Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Чжан Бо, Предельные теоремы для максимальных случайных сумм, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 520–532

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:10:24

© 1996 г.

КРУГЛОВ В. М.*, ЧЖАН БО*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ
ДЛЯ МАКСИМАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ¹⁾

Приведены необходимые и достаточные условия слабой сходимости и слабой сходимости со свойством перемешивания в смысле Реньи монотонных последовательностей нормированных случайных величин со случайным индексом. Основные результаты касаются случая, когда членами этих последовательностей являются последовательные максимальные суммы независимых случайных величин.

Ключевые слова и фразы: слабая сходимость, свойство перемешивания в смысле Реньи, максимальная сумма случайных величин, случайная величина.

1. Формулировка утверждений. В этой статье мы изучаем слабую сходимость и слабую сходимость со свойством перемешивания в смысле Реньи последовательностей случайных величин $\{Z_{N_n}/B_{N_n}\}_{n \geq 1}$, где B_n — положительные числа, Z_n — случайные величины, N_n — случайные величины с натуральными значениями. Нас интересует случай, когда последовательность $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ монотонна или в определенном смысле почти монотонна, в частности, когда Z_n представляет собой (быть может центрированную) максимальную сумму среди первых n последовательных частичных сумм, слагаемыми которых служат члены другой последовательности независимых случайных величин.

Мы предполагаем, что все рассматриваемые случайные величины определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{p} v, \quad (1)$$

где v — случайная величина, $P\{v > 0\} = 1$, а символ $\xrightarrow{p}$ обозначает сходимость по вероятности. Здесь и далее предельный переход осуществляется при $n \rightarrow \infty$, если нет специальных оговорок. Мы также предполагаем, что нормирующие постоянные удовлетворяют условиям

$$0 < B_n \leq B_{n+1}, \quad B_n = n^\alpha L(n), \quad B_n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

*Факультет вычислительной математики и кибернетики, МГУ, Воробьевы горы, 119889 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-1446.

где $\alpha > 0$ есть фиксированное число, а $L(t), t > 0$, — функция, обладающая свойством медленного изменения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(qt)}{L(t)} = 1 \quad \text{для любого } q > 0. \quad (3)$$

Следуя Реньи [5], скажем, что последовательность $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ случайных величин *слабо сходится со свойством перемешивания*, если существует такая функция распределения F , что

$$P\{Y_n \leq x\} \cap B \rightarrow F(x)P(B)$$

для любого $B \in \mathcal{A}$ и любого x из множества $C(F)$ точек непрерывности функции F . Этот вид сходимости мы будем называть *md-сходимостью*. Запись $Y_n \xrightarrow{md} F$ будет обозначать *md-сходимость* последовательности $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ случайных величин, где F — функция распределения из определения этой сходимости. Очевидно, что *md-сходимость* последовательности случайных величин включает в себя *слабую сходимость* этой последовательности. Наряду с обозначением $F_n \xrightarrow{d} F$ для слабой сходимости последовательности функций распределения $\{F_n\}_{n \geq 1}$, $F_n(x) = P\{Y_n \leq x\}$, к функции распределения F мы будем также использовать обозначение $Y_n \xrightarrow{d} F$.

В своей статье [5] Реньи доказал критерий *md-сходимости*, согласно которому $Y_n \xrightarrow{md} F$ тогда и только тогда, когда

$$P\{Y_n \leq x, Y_k \leq x\} \rightarrow F(x)P\{Y_k \leq x\} \quad (4)$$

для любого номера k и любого $x \in C(F)$.

Теорема 1. *Предположим, что последовательность $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ не убывает с вероятностью единица, последовательности $\{N_n\}_{n \geq 1}$ и $\{B_n\}_{n \geq 1}$ удовлетворяют соответственно условиям (1) и (2). Для того чтобы*

$$\frac{Z_{N_n}}{B_{N_n}} \xrightarrow{md} F \quad (5)$$

для некоторой функции распределения F , необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{Z_n}{B_n} \xrightarrow{md} F. \quad (6)$$

*Кроме того, если $v = \text{const} > 0$ с вероятностью единица, то *md-сходимость* в (5) и (6) можно заменить на *слабую сходимость*.*

Импликация (6) $\Rightarrow$ (5) доказана в [3]. Таким образом, эта теорема является новой только в части необходимости.

В следующей теореме в качестве одного из объектов будет выступать последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых случайных величин. Обозначим $I(C)$ индикаторную функцию события C , $S_k = X_1 + \dots + X_k$,

$A_k^{(n)} = EX_1 I\{|X_1| \leq B_n\} + \dots + EX_k I\{|X_k| \leq B_n\}$. Мы используем общепринятое обозначение $\Phi(x)$ для нормальной функции распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а также $G(x) = \max\{0, 2\Phi(x) - 1\}$ и $\bar{G}(x) = 1 - G(-x)$ для урезанных нормальных функций распределения соответственно на положительной и отрицательной половинах вещественной прямой.

