианом $H(x, \xi) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k$.

Эта гамильтонова система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \\ \frac{d\xi}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Условие неловушечности состоит в следующем: для любого $R > 0$ существует такое $T_0 < \infty$, что траектории системы (1.5), выпущенные из точек $x(0) = x^0$, $\xi(0) = \xi^0$, $|x^0| \leq R_0$, $|\xi^0| = 1$, лежат при $s > T_0$ в области $|x| > R$.

Пусть $\mathcal{B}$ есть σ -алгебра борелевских множеств пространства $\mathcal{H}$, μ_0 — некоторая борелевская вероятностная мера на $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$. Наложим следующие условия на меру μ_0 .

Предположим, что мера μ_0 трансляционно однородная (см. [6]), т.е. удовлетворяет условию:

$$\mu_0(\hat{h}B) = \mu_0(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}. \quad (1.6)$$

Здесь $\hat{h}u(x) = u(x + h)$ для всех $u \in \mathcal{H}$, $h \in \mathbf{R}^n$.

Кроме того, предполагается, что мера μ_0 обладает нулевым средним и конечной средней плотностью энергии:

$$\int_{\mathcal{H}} u \mu_0(du) = 0, \quad (1.7)$$

$$\bar{e}_0 = \int_{\mathcal{H}} \left(|u^0(x)|^2 + |\nabla u^0(x)|^2 + |u^1(x)|^2 \right) \mu_0(du) < \infty, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (1.8)$$

При этом интегралы вида $\int F(u^0(x), \nabla u^0(x), u^1(x)) \mu_0(du)$ здесь и всюду ниже понимаются в смысле замечания 7.1.1 [6].

Мы предполагаем, что мера μ_0 удовлетворяет следующим условиям перемешивания.

Для любого множества $X \subset \mathbf{R}^n$ обозначим через $\mathcal{M}_X$ наименьшую σ -алгебру борелевских множеств из $\mathcal{H}$, относительно которой измеримы линейные функционалы $\langle \cdot, \psi \rangle$ на $\mathcal{H}$:

$$\langle u, \psi \rangle = \int (u^0(x) \psi_0(x) + u^1(x) \psi_1(x)) dx,$$

где $u = \{u^0, u^1\} \in \mathcal{H}$, $\psi = \{\psi_0, \psi_1\} \in [C_0^\infty(\mathbf{R}^n)]^2$, $\text{supp } \psi \subset X$.

О п р е д е л е н и е. Мера μ_0 на $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания Ибрагимова (см. [7]), если

$$\varphi(h) = \sup \frac{|\mu_0(A \cap B) - \mu_0(A) \mu_0(B)|}{\mu_0(B)} \downarrow 0, \quad h \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

где верхняя грань берется по всем множествам $A \in \mathcal{M}_X$, $B \in \mathcal{M}_Y$, для которых $\mu_0(B) > 0$, и всем выпуклым областям $X, Y \subset \mathbf{R}^n$, для которых $\rho(X, Y) \geq h > 0$.

От коэффициента перемешивания $\varphi(h)$ требуется достаточно быстрое убывание при $h \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\infty h^{n-2} \varphi^{1/2}(h) dh < \infty. \quad (1.10)$$

О п р е д е л е н и е. Статистическим решением задачи (1.1)–(1.2) называется семейство мер $\{\mu_t\}$ на $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$, определенное соотношением $\mu_t(B) = \mu_0((V_1(t))^{-1}B)$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

Н. Е. Ратановым в [2]–[4] доказано, что при сформулированных выше условиях на оператор $\mathcal{L}$ и условиях (1.6)–(1.10) на начальную меру μ_0 меры μ_t слабо сходятся к некоторой мере μ_∞ : $\mu_t \rightarrow \mu_\infty$ при $t \rightarrow \infty$ на пространстве $\mathcal{H}^{-\varepsilon} = H_{\text{loc}}^{1-\varepsilon}(\mathbf{R}^n) \oplus H_{\text{loc}}^{-\varepsilon}(\mathbf{R}^n)$, $\forall \varepsilon > 0$. При этом μ_∞ — гауссова трансляционно однородная мера с нулевым средним на пространстве $\mathcal{H}$.

В дальнейшем будем предполагать, что все сформулированные условия на меру μ_0 и оператор $\mathcal{L}$ выполнены.

О п р е д е л е н и е (см. [8]). Пусть $\{\Omega, \mathcal{B}, \mu\}$ — некоторое пространство с мерой, S — измеримое отображение $\{\Omega, \mathcal{B}\}$ в $\{\Omega, \mathcal{B}\}$. Преобразование S называется сохраняющим меру μ , если для любого множества $A \in \mathcal{B}$

$$\mu(S^{-1}A) = \mu(A),$$

где $S^{-1}A$ — полный прообраз множества A .

