Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Новак, О распределении отношения сумм случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 533–560

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 11:54:02

© 1996 г.

НОВАК С. Ю.*

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОТНОШЕНИЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе доказаны оценки типа Берри-Эссеена для распределения отношения Z_n сумм случайных величин. Даются приложения полученных результатов к задачам непараметрического оценивания функции регрессии и индекса экстремального распределения в схемах последовательного оценивания.

Ключевые слова и фразы: оценки типа Берри-Эссеена, регрессия, ядерная оценка.

1. Введение. Пусть $(\xi, \eta), (\xi_1, \eta_1), \dots$ — последовательность независимых пар случайных величин. Введем обозначения:

$$S_n = \sum \xi_i, \quad T_n = \sum \eta_i, \quad Z_n = \frac{S_n}{T_n}, \quad \xi_i^* = \xi_i - \eta_i \frac{m_1}{m_2}, \quad S_n^* = \sum \xi_i^*,$$

$$m_1 \equiv m_1(n) = \sum E\xi_i, \quad m_2 \equiv m_2(n) = \sum E\eta_i,$$

$$\sigma_1^2 \equiv \sigma_1^2(n) = \sum D\xi_i^*, \quad \sigma_2^2 \equiv \sigma_2^2(n) = \sum D\eta_i,$$

$$\mu_1 \equiv \mu_1(n) = \sum E|\xi_i^*|^3, \quad \mu_2^* \equiv \mu_2^*(n) = \sum E\left|\frac{\eta_i}{\sigma_2}\right|^3,$$

$$\mu \equiv \mu(n) = \mu_1 + 3\mu_2^*\sigma_1^3 + 3\sigma_1(\mu_1^2\mu_2^*)^{1/3}, \quad \|x\|_*^3 = |x|^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Символ $\sum$, если не оговорено противное, означает суммирование по множеству $J_n = \{1, \dots, n\}$, черта над случайной величиной (с.в.) означает центрирование математическим ожиданием.

Мы предполагаем, что $\xi_i = 0$, как только $\eta_i = 0$, а также что $m_2 \neq 0$. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ считается равной нулю.

Асимптотические свойства распределения дроби Z_n изучались Успенским [1], Кимболлом [2], Стояновым [3], Новаком и Утевым [4] и другими. Авторы вышеназванных статей основное внимание уделяли изучению асимптотики двух первых моментов Z_n при $n \rightarrow \infty$ в предположении, что пары $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ одинаково распределены. В частности, в [4] доказан следующий результат.

*Сибирская государственная геодезическая академия, ул. Плеханова, 10, 630108 Новосибирск, Россия.

Теорема А. Если пары $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ одинаково распределены, $E\eta + E|\xi| < \infty$ и

$$P\{\eta_i \geq 0\} = 1 \quad (i \geq 1), \quad (1.1)$$

то сходимость

$$EZ_n - \frac{E\xi}{E\eta} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1.2)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$E\left(\frac{|\xi_1|}{T_m}\right) < \infty \quad (\exists m \geq 1). \quad (1.3)$$

Если выполнено (1.3) и $E|\xi|\eta^2 + E\eta^4 < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left|EZ_n - \frac{E\xi}{E\eta} + \frac{E\xi^*\eta}{n(E\eta)^2}\right| = O(n^{-2}). \quad (1.4)$$

Если в дополнение $E\xi^2(1+\eta) + E(\xi_1/T_m)^2 < \infty$ ($\exists m \geq 2$), то при $n \rightarrow \infty$

$$\left|E\left(Z_n - \frac{E\xi}{E\eta}\right)^2 - \frac{D\xi^*}{n(E\eta)^2}\right| = O(n^{-2}). \quad (1.5)$$

Как отмечалось в [3], [4], задача о распределении с.в. Z_n имеет интересные приложения к теории n -кратных интегралов. Классическая ядерная оценка функции регрессии также имеет вид отношения сумм случайных величин (см., например, [5], [6]). Другие примеры использования статистик вида Z_n можно найти в [7], [8].

Заметим, что случайная величина Z_n асимптотически нормальна при условиях, обеспечивающих ЦПТ для S_n^* и ЗБЧ для T_n .

В данной работе оценивается точность нормальной аппроксимации распределения случайных величин Z_n ; уточняется и обобщается результат теоремы А.

Основные утверждения приведены в п. 2. Разделы 3–5 посвящены приложениям результатов п. 2 к ряду задач непараметрической статистики. Доказательства приводимых ниже теорем 2.1–2.5 отнесены в разделы 6, 7.