Теорема 2. Пусть даны последовательности $\{N_n\}_{n \geq 1}$ и $\{B_n\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющие соответственно условиям (1) и (2), и последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых случайных величин. Для того чтобы

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq N_n} (S_k - A_k^{(n)})}{B_{N_n}} \xrightarrow{md} G, \quad (7)$$

$$\frac{\min_{1 \leq k \leq N_n} (S_k - A_k^{(n)})}{B_{N_n}} \xrightarrow{md} \bar{G}, \quad (8)$$

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq N_n} |X_k|}{B_{N_n}} \xrightarrow{p} 0, \quad (9)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{S_n - A_n^{(n)}}{B_n} \xrightarrow{d} \Phi(x), \quad (10)$$

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|}{B_n} \xrightarrow{p} 0. \quad (11)$$

Заметим, что в (10) идет речь о слабой сходимости, тогда как в (7) и (8) — о md -сходимости, т.е. о более сильной сходимости. Это несоответствие, на самом деле, является только кажущимся, так как при условиях теоремы обе сходимости в (10) эквивалентны в соответствии с утверждением Реньи [5].

При дополнительных ограничениях на случайные величины X_n можно доказать аналог теоремы 2, в которой md -сходимость заменена на слабую сходимость.

Теорема 3. Пусть даны последовательность $\{N_n\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющая условию (1), и последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями. Предположим, что последовательность $\{B_n\}_{n \geq 1}$, $B_n^2 = \text{Var} X_1 + \dots + \text{Var} X_n$, удовлетворяет условию (2) и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k=1}^n \int_{|x| > R} x^2 dP\{X_k \leq x B_n\} = 0. \quad (12)$$

Для того чтобы

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq N_n} S_k}{B_{N_n}} \xrightarrow{d} G, \quad (13)$$

$$\frac{\min_{1 \leq k \leq N_n} S_k}{B_{N_n}} \xrightarrow{d} \overline{G}, \quad (14)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{S_n}{B_n} \xrightarrow{d} \Phi. \quad (15)$$

В частном случае одинаково распределенных случайных величин импликация (15) $\Rightarrow$ (13) была доказана в [4].

По теореме 4.3.3 из монографии [2] условие (12) является следствием (15). Поэтому теорему можно сформулировать следующим образом: (15) эквивалентно (12), (13), (14). Далее заметим, что условие (12) эквивалентно условию, которое получится после замены в нем n на N_n в качестве числа слагаемых в сумме и индекса у B_n . После этой замены сходимость в (12), естественно, следует понимать как сходимость по вероятности.

Теорема 4. Пусть даны последовательность $\{N_n\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющая условию (1), и последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых случайных величин с математическими ожиданиями $EX_n = a > 0$, $n = 1, 2, \dots$, и конечными дисперсиями. Предположим, что последовательность

$$\{B_n\}_{n \geq 1}, \quad B_n^2 = \text{Var}X_1 + \dots + \text{Var}X_n,$$

удовлетворяет условию (2) с $0 < \alpha < 1$. Для того чтобы

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq N_n} (S_k - aN_n)}{B_{N_n}} \xrightarrow{d} F \quad (16)$$

для некоторой функции распределения F , необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{S_{N_n} - aN_n}{B_{N_n}} \xrightarrow{d} F. \quad (17)$$

Кроме того, слабую сходимость в (16) и (17) можно заменить на m -сходимость.

Теорема 4 верна, в частности, при $N_n = n$, $\text{Var}X_n = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$. В этом случае импликация (17) $\Rightarrow$ (16) с $F = \Phi$ была доказана в [6].

В качестве следствий теорем 1–4 мы можем найти предельные распределения соответствующих случайных величин, в которых нормирующие величины B_{N_n} заменены на B_n . Например, если выполнены условия теоремы 1, то

$$\frac{Z_{N_n}}{B_n} \xrightarrow{md} L, \quad L(x) = \int_0^\infty F(xy^{-\alpha}) dP\{v \leq y\}.$$

Аналогичные следствия можно получить из теорем 2–4.

2. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1. Требуется доказать только необходимость условия (5) для справедливости (6). Докажем, что (5) эквивалентно следующему утверждению:

$$\frac{Z_{[nv]}}{B_{[nv]}} \xrightarrow{md} F, \quad (18)$$

где символ $[nv]$ обозначает целую часть nv . Возьмем любое событие $B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$, и определим условную вероятность $P'(A) = P(A \cap B)/P(B)$. Для любых $\delta \in (0, 1)$ и $x \in C(F)$

$$\begin{aligned} & P' \left\{ Z_{[(1+\delta)n]v} \leq x \frac{B_{[(1+\delta)n]v} B_{N_n}}{B_{[(1+\delta)n]v}} \right\} - P' \left\{ N_n > [(1+\delta)n]v \right\} \\ & \leq P' \left\{ Z_{[(1+\delta)n]v} \leq x B_{N_n}, N_n \leq [(1+\delta)n]v \right\} \leq P' \{ Z_{N_n} \leq x B_{N_n} \} \\ & = P' \left\{ Z_{N_n} \leq x B_{N_n}, N_n < [(1-\delta)n]v \right\} \\ & \quad + P' \left\{ Z_{N_n} \leq x B_{N_n}, N_n \geq [(1-\delta)n]v \right\} \\ & \leq P' \left\{ N_n < [(1-\delta)n]v \right\} \\ & \quad + P' \left\{ Z_{[(1-\delta)n]v} \leq x B_{N_n}, N_n \geq [(1-\delta)n]v \right\} \\ & \leq P' \left\{ N_n < [(1-\delta)n]v \right\} + P' \left\{ Z_{[(1-\delta)n]v} \leq x \frac{B_{[(1-\delta)n]v} B_{N_n}}{B_{[(1-\delta)n]v}} \right\}. \end{aligned}$$

Предположим, что (18) выполняется. Принимая во внимание (1), (2), (3), получим из предыдущих неравенств, что

$$\begin{aligned} F((1+\delta)^{-\alpha}x) & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P' \{ Z_{N_n} \leq x B_{N_n} \} \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P' \{ Z_{N_n} \leq x B_{N_n} \} \leq F((1-\delta)^{-\alpha}x). \end{aligned}$$

Предельный переход при $\delta \downarrow 0$ дает сходимость $P' \{ Z_{N_n} \leq x B_{N_n} \} \rightarrow F(x)$. Тем самым мы доказали импликацию (18) $\Rightarrow$ (5). Пусть теперь выполняется (5). Аналогично докажем, что из неравенств

$$\begin{aligned} & P' \left\{ Z_{N_{[(1+\delta)n]}} \leq x \frac{B_{N_{[(1+\delta)n]}} B_{[nv]}}{B_{N_{[(1+\delta)n]}}} \right\} - P' \{ N_{[(1+\delta)n]} < [nv] \} \\ & \leq P' \{ Z_{[nv]} \leq x B_{[nv]} \} \leq P' \{ N_{[(1-\delta)n]} > [nv] \} \\ & \quad + P' \left\{ Z_{N_{[(1-\delta)n]}} \leq x \frac{B_{N_{[(1-\delta)n]}} B_{[nv]}}{B_{N_{[(1-\delta)n]}}} \right\}, \end{aligned}$$

справедливых для любых $\delta \in (0, 1)$ и $x \in C(F)$, и условий (1), (2), (3) следует соотношение $P'\{Z_{[nv]} \leq x B_{[nv]}\} \rightarrow F(x)$. Таким образом, мы доказали импликацию (5) $\Rightarrow$ (18).

Фиксируем два положительных рациональных числа $\tau_1 = d/r$ и $\tau_2 = l/r$, $\tau_1 < \tau_2$, $r > 0$. Обозначим $J = \{i: \tau_1 \leq i/r < \tau_2\}$ конечное подмножество натуральных чисел и $A_i = \{x: i/r \leq x < (i+1)/r\}$ — подмножество вещественных чисел. Для любых натуральных чисел $n > \tau_2$ и $i \in J$ существуют натуральные числа $k_n^{(i)}$ и $j_n^{(i)}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{k_n^{(i)}(i+1)}{r} \leq n < \frac{(k_n^{(i)}+1)(i+1)}{r}, \quad \frac{j_n^{(i)}i}{r} \leq n < \frac{(j_n^{(i)}+1)i}{r}.$$

Заметим, что $k_n^{(i)}, j_n^{(i)} \rightarrow \infty$ для каждого $i \in J$. Пусть $x \in C(F)$, $x > 0$. Оценивая снизу и сверху слагаемые в сумме

$$P'\{Z_n \leq x B_n\} = P'\{Z_n \leq x B_n, v \notin [\tau_1, \tau_2]\} + \sum_{i \in J} P'\{Z_n \leq x B_n, v \in A_i\},$$

получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in J} P' \left\{ Z_{[(j_n^{(i)}+1)v]} \leq x \frac{B_{[(j_n^{(i)}+1)v]} B_{[j_n^{(i)}i/r]}}{B_{[(j_n^{(i)}+1)(i+1)/r]}}, v \in A_i \right\} \\ & \leq \sum_{i \in J} P'\{Z_n \leq x B_n, v \in A_i\} \leq P'\{Z_n \leq x B_n\} \\ & \leq P'\{v \notin [\tau_1, \tau_2]\} + \sum_{i \in J} P'\{Z_n \leq x B_n, v \in A_i\} \leq P'\{v \notin [\tau_1, \tau_2]\} \\ & + \sum_{i \in J} P' \left\{ Z_{[k_n^{(i)}v]} \leq x \frac{B_{[k_n^{(i)}v]} B_{[(k_n^{(i)}+1)(i+1)/r]}}{B_{[k_n^{(i)}i/r]}}, v \in A_i \right\}. \end{aligned}$$

Устремляя в этих неравенствах $n \rightarrow \infty$ и привлекая (2), (3), (18), выводим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in J} F \left(x \left(1 - \frac{1}{i+1} \right)^\alpha \right) P'\{v \in A_k\} \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P'\{Z_n \leq x B_n\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P'\{Z_n \leq x B_n\} \\ & \leq P'\{v \notin [\tau_1, \tau_2]\} + \sum_{i \in J} F \left(x \left(1 + \frac{1}{i} \right)^\alpha \right) P'\{v \in A_i\}. \end{aligned}$$

Предельный переход при $r \rightarrow \infty$ при фиксированных τ_1 и τ_2 дает

$$\begin{aligned} F(x) P'\{v \in [\tau_1, \tau_2]\} & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P'\{Z_n \leq x B_n\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P'\{Z_n \leq x B_n\} \\ & \leq P'\{v \notin [\tau_1, \tau_2]\} + F(x) P'\{v \in [\tau_1, \tau_2]\}, \end{aligned}$$

откуда, устремляя $\tau_1 \downarrow 0$ и $\tau_2 \uparrow \infty$, заключаем, что

$$P'\{Z_n \leq x B_n\} \rightarrow F(x). \quad (19)$$

Предыдущие рассуждения, в которых следует сделать очевидные изменения, позволяют доказать (19) для $x \in C(F)$, $x < 0$. Тем самым импликация (5) $\Rightarrow$ (6) доказана. Если $v = \text{const} > 0$, то все предыдущие рассуждения останутся справедливыми после замены md -сходимости на слабую сходимость. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. По теореме 1 условия (9) и (11) эквивалентны. Последовательности случайных величин $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, $Z_n = \max_{1 \leq k \leq n} (S_k - A_k^{(n)})$, и $\{T_n\}_{n \geq 1}$, $T_n = \min_{1 \leq k \leq n} (S_k - A_k^{(n)})$, не являются монотонными, но к ним применимы рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства теоремы 1 в части необходимости. С помощью этих рассуждений можно доказать, что из (7) и (8) вытекают соответствующие два утверждения с заменой N_n на n , а именно,

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq n} (S_k - A_k^{(n)})}{B_n} \xrightarrow{md} G, \quad (20)$$

$$\frac{\min_{1 \leq k \leq n} (S_k - A_k^{(n)})}{B_n} \xrightarrow{md} \overline{G}. \quad (21)$$

В соответствии с теоремой 3.1.1 из монографии [2] соотношения (20), (21) и (11) влекут за собой (10). Необходимость доказана.

Достаточность. По упомянутой теореме 3.1.1 из монографии [2] условия (10) и (11) обеспечивают справедливость (20) и (21). Тот факт, что (7) и (8) являются следствиями (20) и (21), можно доказать аналогично тому, как была доказана теорема 1 в части достаточности (напомним, что теорема 1 в части достаточности была доказана в [3]). При фактическом воспроизведении доказательства может оказаться полезной теорема 3.2.1 из упомянутой монографии [2]. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Из условий (2) и (3) следует, что

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\text{Var} X_k}{B_n^2} \rightarrow 0. \quad (22)$$

Предположим противное. В этом случае будет выполняться неравенство $\text{Var} X_{k_n} / B_n^2 > \gamma$, $1 \leq k_n \leq n$, для некоторого $\gamma > 0$ и всех n из некоторой подпоследовательности $\{n'\}$ натуральных чисел. Имеем:

$$\gamma < \frac{\text{Var} X_{k_n}}{B_n} = \frac{B_{k_n}^2 - B_{k_n-1}^2}{B_n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \{n'\},$$

что противоречит нашему предположению. Таким образом, (22) доказано. Фиксируем два положительных числа r и l , $r < l$, для которых