Под потоком в Ω понимается группа взаимнооднозначных измеримых отображений S_t пространства Ω на самого себя, удовлетворяющих свойству: $S_t S_\tau = S_{t+\tau}$, $t, \tau \in \mathbf{R}$.

Поток называется сохраняющим меру μ , если все S_t сохраняют меру μ .

Теорема (статистическая эргодическая теорема). Пусть $f \in L_2(\Omega, \mu)$ и поток S_t сохраняет меру μ . Тогда существует такая функция $f^*(u) \in L_2(\Omega, \mu)$, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(S_t u) dt \longrightarrow f^*(u) \quad \text{при } T \rightarrow \infty \text{ в норме } L_2(\Omega, \mu),$$

причем функция $f^*(u)$ — инвариантная относительно потока, т.е. $f^*(S_t u) = f^*(u) \pmod{\mu}$, и если $\mu(\Omega) < \infty$, то

$$\int_{\Omega} f^*(u) \mu(du) = \int_{\Omega} f(u) \mu(du).$$

(Доказательство см., например, в [8].)

О п р е д е л е н и е. Пусть $\mu(\Omega) < \infty$, тогда поток называется эргодическим, если для каждой функции $f \in L_2(\Omega, \mu)$ среднее по времени в Ω $f^*(u)$ почти всюду постоянно.

Лемма 1.1. Поток $V_1(t)$, определенный выше формулой (1.4), сохраняет предельную меру μ_∞ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из слабой сходимости статистических решений μ_t к мере μ_∞ вытекает, что при фиксированном значении $\theta \in \mathbf{R}$ для любой функции $\psi \in \mathcal{D} = [C_0^\infty(\mathbf{R}^n)]^2$

$$\int e^{i\langle u, \psi \rangle} \mu_{t+\theta}(du) \longrightarrow \int e^{i\langle u, \psi \rangle} \mu_\infty(du), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

С другой стороны, поскольку меры μ_t и μ_∞ сосредоточены на пространстве $\mathcal{H}$, то

$$\int e^{i\langle u, \psi \rangle} \mu_{t+\theta}(du) = \int e^{i\langle V_1(\theta)u, \psi \rangle} \mu_t(du) = \int e^{i\langle u, V_1'(\theta)\psi \rangle} \mu_t(du). \quad (1.12)$$

Здесь через $V_1'(\theta)$ обозначаем двойственный оператор к оператору $V_1(\theta)$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle V_1(\theta)u, \psi \rangle =$

$\langle u, V_1'(\theta)\psi \rangle, \forall u \in \mathcal{H}, \forall \psi \in \mathcal{D}$. Заметим, что $\forall \psi \in \mathcal{D} V_1'(\theta)\psi \in \mathcal{D}$, поэтому $\forall \psi \in \mathcal{D}$

$$\int e^{i\langle u, V_1'(\theta)\psi \rangle} \mu_t(du) \rightarrow \int e^{i\langle u, V_1'(\theta)\psi \rangle} \mu_\infty(du), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Из (1.11)–(1.13) следует, что

$$\int e^{i\langle u, \psi \rangle} \mu_\infty(du) = \int e^{i\langle V_1(\theta)u, \psi \rangle} \mu_\infty(du), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Отсюда (см., например, [9, с. 70]) получаем, что $\mu_\infty(V_1^{-1}(\theta)\omega) = \mu_\infty(\omega)$ для любого цилиндрического множества $\omega \subset \mathcal{H}$.

Известно (см. [10, с. 11]), что наименьшая σ -алгебра, содержащая цилиндрические множества пространства $\mathcal{H}$, совпадает с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Следовательно, $\mu_\infty(V_1^{-1}(\theta)B) = \mu_\infty(B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Основной результат данной статьи состоит в следующем:

Теорема 1.1. Поток $V_1(t)$ обладает перемешиванием, т.е. для любых функций $f, g \in L_2(\mathcal{H}, \mu_\infty)$ имеет место сходимость

$$\begin{aligned} & \int f(V_1(t)u) g(u) \mu_\infty(du) \\ & \rightarrow \int f(u) \mu_\infty(du) \int g(u) \mu_\infty(du) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следствие. Поток $V_1(t)$ эргодичен.

З а м е ч а н и е. Аналогичный результат верен, если вместо условия равномерно сильного перемешивания Ибрагимова (1.9) мера μ_0 удовлетворяет условию сильного перемешивания Розенблатта (см. [11]). Для краткости ограничимся условием (1.9) на меру μ_0 .

2. Эргодические свойства волнового уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u^1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Будем считать, что начальные данные $\dot{u} = \{u^0, u^1\}$ в (2.2) принадлежат пространству $\mathcal{H} = H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \oplus H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ с полунормами (1.3). Предполагается, что $n \geq 3$ и нечетно.