2. Формулировки основных результатов. Пусть φ и Φ — плотность и функция распределения нормального $\mathcal{N}(0, 1)$ закона; $C_* = 0.7915$ и $C_+ = 31.995$ — константы в неравенствах Берри–Эссеена [11], [12]. Положим

$$\Delta(n, x) = \left|P\left\{S_n^* < \frac{x\sigma_1 T_n}{m_2}\right\} - \Phi(x)\right|. \quad (2.1)$$

Теорема 2.1. Для всякого $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \Delta(n, x) \leq C_* \left(\frac{3}{2\sigma_1}\right)^3 \mu + \frac{8\sigma_2}{e\sqrt{2\pi|m_2|}} + 17 \left(\frac{\sigma_2}{m_2}\right)^2. \quad (2.2)$$

Положим $B_n = \{x: |x\sigma_2| \leq |m_2|/3\}$.

Теорема 2.2. Для всякого $n \geq 1$ при $x \in B_n$ выполняется неравенство

$$\Delta(n, x) \leq C_+ \|x\|_*^{-3} \mu \sigma_1^{-3} + x^2 \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sigma_2}{|m_2|}. \quad (2.3)$$

Отметим, что в теоремах 2.1, 2.2 не используется условие (1.1). Если (1.1) выполнено, то деление на T_n сохраняет неравенство под знаком P в (2.1), и соотношения (2.2)–(2.3) дают оценки скорости сходимости в предельной теореме для Z_n .

Рассмотрим вопрос об асимптотике первых двух моментов Z_n . Прежде всего, заметим, что условие (1.3) не обеспечивает, вообще говоря, существования EZ_n для всех достаточно больших n . Действительно, пусть $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$ независимы и $P\{\eta = 1\} = P\{\eta = -1\} = \frac{1}{2}$, $\xi_i \equiv 1$. Тогда среднее $E(\sum \xi_i / \sum \eta_i) \equiv nE(1/\sum \eta_i)$ не определено для четных n , хотя условие (1.3) выполнено при любом нечетном m .

Чтобы гарантировать существование EZ_n , мы будем предполагать в дальнейшем, что выполнено условие (1.1). Кроме того, будем считать, что для всякого $i \in J_n$ выбрана «окрестность» $A_i \in J_n$ «точки» i так, что $\max_i \text{card} A_i \leq k_* < \infty$.

Положим $A(i, j) = A_i \cup \{j\}$,

$$\eta_{(i)} = \sum_{j \in A_i} \eta_j, \quad (2.4)$$

$$T_{nij} = T_n - \eta_i - \eta_j 1\{i \neq j\}, \quad \hat{T}_{nij} = \sum_{k \notin A(i, j)} \eta_k,$$

$$m^+ \equiv m^+(n) = \min_{i, j \in J_n} \frac{E\hat{T}_{nij}}{3},$$

$$\rho_1 \equiv \delta^{-3} m_2^{-2} \sum E |\xi_i^*| \eta_i^2,$$

$$\rho_2 \equiv 3 \delta^{-3} m_2^{-2} \sum |E\xi_i^*| D\eta_i + \delta^{-1} \alpha(n) \sum |E\xi_i^*|,$$

$$\rho_3 \equiv m_2 \alpha(n) \sum E \left| \frac{\xi_i^*}{\eta_{(i)}} \right|, \quad \rho_4 = \rho^* \sum \frac{|E\xi_i^* \bar{\eta}_i|}{m_2}, \quad \delta = \frac{m^+}{m_2},$$

$$\rho^* \equiv 3 \alpha(n) + 3 \left(\frac{\sigma_2}{m^+} \right)^2, \quad \alpha(n) \equiv \exp \left\{ \frac{-(m^+)^2}{8 \sum E \eta_i^2} \right\}.$$

Теорема 2.3. Для всякого $n \geq k_*$

$$\left| m_2 EZ_n - m_1 + \frac{\sum E \xi_i^* \bar{\eta}_i}{m_2} \right| \leq \sum_{i=1}^4 \rho_i(n). \quad (2.5)$$

Следствие 2.1. Если пары $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ одинаково распределены и $E|\xi_1| \eta_1^2 + E\eta_1^3 + E|\xi_1|/T_m < \infty$ ($\exists m > 1$), то имеет место (1.4).