$P\{r < v < l\} > 0$. Возьмем положительное число $\varepsilon, \varepsilon < r$, и положим $m_n = [rn], r_n = [(r - \varepsilon)n], k_n = [(l + \varepsilon)n]$. Докажем, что

$$\frac{S_{m_n}}{B_{m_n}} \xrightarrow{d} \Phi. \quad (23)$$

Чтобы доказать (23), заметим, что последовательность функций распределения сумм $S_n/B_n, n = 1, 2, \dots$, слабо компактна по критерию слабой компактности ([1, с. 43]), так как по неравенству Чебышева $P\{|S_n| > xB_n\} \leq x^{-2}, x > 0$. Предположим, что подпоследовательность $\{P\{S_{m_n} \leq xB_{m_n}\}, n \in \{n'\}\}$, последовательности $\{P\{S_{m_n} \leq xB_{m_n}\}, n \geq 1\}$ слабо сходится к некоторой функции распределения $F(x)$. По теореме Реньи [5]

$$\frac{S_{m_n}}{B_{m_n}} \xrightarrow{md} F, \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \{n'\}.$$

Далее заметим, что для любого $x > 0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & P\left\{\max_{1 \leq k \leq N_n} S_k > xB_{N_n}\right\} \\ & \geq P\left\{\max_{1 \leq k \leq r_n} S_k > xB_{k_n}, \left|\frac{N_n}{n} - v\right| < \varepsilon, r < v < l\right\} \\ & \geq P\left\{\max_{1 \leq k \leq r_n} S_k > xB_{k_n}, r < v < l\right\} - P\left\{\left|\frac{N_n}{n} - v\right| \geq \varepsilon\right\} \\ & \geq P\{S_{r_n} > xB_{k_n}, r < v < l\} - P\left\{\left|\frac{N_n}{n} - v\right| \geq \varepsilon\right\} \\ & \geq P\{S_{m_n} > (x + r)B_{k_n}, |S_{m_n} - S_{r_n}| < rB_{k_n}, r < v < l\} \\ & \quad - P\left\{\left|\frac{N_n}{n} - v\right| \geq \varepsilon\right\} \geq P\left\{S_{m_n} > (x + r)\frac{B_{m_n}B_{k_n}}{B_{m_n}}, r < v < l\right\} \\ & \quad - P\{|S_{m_n} - S_{r_n}| \geq rB_{k_n}\} - P\left\{\left|\frac{N_n}{n} - v\right| \geq \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Аналогично докажем, что

$$\begin{aligned} & P\left\{\min_{1 \leq k \leq N_n} S_k < -xB_{N_n}\right\} \geq P\left\{S_{m_n} < -(x + r)\frac{B_{m_n}B_{k_n}}{B_{m_n}}, r < v < l\right\} \\ & \quad - P\{|S_{m_n} - S_{r_n}| \geq rB_{k_n}\} - P\left\{\left|\frac{N_n}{n} - v\right| \geq \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Применение неравенства Чебышева с учетом (2) и (3) дает

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\{|S_{m_n} - S_{r_n}| \geq rB_{k_n}\} \leq \frac{r^{2\alpha} - (r - \varepsilon)^{2\alpha}}{r^2(l + \varepsilon)^{2\alpha}}.$$

Мы можем выбрать положительные числа $r, l, \varepsilon_m, \varepsilon_m \downarrow 0$, таким образом, чтобы все числа $\pm(x + r)l/r, \pm(x + r)(l + \varepsilon)/r, \varepsilon \in \{\varepsilon_m\}_{m \geq 1}$, принадлежали

множеству $C(F)$. Принимая во внимание (1), (2) и (3), получим из предыдущих неравенств после предельного перехода при $n \rightarrow \infty$, $n \in \{n'\}$, что

$$1 - G(x) \geq P\{r < v < l\} \left(1 - F\left(\frac{(x+r)(l+\varepsilon)}{r}\right) \right) - \frac{r^{2\alpha} - (r-\varepsilon)^{2\varepsilon}}{r^2(l+\varepsilon)^{2\alpha}},$$

$$1 - G(x) \geq P\{r < v < l\} F\left(-\frac{(x+r)(l+\varepsilon)}{r}\right) - \frac{r^{2\alpha} - (r-\varepsilon)^{2\alpha}}{r^2(l+\varepsilon)^{2\alpha}}.$$

Предельный переход при $\varepsilon = \varepsilon_m \downarrow 0$ приводит к неравенству

$$P\{r < v < l\} \left(1 - F\left(\frac{(x+r)l}{r}\right) + F\left(-\frac{(x+r)l}{r}\right) \right) \leq 2(1 - G(x)).$$