Как известно (см. [5]), существует сильно непрерывная группа $V_0(t), t \in \mathbb{R}$, линейных операторов на $\mathcal{H}$, сопоставляющих начальным данным $u = \{u^0, u^1\} \in \mathcal{H}$ решение задачи (2.1)–(2.2) и его производную по t в момент времени t :

$$V_0(t)u = \left\{ u(t, \cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right\}. \quad (2.3)$$

Через $Q_0 = Q_0(x, y)$ обозначим корреляционную матрицу меры μ_0 (см. [6, с. 370]):

$$Q_0(x, y) = \int u(x) \otimes u(y) \mu_0(du). \quad (2.4)$$

Это равенство следует понимать в смысле обобщенных функций:

О п р е д е л е н и е. $Q_0 = (Q_0^{ij}(x, y))$, $i, j = 0, 1$, — матричная обобщенная функция от $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, которая для любых функций $\theta_1, \theta_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ удовлетворяет тождеству:

$$\begin{aligned} & \langle \langle Q_0^{ij}(x, y), \theta_1(x) \theta_2(y) \rangle \rangle \\ &= \int \langle u^i(x), \theta_1(x) \rangle \langle u^j(y), \theta_2(y) \rangle \mu_0(du), \quad i, j = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Как показано в [6], матрица $Q_0(x, y)$ существует и представляет собой ограниченную матричную положительно определенную функцию. Из однородности меры μ_0 вытекает, что элементы матрицы $Q_0(x, y)$ зависят только от разности аргументов $x - y$:

$$Q_0(x, y) = q_0(x - y) = (q_0^{ij}(x - y)), \quad i, j = 0, 1. \quad (2.6)$$

Кроме того, из теоремы 3.1 дополнения 2 книги [6] следует, что

$$q_0^{00} \in C^2(\mathbf{R}^n), \quad q_0^{01}, q_0^{10} \in C^1(\mathbf{R}^n), \quad q_0^{11} \in C(\mathbf{R}^n). \quad (2.7)$$

При этом для производных функций q_0^{ij} справедливы соотношения:

$$\mathcal{D}^{\alpha+\beta} q_0^{ij}(x - y) = (-1)^{|\beta|} \int \mathcal{D}^\alpha u^i(x) \mathcal{D}^\beta u^j(y) \mu_0(du), \quad (2.8)$$

где $\mathcal{D} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $i, j = 0, 1$, $|\alpha| \leq 1 - i$, $|\beta| \leq 1 - j$.

Эти равенства также понимаются в смысле обобщенных функций аналогично равенствам (2.4), т.е. в смысле тождеств (2.5).

Определим матрицу

$$Q_\infty(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (q_0^{00} - \varepsilon * q_0^{11})(x - y) & (q_0^{01} - q_0^{10})(x - y) \\ (q_0^{10} - q_0^{01})(x - y) & (q_0^{11} - \Delta q_0^{00})(x - y) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Здесь $\varepsilon(z) = -((n-2)\Omega_n|z|^{n-2})^{-1}$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbf{R}^n$, Ω_n — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbf{R}^n$, * обозначает свертку двух функций.

О п р е д е л е н и е. Статистическим решением задачи (2.1)–(2.2) называется семейство мер $\{\mu_t\}$, $t > 0$, на $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$, определенное соотношением

$$\mu_t(B) = \mu_0(V_0^{-1}(t)B), \quad \forall B \in \mathcal{B}. \quad (2.10)$$

Н. Е. Ратановым в [2]–[3] доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть мера μ_0 удовлетворяет условиям (1.6)–(1.10). Тогда статистическое решение задачи (2.1)–(2.2)

$$\mu_t \rightarrow \mu_\infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

слабо на $\mathcal{H}^{-\varepsilon} = H_{\text{loc}}^{1-\varepsilon}(\mathbf{R}^n) \oplus H_{\text{loc}}^{-\varepsilon}(\mathbf{R}^n)$ при любом $\varepsilon > 0$.

При этом μ_∞ — гауссова трансляционно однородная мера с нулевым средним, корреляционной матрицей $Q_\infty(x, y)$, заданной (2.9).

Из леммы 1.1 следует, что поток $V_0(t)$ сохраняет предельную меру μ_∞ . Будем обозначать через E интеграл по мере μ_∞ .

Лемма 2.1. Пусть для любых функций $f, g \in L_2(\mathcal{H}, \mu_\infty)$

$$Ef(V_0(t)u)g(u) \rightarrow EfEg \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Тогда поток $V_0(t)$ эргодичен.

Доказательство леммы следует из статистической эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина.

З а м е ч а н и е 2.1. Пусть сходимость (2.11) справедлива для множества функций, всюду плотных в $L_2(\mathcal{H}, \mu_\infty)$. Тогда (2.11) выполняется для всех функций из $L_2(\mathcal{H}, \mu_\infty)$.

Теорема 2.1. Пусть для всех функций $\varphi, \psi \in \mathcal{D} \equiv [C_0^\infty(\mathbf{R}^n)]^2$

$$E\langle V_0(t)u, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Тогда поток $V_0(t)$ обладает перемешиванием, т.е. имеет место сходимость (2.11).

Аналог этого утверждения для случайных величин содержится в [10]. Для полноты изложения приведем доказательство теоремы 2.1 в рассматриваемом случае.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как линейные комбинации функций вида

$$e^{i\langle u, \psi \rangle}, \quad \text{где } u \in \mathcal{H}, \quad \psi \in \mathcal{D}, \quad (2.13)$$

плотны в $L_2(\mathcal{H}, \mu_\infty)$ (см. [10]), то из замечания 2.1 следует, что для доказательства теоремы 2.1 достаточно доказать сходимость (2.11) для функций f и g вида (2.13).

Пусть $f(u) = e^{i\langle u, \varphi \rangle}$, $g(u) = e^{i\langle u, \psi \rangle}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$.

Через $V'_0(t)$ обозначим оператор, двойственный оператору $V_0(t)$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle V_0(t)u, \varphi \rangle = \langle u, V'_0(t)\varphi \rangle$, где $u \in \mathcal{H}$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда

$$Ef(V_0(t)u)g(u) = Ee^{i\langle V_0(t)u, \varphi \rangle} e^{i\langle u, \psi \rangle} = Ee^{i\langle u, V'_0(t)\varphi + \psi \rangle}. \quad (2.14)$$

Из определения гауссовости меры μ_∞ :

$$Ee^{i\langle u, \varphi \rangle} = e^{-E\langle u, \varphi \rangle^2/2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.15)$$

Заметим, что при фиксированном значении t $V_0'(t)\varphi \in \mathcal{D}$, если $\varphi \in \mathcal{D}$; поэтому из равенств (2.14) и (2.15) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}f(V_0(t)u)g(u) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{E}\langle u, V_0'(t)\varphi + \psi \rangle^2\right) \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{E}\langle V_0(t)u, \varphi \rangle^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{E}\langle u, \psi \rangle^2\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\mathbf{E}\langle V_0(t)u, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle\right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В силу сохранения потоком $V_0(t)$ меры μ_∞ и равенств (2.15) и (2.16) имеем

$$\mathbf{E}f(V_0(t)u)g(u) = \mathbf{E}f\mathbf{E}g \exp\left(-\mathbf{E}\langle V_0(t)u, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle\right). \quad (2.17)$$

Из сходимости (2.12) и равенства (2.17) вытекает сходимость (2.11) для функций вида (2.13), и, следовательно, из замечания 2.1 следует утверждение теоремы 2.1.

По теореме 2.1 доказательство теоремы 1.1 в случае постоянных коэффициентов сводится к следующей лемме.

Лемма 2.2. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, $u \in \mathcal{H}$. Тогда имеет место сходимость

$$\mathbf{E}\langle V_0(t)u, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Заметим, что разрешающий оператор $V_0(t)$ задачи (2.1)–(2.2) имеет вид оператора свертки. Более точно, пусть $g(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, — фундаментальное решение задачи Коши (2.1)–(2.2):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t, x) = \Delta g(t, x), \\ g(t, x)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t}(t, x)|_{t=0} = \delta(x). \end{cases}$$

Последние два условия здесь понимаются в смысле слабой сходимости: при $t \rightarrow +0$

$$g(t, \cdot) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial g(t, \cdot)}{\partial t} \rightarrow \delta(\cdot) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Как известно (см. [12, с. 288–290]), если размерность пространства n больше или равна трем и нечетна, то

$$g(t, x) = \frac{(-1)^k}{2\pi^{k+1}} \delta^{(k)}(|x|^2 - t^2), \quad k = \frac{n-3}{2}. \quad (2.18)$$

Пусть

$$G_t = (G_{ij}^t(t, \cdot))_{i,j=0}^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial t}(t, \cdot) & g(t, \cdot) \\ (\Delta g)(t, \cdot) & \frac{\partial g}{\partial t}(t, \cdot) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Тогда $V_0(t)u(x) = (G_t * u)(x) = ((G_j^i(t, \cdot) * u^j)(x))_{i=0}^1$, для любого $t > 0$, где $*$ обозначает свертку обобщенных функций, и по повторяющимся индексам производится суммирование от 0 до 1. Свертка здесь и всюду ниже определена, так как обобщенные функции $G_j^i(t, \cdot)$ для всех $t > 0$ имеют компактные носители. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\langle V_0(t)u, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle &= \mathbf{E}\langle G_l^i * u^l, \varphi^i \rangle \langle u^j, \psi^j \rangle \\ &= \mathbf{E}\langle u^l, \check{G}_l^i * \varphi^i \rangle \langle u^j, \psi^j \rangle = \langle \langle Q_\infty^{lj}(x, y), (\check{G}_l^i * \varphi^i)(x) \psi^j(y) \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь, как и прежде, по повторяющимся индексам ведется суммирование от 0 до 1; $\check{G}_l^i(x) = G_l^i(-x)$; $Q_\infty^{lj}(x, y)$ — элементы корреляционной матрицы $Q_\infty(x, y)$ меры μ_∞ : $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.