Свойство монотонного возрастания функции F позволяет утверждать, что это неравенство справедливо для всех $x > 0$. С помощью этого неравенства и интегрирования по частям убедимся, что функция $\exp\{\gamma|x| \times \log(1+|x|)\}$ интегрируема по функции распределения F для любого $\gamma > 0$. Функция распределения F является предельной для последовательности функций распределения сумм независимых случайных величин, слагаемые которых равномерно предельно малы в силу (22). По теореме Хинчина ([1, с. 123]) она безгранично делима. В [7] доказано, что F должна быть нормальной функцией распределения. Из неравенств

$$\int_{|x|>r} |x| dP\{S_n \leq xB_n\} \leq \frac{1}{r} \int_{|x|>r} x^2 dP\{S_n \leq xB_n\} \leq \frac{1}{r}$$

следует, что функция $f(x) = |x|$ равномерно интегрируема по последовательности функций распределения $\{P\{S_n \leq xB_n\}\}_{n \geq 1}$ и, следовательно,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} x dP\{S_{m_n} \leq xB_{m_n}\} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \{n'\}.$$

По теореме 4.3.3 из монографии [2] условие (12) влечет за собой равномерную интегрируемость функции $f(x) = x^2$ по последовательности функций распределения $\{P\{S_n \leq xB_n\}\}_{n \geq 1}$ и, следовательно,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dP\{S_{m_n} \leq xB_{m_n}\} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \{n'\}.$$

Мы доказали, что каждая слабо сходящаяся подпоследовательность слабо компактной последовательности функций распределения $\{P\{S_{m_n} \leq xB_{m_n}\}\}_{n \geq 1}$ имеет своим пределом функцию $\Phi(x)$, что доказывает (23). Из (23) следует (15). Действительно, для любого натурального числа $n, n > 2r$, найдется другое натуральное число l_n , удовлетворяющее неравенствам $[r(l_n - 1)] \leq n \leq [rl_n]$. На основании (2), (3) и неравенства

Чебышева заключаем, что

$$\mathbf{P}\{|S_{[r l_n]} - S_n| > \varepsilon B_{[r l_n]}\} \leq \varepsilon^{-2} \frac{B_{[r l_n]}^2 - B_n^2}{B_{[r l_n]}^2} \rightarrow 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{S_n \leq x B_n\} = \mathbf{P}\left\{S_{[r l_n]} - (S_{[r l_n]} - S_n) \leq x \frac{B_{[r l_n]} B_n}{B_{[r l_n]}}\right\} \xrightarrow{d} \Phi(x).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. По теореме 3.1.5 из монографии [2], условия (15) и (22) достаточны, чтобы

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq n} S_k}{B_n} \xrightarrow{d} G, \quad \frac{\min_{1 \leq k \leq n} S_k}{B_n} \xrightarrow{d} \overline{G}.$$

Слабая сходимость здесь может быть заменена на *md*-сходимость. В этом можно убедиться с помощью рассуждений, которыми А. Реньи доказал критерий *md*-сходимости [4]. В частном случае одинаково распределенных случайных величин X_n , $n = 1, 2, \dots$, сходимость со свойством перемешивания максимальных сумм $\max_{1 \leq k \leq n} S_k / B_n$ доказана в [3]. Заметим, что рассуждения из [3] можно перенести и на наш случай. По теореме 1 выполняются условия (13) и (14). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Необходимость. Возьмем положительное число γ , $\gamma < 1 - \alpha$. Положим $q_n = 1 - n^{-\gamma}$, $M_n = [q_n N_n]$, $Y_k = X_k - EX_k$, $T_k = Y_1 + \dots + Y_k$. Мы воспользуемся обозначением $\mathbf{P}'(A)$, $A \in \mathcal{A}$, из доказательства теоремы 1. Для любых вещественных чисел $\varepsilon > 0$ и x справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'\{S_{N_n} \leq a N_n + x B_{N_n}\} &\geq \mathbf{P}'\left\{\max_{1 \leq k \leq N_n} S_k \leq a N_n + x B_{N_n}\right\} \\ &= \mathbf{P}'\left\{\max\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} S_k, \max_{M_n < k \leq N_n} S_k\right\} \leq a N_n + x B_{N_n}\right\} \\ &\geq \mathbf{P}'\left\{\max_{M_n < k \leq N_n} S_k \leq a N_n + x B_{N_n}\right\} - \mathbf{P}'\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} S_k > a N_n + x B_{N_n}\right\} \\ &\geq \mathbf{P}'\left\{S_{N_n} \leq a N_n + (x - \varepsilon) B_{N_n}, \max_{M_n < k \leq N_n} S_k - S_{N_n} \leq \varepsilon B_{N_n}\right\} \\ &\quad - \mathbf{P}'\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} S_k > a N_n + x B_{N_n}\right\} \geq \mathbf{P}'\{S_{N_n} \leq a N_n + (x - \varepsilon) B_{N_n}\} \\ &\quad - \mathbf{P}'\left\{\max_{M_n < k \leq N_n} (S_k - S_{N_n}) > \varepsilon B_{N_n}\right\} \\ &\quad - \mathbf{P}'\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} S_k > a N_n + x B_{N_n}\right\} \\ &\geq \mathbf{P}'\{S_{N_n} \leq a N_n + (x - \varepsilon) B_{N_n}\} - \mathbf{P}'\left\{\max_{M_n < k \leq N_n} (T_k - T_{N_n}) > \varepsilon B_{N_n}\right\} \\ &\quad - \mathbf{P}'\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} T_k > a N_n - a M_n + x B_{N_n}\right\}. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что (16) и (17) эквивалентны, если