Из трансляционной однородности меры μ_∞ вытекает, что элементы матрицы $Q_\infty(x, y)$ зависят только от разности аргументов $x - y$:

$$Q_\infty^{ij}(x, y) = \int u^i(x) \otimes u^j(y) \mu_\infty(du) = q_\infty^{ij}(x - y), \quad i, j = 0, 1. \quad (2.21)$$

Следовательно, из равенств (2.20) и (2.21) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\langle V_0(t)u, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle &= \langle \langle g_\infty^{lj}(x - y), (\check{G}_l^i * \varphi^i)(x) \psi^j(y) \rangle \rangle \\ &= \langle \langle (G_l^i(t, \cdot) * q_\infty^{lj})(x - y), \varphi^i(x) \psi^j(y) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Для простоты проведем доказательство сходимости

$$\sum_{l=0}^1 \langle \langle (G_l^i(t, \cdot) * q_\infty^{lj})(x - y), \varphi^i(x) \psi^j(y) \rangle \rangle \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.22)$$

при $n = 3$ и $i = j = 0$. Для других значений i, j , а также для $n > 3$ доказательство аналогично.

Поскольку $q_0^{ij} \in C^{2-i-j}(\mathbf{R}^n)$ (см. (2.7)), то из представления (2.9) матрицы $Q_\infty(x, y)$ следует, что $q_\infty^{ij} \in C^{2-i-j}(\mathbf{R}^n)$, $i, j = 0, 1$.

Из (2.18) и (2.19) имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^1 \langle \langle (G_l^0(t, \cdot) * q_\infty^{l0})(x - y), \varphi^0(x) \psi^0(y) \rangle \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi t} \left\langle \left\langle \int_{|x-z|=t} q_\infty^{10}(z - y) + \frac{1}{t} q_\infty^{00}(z - y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial z_i} q_\infty^{00}(z - y) \frac{z_i - x_i}{t} dS_z, \varphi^0(x) \psi^0(y) \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Справедливость утверждения (2.22) при $i = j = 0$, $n = 3$ вытекает из вида (2.9) матрицы $Q_\infty(x, y)$ и следующих лемм 2.3 и 2.4.

Лемма 2.3. Пусть $q_0^{ij}(z)$ ($q_\infty^{ij}(z)$), $i, j = 0, 1$, — элементы корреляционной матрицы q_0 меры μ_0 (соответственно, матрицы q_∞ меры μ_∞); $\gamma \in (\mathbf{Z}_+^3)$, $|\gamma| \leq 2 - i - j$, $i, j = 0, 1$. Тогда

$$1. |\mathcal{D}^\gamma q_0^{ij}(z)| \leq 2\bar{e}_0 \varphi^{1/2}(|z|) \text{ для } \forall z \in \mathbf{R}^3; \quad (2.23)$$

2. Существует такая константа $C < \infty$, что

а) $\forall \rho > 0, z_1 \in \mathbf{R}^3$

$$\int_{S_\rho} |\mathcal{D}^\gamma q_0^{ij}(z - z_1)| dS_z \leq C, \quad \text{где } S_\rho = \{z \in \mathbf{R}^3: |z| = \rho\}; \quad (2.24)$$

б) интеграл

$$\int_{\mathbf{R}^3} \frac{|\mathcal{D}^\gamma q_0^{ij}(z - z_1)|}{|z|} dz \leq 2\bar{e}_0 \int \frac{\varphi^{1/2}(|z - z_1|)}{|z|} dz \leq C \quad (2.25)$$

ограничен равномерно по $z_1 \in \mathbf{R}^3$. (См. [2]–[4]).

Лемма 2.4. Если X — компакт в $\mathbf{R}^3$, $k = 1, 2$, то для $\forall \gamma \in (\mathbf{Z}_+^3)^3$, $|\gamma| \leq 2 - i - j$, $i, j = 0, 1$,

$$а) \sup_{x, y \in X} \frac{1}{t^k} \int_{|x-z|=t} |\mathcal{D}^\gamma q_0^{ij}(z - y)| dS_z \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty; \quad (2.26)$$

$$б) \sup_{x, y \in X} \frac{1}{t^2} \int_{|x-z|=t} |q_\infty^{00}(z - y)| dS_z \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty; \quad (2.27)$$

$$в) \sup_{x, y \in X} \frac{1}{t} \left| \int_{|x-z|=t} \sum_{i=1}^3 q_\infty^{00}(z - y) \frac{z_i - x_i}{t} dS_z \right| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Доказательство. Утверждение (2.26) непосредственно следует из оценки (2.24). Докажем сходимость (2.27). Из вида (2.9) матрицы (q_∞^{ij}) , $i, j = 0, 1$, следует, что

$$q_\infty^{00}(z) = \frac{1}{2} (q_0^{00}(z) - \varepsilon * q_0^{11}(z)), \quad (2.29)$$

где $\varepsilon(z) = -(4\pi|z|)^{-1}$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbf{R}^3$.

Подставляя (2.29) и интеграл из (2.27), получим

$$\begin{aligned} 2 \sup_{x, y \in X} \frac{1}{t^2} \int_{|x-z|=t} |q_\infty^{00}(z - y)| dS_z &\leq \sup_{x, y \in X} \frac{1}{t^2} \int_{|x-z|=t} |q_0^{00}(z - y)| dS_z \\ &+ \sup_{x, y \in X} \frac{1}{t^2} \int_{|x-z|=t} |(\varepsilon * q_0^{11})(z - y)| dS_z \equiv I^{00}(t) + I^{11}(t). \end{aligned}$$

Из доказанного утверждения (2.26) следует, что $I^{00}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Сделаем в интеграле $I^{11}(t)$ замену переменных: $z = x + \beta t$, $|\beta| = 1$; получим

$$I^{11}(t) = \sup_{x, y \in X} \int_{|\beta|=1} |(\varepsilon * q_0^{11})(x - y + \beta t)| dS_\beta. \quad (2.30)$$

Из (2.25) следует, что

$$\int_{|\beta|=1} |(\varepsilon * q_0^{11})(x - y + \beta t)| dS_\beta \leq \text{const}. \quad (2.31)$$

Поскольку X — компакт в $\mathbf{R}^3$ и функция φ монотонно убывает, то из (2.30) и (2.31) имеем $I^{11}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что завершает доказательство сходимости (2.27).

Для доказательства последнего утверждения (2.28) леммы подставим соотношение (2.29) в интеграл, стоящий в (2.28):

$$\begin{aligned} & \sup_{x, y \in X} \frac{1}{t} \left| \int_{|x-z|=t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial z_i} q_0^{00}(z-y) \frac{z_i - x_i}{t} dS_z \right| \\ & \leq \sup_{x, y \in X} \frac{1}{t} \int_{|x-z|=t} \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial z_i} q_0^{00}(z-y) \right| dS_z \\ & + \sup_{x, y \in X} \frac{1}{t} \left| \int_{|x-z|=t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial z_i} (\varepsilon * q_0^{11})(z-y) \frac{z_i - x_i}{t} dS_z \right|. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Из утверждения (2.26) получаем, что первое слагаемое, стоящее в правой части неравенства (2.32), стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Докажем, что и второе слагаемое (обозначим его $I(t)$) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Для этого сначала преобразуем интеграл по сфере $\{z \in \mathbf{R}^3: |z-x|=t\}$ в $I(t)$, используя формулу Гаусса–Остроградского (см. [12, с. 268–270]) и то, что $\varepsilon(z)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbf{R}^3$ и $(\varepsilon * q_0^{11}) \in C^2(\mathbf{R}^3)$ (из свойств элементов корреляционной матрицы однородной меры (см. [6])):

$$\begin{aligned} & \int_{|x-z|=t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial z_i} (\varepsilon * q_0^{11})(z-y) \frac{z_i - x_i}{t} dS_z \\ & = \int_{|x-z| \leq t} \Delta_z (\varepsilon * q_0^{11}(z-y)) dz = \int_{|x-z| \leq t} q_0^{11}(z-y) dz. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I(t) & \leq \frac{1}{t} \left| \int_{|x-z| \leq t} q_0^{11}(z-y) dz \right| \leq \frac{1}{t} \int_{|x-z| \leq t^{1/6}} |q_0^{11}(z-y)| dz \\ & + \frac{1}{t} \int_{t^{1/6} \leq |x-z| \leq t} |q_0^{11}(z-y)| dz \equiv I_0(t) + I_\infty(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Из оценки (2.24) следует, что

$$I_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^{t^{1/6}} d\rho \int_{|x-z|=\rho} |q_0^{11}(z-y)| dS_z \leq Ct^{-5/6} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Применяя неравенство (2.23), получим

$$\begin{aligned} I_{\infty}(t) &\leq \text{const} \frac{1}{t} \int_{t^{1/6}}^t d\rho \int_{|x-z|=\rho} \varphi^{1/2}(|z-y|) dS_z \\ &\leq \text{const} \int_{t^{1/6}}^t \rho d\rho \int_{|\beta|=1} \varphi^{1/2}(|x-y+\rho\beta|) dS_{\beta}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