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} T_k > aN_n - aM_n + xB_{N_n}\right\} \rightarrow 0 \quad \text{для любого } x, \quad (24)$$

$$P\left\{\max_{M_n < k \leq N_n} (T_k - T_{N_n}) > \varepsilon B_{N_n}\right\} \rightarrow 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \quad (25)$$

Докажем (24). Для любого $R > 0$

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} T_k > aN_n - aM_n + xB_{N_n}\right\} \leq P\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} T_k > RB_{N_n}\right\} + P\{aN_n - aM_n < (R - x)B_{N_n}\}.$$

Из определения M_n и условия (1) следует, что

$$P\{aN_n - aM_n < (R - x)B_{N_n}\} \rightarrow 0.$$

Возьмем три положительных числа $\delta, r, l, \delta < r < l$. Имеем:

$$\begin{aligned} & P\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} T_k > RB_{N_n}\right\} \\ & \leq P\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} T_k > RB_{N_n}, \left|\frac{N_n}{n} - v\right| \leq \delta, r < v < l\right\} \\ & \quad + P\left\{\left|\frac{N_n}{n} - v\right| > \delta\right\} + P\{v \notin (r, l)\} \\ & \leq P\left\{\max_{1 \leq k \leq [(l+\delta)n]} T_k > RB_{[(r-\delta)n]}\right\} + P\left\{\left|\frac{N_n}{n} - v\right| > \delta\right\} + P\{v \notin (r, l)\} \\ & \leq \frac{B_{[(l+\delta)n]}^2}{R^2 B_{[(r-\delta)n]}^2} + P\left\{\left|\frac{N_n}{n} - v\right| > \delta\right\} + P\{v \notin (r, l)\}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известным неравенством Колмогорова для оценки вероятности того, что максимальная сумма независимых случайных величин превзойдет данный уровень. В результате получим неравенство

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} P\left\{\max_{1 \leq k \leq M_n} T_k > aN_n - aM_n + xB_{N_n}\right\} \\ & \leq R^{-2} \left(\frac{l+\delta}{r-\delta}\right)^{2\alpha} + P\{v \notin (r, l)\}, \end{aligned}$$

из которого следует (24), так как здесь можно перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$, а затем при $r \downarrow 0$ и $l \uparrow \infty$.

Докажем (25). Мы воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 1 для множеств $J = J(r, \tau_1, \tau_2)$ и A_i , а также введем новые обозначения: $m_n = [q_n(i-1)n/r]$, $r_n = [(i+2)n/r]$,

$$L_n^{(i)} = \max_{m_n < k \leq r_n} |T_k - T_{r_n}|, \quad Z_n = \max_{M_n < k \leq N_n} (T_k - T_{N_n}).$$

Оценим слагаемые в сумме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Z_n > \varepsilon B_{N_n}\} &= \mathbf{P}\left\{Z_n > \varepsilon B_{N_n}, \left|\frac{N_n}{n} - v\right| > \frac{1}{r}\right\} \\ &\quad + \mathbf{P}\left\{Z_n > \varepsilon B_{N_n}, \left|\frac{N_n}{n} - v\right| \leq \frac{1}{r}, v \notin [\tau_1, \tau_2]\right\} \\ &\quad + \sum_{i \in J} \mathbf{P}\left\{Z_n > \varepsilon B_{N_n}, \left|\frac{N_n}{n} - v\right| \leq \frac{1}{r}, v \in A_i\right\}. \end{aligned}$$