При достаточно больших значениях t : $\sup_{x,y \in X} |x-y| = K < t^{1/6}$, следовательно

$$|x-y+\rho\beta| \geq \rho - K > 0, \quad \text{где } |\beta| = 1, \quad \rho > t^{1/6}. \quad (2.35)$$

Из монотонности функции φ , неравенств (2.34) и (2.35) вытекает, что

$$I_{\infty}(t) \leq \text{const} \int_{t^{1/6}}^t \rho \varphi^{1/2}(\rho - K) d\rho. \quad (2.36)$$

Поскольку из условия (1.10) вытекает сходимость интеграла $\int_K^{\infty} \rho \varphi^{1/2}(\rho - K) d\rho < \infty$, из неравенства (2.36) получаем, что $I_{\infty}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что завершает доказательство утверждения (2.28) леммы 2.4.

Из леммы 2.4 вытекает сходимость (2.22) при $n = 3$, $i = j = 0$. Для других значений i, j , а также для $n > 3$ доказательство сходимости (2.22) аналогично. Лемма 2.2 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1.1 в случае постоянных коэффициентов уравнения (1.1), т.е. вида (2.1), следует из леммы 2.2 и теоремы 2.1.

3. Доказательство основного результата. Обозначим через $\mathcal{H}_{-\delta} = H_{-\delta}^1(\mathbf{R}^n) \oplus H_{-\delta}^0(\mathbf{R}^n)$, $\delta > 0$, пространство функций $u = \{u^0, u^1\}$ из $\mathcal{H}$, для которых конечна норма

$$|||u|||_{(-\delta)} = \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\delta|x|} \left[|u^0(x)|^2 + |\nabla u^0(x)|^2 + |u^1(x)|^2 \right] dx \right\}^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{H}_{(R)}$ — пространство финитных функций из $\mathcal{H}$ с носителями в шаре B_R , $\mathring{\mathcal{H}} = \cup_{R>0} \mathcal{H}_{(R)}$ — пространство финитных функций. Набдим $\mathcal{H}$ полунормами $|||\cdot|||_{(R)}$ для всех $R > 0$ (см. (1.3)). Тогда $\mathring{\mathcal{H}}'$ — двойственное к $\mathring{\mathcal{H}}$ пространство с полунормами

$$|||u|||'_{(R)} = \sup_{\psi \in \mathcal{H}_{(R)}} \frac{|\langle u, \psi \rangle|}{|||\psi|||_{(R)}} < \infty \quad \text{для любого } R > 0$$

(см. [6, с. 352]).

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — двойственность между $\mathring{\mathcal{H}}'$ и $\mathring{\mathcal{H}}$.

Определим при каждом $t \in \mathbf{R}$ операторы $V_j'(t)$, $j = 0, 1$ на $\mathring{\mathcal{H}}'$, двойственные к $V_j(t)$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle V_j'(t)u, \psi \rangle = \langle u, V_j(t)\psi \rangle$ для всех $\psi \in \mathring{\mathcal{H}}$, $u \in \mathring{\mathcal{H}}'$, $j = 0, 1$.

Определим пространства $(\mathcal{H}_{-\delta})' \subset \dot{\mathcal{H}}'$, $\delta > 0$, как двойственные к $\mathcal{H}_{-\delta}$ с нормами $|||u|||'_{(-\delta)} = \sup |\langle u, \psi \rangle| / |||\psi|||_{(-\delta)} < \infty$.

Пусть выполнены все сформулированные выше в п. 1 условия на коэффициенты оператора $\mathcal{L}$. Тогда справедлива следующая

Лемма 3.1 (см. [3]–[4]). *Существуют пределы*

$$\Omega^{\pm} = s\text{-}\lim V_0'(-t) V_1'(t), \quad t \rightarrow \mp\infty,$$

в сильной операторной топологии $\mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'_{-\delta})$ при достаточно малых $\delta > 0$.

Пусть μ_0 — вероятностная мера на $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$. Через $\mu_t^{(1)}$ и $\mu_t^{(0)}$ обозначим отвечающие μ_0 статистические решения задач (1.1)–(1.2) и (2.1)–(2.2), соответственно. Будем предполагать, что выполняются все сформулированные выше условия (1.6)–(1.10) на меру μ_0 . Пусть $\mu_{\infty}^{(0)}$ и $\mu_{\infty}^{(1)}$ — предельные гауссовы меры семейств мер $\mu_t^{(0)}$, $t > 0$, и $\mu_t^{(1)}$, $t > 0$, соответственно. Из результатов [2]–[4] предельные меры существуют и (в силу однородности) сосредоточены на $\mathcal{H}_{-\delta}$ с любым $\delta > 0$. При этом $\mu_{\infty}^{(1)}$ — гауссова мера с нулевым средним и корреляционной матрицей $Q_{\infty}^{(1)}(x, y)$, такая, что $\langle\langle Q_{\infty}^{(1)}(x, y), \psi(x) \psi(y) \rangle\rangle = \langle\langle Q_{\infty}^{(0)}(x, y), (\Omega^{-}\psi)(x) (\Omega^{-}\psi)(y) \rangle\rangle$, $\forall \psi \in \mathcal{D}$, где Ω^{-} — волновой оператор, введенный в лемме 3.1, $Q_{\infty}^{(0)}(x, y)$ — корреляционная матрица меры $\mu_{\infty}^{(0)}$ (см. (2.9)).