Из определения Z_n выводим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{Z_n > \varepsilon B_{N_n}, \left|\frac{N_n}{n} - v\right| \leq \frac{1}{r}, v \in A_i\right\} \\ \leq \mathbf{P}\left\{\max_{m_n < k \leq r_n} (T_k - T_{N_n}) > \varepsilon B_{r_n}, \left|\frac{N_n}{n} - v\right| \leq \frac{1}{r}, v \in A_i\right\} \\ \leq \mathbf{P}\left\{L_n^{(i)} > \frac{\varepsilon}{2} B_{r_n}, \left|\frac{N_n}{n} - v\right| \leq \frac{1}{r}, v \in A_i\right\} \leq \mathbf{P}\left\{L_n^{(i)} > \frac{\varepsilon}{2} B_{r_n}, v \in A_i\right\} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Z_n > \varepsilon B_{N_n}\} &\leq \mathbf{P}\left\{\left|\frac{N_n}{n} - v\right| > \frac{1}{r}\right\} + \mathbf{P}\{v \notin [\tau_1, \tau_2]\} \\ &\quad + \sum_{i \in J} \mathbf{P}\left\{L_n^{(i)} > \frac{\varepsilon}{2} B_{r_n}, v \in A_i\right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Докажем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{L_n^{(i)} > \frac{\varepsilon}{2} B_{r_n}, v \in A_i\right\} \leq 4\varepsilon^{-2} \left(\left(\frac{i+2}{i-1} \right)^{2\alpha} - 1 \right) \mathbf{P}(A_i). \quad (27)$$

Из неравенства Колмогорова

$$\mathbf{P}\left\{L_n^{(i)} > \frac{\varepsilon}{2} B_{r_n}\right\} \leq \frac{4(B_{m_n}^2 - B_{r_n}^2)}{\varepsilon^2 B_{r_n}^2} \quad (28)$$

и условий (2) и (3) заключаем, что последовательность функций распределения $\{\mathbf{P}\{L_n^{(i)} \leq x B_{r_n}\}\}_{n \geq 1}$ слабо компактна. Верхний предел в (27) совпадает с пределом указанного там выражения, когда n стремится к бесконечности по некоторой последовательности $\{n'\}$ натуральных чисел. Фиксируем номер $k \in \{n'\}$ и заметим, что случайные величины $L_n^{(i)}$ и $L_k^{(i)}$ независимы для всех достаточно больших $n \in n'$. Поэтому последовательность $\{L_n^{(i)}\}$, $n \in \{n'\}$, удовлетворяет условию (4). Выберем подпоследовательность $\{n''\} \subset \{n'\}$ таким образом, чтобы $\{L_n^{(i)}\}$,

$n \in \{n''\}$, слабо сходилась к некоторой функции распределения $L^{(i)}$. По критерию Реньи

$$\mathbf{P}\{L_n^{(i)} \leq x B_{\tau_n}, v \in A_i\} \rightarrow L^{(i)}(x) \mathbf{P}\{A_i\}$$

для любого $x \in C(L^{(i)})$. Привлекая (28), получим (27). На основании (26) и (27) имеем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Z_n > \varepsilon B_{N_n}\} \leq \mathbf{P}\{v \notin [\tau_1, \tau_2]\} + \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{i \in J} \left(\left(1 + \frac{3}{i-1}\right)^{2\alpha} - 1 \right) \mathbf{P}\{A_i\}.$$

В этом неравенстве можно перейти к пределу при $r \rightarrow \infty$ при фиксированных τ_1 и τ_2 , а затем при $\tau_1 \downarrow 0$ и $\tau_2 \uparrow \infty$, что приводит к (25). Теорема доказана.

Понятию сходимости последовательностей случайных величин со свойством перемешивания в смысле Реньи посвящено большое число статей. А. Н. Ширяев обратил наше внимание на монографию [8, гл. 8, § 5с, § 5d], где также обсуждается это понятие. Заинтересованный читатель найдет в ней дальнейшие ссылки и обсуждение родственных понятий, в частности, устойчивых последовательностей случайных величин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.—Л.: ГИТТЛ, 1949, 264 с.
2. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во МГУ, 1990, 270 с.
3. Csörgő S. On limit distributions of sequences of random variables with random indices. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1974, v. 25, № 3–4, p. 227–232.
4. Sreehari M. A limit theorem for maximum of cumulative sums. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1968, v. 19, p. 117–120.
5. Rényi A. On mixing sequences of sets. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1958, v. 9, № 1–2, p. 215–228.
6. Wald A. Limit distribution of the maximum and minimum of successive cumulative sums of random variables. — Bull. Amer. Math. Soc., 1947, v. 53, № 2, p. 142–153.
7. Круглов В. М. Характеризация одного класса безгранично делимых распределений в гильбертовом пространстве. — Матем. заметки, 1974, т. 16, № 5, с. 777–782.
8. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 2. М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 1994, 366 с.

Поступила в редакцию
6.II.1995