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим через $\mathbf{E}^{(1)}$ ($\mathbf{E}^{(0)}$) интеграл по мере $\mu_{\infty}^{(1)}$ (соответственно, мере $\mu_{\infty}^{(0)}$). Из доказательства теоремы 2.1, в которой использовалось только то, что предельное распределение — гауссово и обладает нулевым средним, вытекает, что доказательство теоремы 1.1 сводится к доказательству следующей леммы.

Лемма 3.2. *Для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$*

$$\mathbf{E}^{(1)} \langle V_1(t) u, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Сначала заметим, что из результатов [4] получаем, что для всех $\psi, \theta \in \mathcal{D}$

$$\mathbf{E}^{(1)} \langle u, \psi \rangle \langle u, \theta \rangle = \mathbf{E}^{(0)} \langle u, \Omega^{-}\psi \rangle \langle u, \Omega^{-}\theta \rangle.$$

При фиксированном значении t имеем $V_1'(t) \psi \in \mathcal{D}$, если $\psi \in \mathcal{D}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} \langle V_1(t) u, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle &= \mathbf{E}^{(1)} \langle u, V_1'(t) \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle \\ &= \mathbf{E}^{(0)} \langle u, \Omega^{-} V_1'(t) \varphi \rangle \langle u, \Omega^{-}\psi \rangle \\ &= \mathbf{E}^{(0)} \left\langle u, (\Omega^{-} V_1'(t) - V_0'(t) \Omega^{-}) \varphi \right\rangle \langle u, \Omega^{-}\psi \rangle \\ &\quad + \mathbf{E}^{(0)} \langle u, V_0'(t) \Omega^{-} \varphi \rangle \langle u, \Omega^{-}\psi \rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Так как $\langle u, \Omega^- \psi \rangle \in L_2(\mathcal{H}, \mu_\infty^{(0)})$ для всех $\psi \in \mathcal{D}$, то из теоремы 2.1 и леммы 2.2 следует, что

$$\begin{aligned} E^{(0)} \langle u, V_0'(t) \Omega^- \varphi \rangle \langle u, \Omega^- \psi \rangle &= E^{(0)} \langle V_0(t) u, \Omega^- \varphi \rangle \langle u, \Omega^- \psi \rangle \\ &\longrightarrow E^{(0)} \langle u, \Omega^- \varphi \rangle E^{(0)} \langle u, \Omega^- \psi \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

при $t \rightarrow \infty$, причем, так как $\mu_\infty^{(1)}$ обладает нулевым средним, то

$$E^{(0)} \langle u, \Omega^- \varphi \rangle = E^{(1)} \langle u, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Заметим, что равенство

$$\Omega^- V_1'(t) = V_0'(t) \Omega^- \quad \text{для всех } t > 0 \quad (3.3)$$

вытекает из тождества $[V_0'(-s) V_1'(s)] V_1'(t) = V_0'(t) [V_0'(-s-t) V_1'(s+t)]$ и утверждения леммы 3.1.

Из равенств (3.1), (3.3) и сходимости (3.2) следует утверждение леммы 3.2 и, следовательно, теорема 1.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во Московского ун-та, 1982, 296 с.
2. Ратанов Н. Е. Стабилизация статистических решений волнового уравнения. — В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Изд-во Московского ун-та, 1984, с. 95–101.
3. Ратанов Н. Е. Об асимптотической нормальности статистического решения волнового уравнения. — В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Изд-во Московского ун-та, 1984, с. 153–160.
4. Ратанов Н. Е. Стабилизация статистических решений гиперболических уравнений второго порядка. — Успехи матем. наук, 1984, т. 39, № 1, с. 151–152.
5. Мизайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424 с.
6. Вишик М. И., Фурсиков А. В. Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980, 442 с.
7. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
8. Хопф Э. Эргодическая теория. — Успехи матем. наук, 1949, т. 4, № 1, с. 113–182.
9. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
10. Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975, 231 с.
11. Rosenblatt M. A central limit theorem and a strong mixing condition. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, v. 42, № 1, p. 43–47.
12. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958, 440 с.

Поступила в редакцию
1.VII.1994