Положим $\eta_{ij} = \sum_{k \in A_i \cup A_j} \eta_k$,

$$R_1 \equiv 6\delta^{-4} m_2^{-2} \left(\sum \mathbf{E} |\bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i| \right)^2, \quad R_2 \equiv 2\delta^{-3} \sum \mathbf{E} (\bar{\xi}_i^*)^2 \left| \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right|,$$

$$R_3 \equiv \rho^* \sigma_1^2, \quad R_5 \equiv m_2^2 \alpha(n) \left(\left(\sum_i \mathbf{E} \left| \frac{\xi_i^*}{\eta_{(i)}} \right| \right)^2 + \sum_i \sum_j^* \mathbf{E} |\xi_i^* \xi_j^*| \eta_{ij}^{-2} \right),$$

$$R_4 \equiv \delta^{-2} \alpha(n) \sum_j |\mathbf{E} \xi_j^*| \sum_i \mathbf{E} |2\xi_i^* - \mathbf{E} \xi_i^*|, \quad R_8 \equiv 3\delta^{-4} \sum \mathbf{E} \left(\frac{\bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i}{m_2} \right)^2,$$

$$R_6 \equiv 24 m_2^{-3} \delta^{-5} \left(\sum_i \mathbf{E} |\bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i| \right) \left(\sum_j \mathbf{E} |\bar{\xi}_j^* (\bar{\eta}_j)^2| \right),$$

$$R_7^* \equiv 5 \alpha(n) + 10\delta^{-4} \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right)^2, \quad \rho_1^* \equiv 4 \alpha(n) + 6\delta^{-3} \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right)^2,$$

$$R_7 \equiv 6 m_2^{-2} \left(\sum_i |\mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \eta_i| \right)^2 R_7^* + 6 m_2^{-2} \sum (\mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \eta_i)^2,$$

$$R_9(n, i) \equiv 10 \alpha(n) + 3 \mathbf{E} \left(\frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right)^2 + 4 \sum \left| \mathbf{E} \left(\frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right)^3 \right| \\ + 5 \delta^{-6} m_2^{-4} \left\{ 3\sigma_2^4 + \sum \mathbf{E} (\bar{\eta}_j)^4 \right\},$$

$$R_9 = \sum_i R_9(n, i) \mathbf{D} \xi_i^*, \quad R_{10} = 2 \sum_i \mathbf{E} \left| (\bar{\xi}_i^*)^2 \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right| \rho_1^*,$$

где суммирование под знаком $\sum_j^*$ ведется по множеству $\{j: A_j \cap A_i \neq \emptyset\}$.

Теорема 2.4. Предположим, что $\text{card} A_i \geq 2$ ($i \in J_n$). При $n \geq k_*$

$$|\mathbf{E} (m_2 Z_n - m_1)^2 - \sigma_1^2| \leq \sum_{j=1}^5 R_j(n). \quad (2.6)$$

Следствие 2.2. Если пары $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ одинаково распределены и $\mathbf{E}(\eta^3 + |\xi| \eta^2) + \mathbf{E} \xi_1^2 (1 + \eta_1 + (T_m)^{-2}) < \infty$ ($\exists m \geq 2$), то имеет место (1.5).

Теорема 2.5. В условиях теоремы 2.4

$$\left| \mathbf{E} (m_2 Z_n - m_1)^2 - \sigma_1^2 + 2 \sum \frac{\mathbf{E} (\bar{\xi}_i^*)^2 \bar{\eta}_i}{m_2} - 3 \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{m_2} \right)^2 \right. \\ \left. - 6 \left(\sum \frac{\mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i}{m_2} \right)^2 \right| \leq \sum_{j=5}^{10} R_j(n). \quad (2.6^*)$$

Следствие 2.3. Если пары $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ одинаково распределены, удовлетворяют (1.1) и $\mathbf{E}(\xi_1^2 (1 + \eta_1^2) + \eta_1^4 + (\xi_1 / T_m)^2) < \infty$ для некоторого

$m \geq 2$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left| n^2 \mathbf{E} (Z_n \mathbf{E} \eta - \mathbf{E} \xi)^2 - n \mathbf{D} \xi^* + 2 \frac{\mathbf{E} (\xi^*)^2 \bar{\eta}}{\mathbf{E} \eta} - 3 \frac{(\mathbf{D} \xi^*) \mathbf{D} \eta}{(\mathbf{E} \eta)^2} - 6 \frac{(\mathbf{E} \xi^* \eta)^2}{(\mathbf{E} \eta)^2} \right| = O(n^{-1}). \quad (2.7)$$

Пример 2.1. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины с экспоненциальным распределением $E(b)$. Естественной оценкой числа b является статистика

$$b_n = \frac{n}{\sum \xi_i}. \quad (2.8)$$

Из теоремы 2.2 следует, что при $3|x| \leq \sqrt{n}$

$$\Delta_* \equiv \left| \mathbf{P} \left\{ \sqrt{n} \left(1 - \frac{b_n}{b} \right) < x \right\} - \Phi(x) \right| \leq \frac{7C_+ \|x\|_*^{-3} (22e^{-1} - 4) + x^2 \varphi(x/2)}{\sqrt{n}}. \quad (2.9)$$

Отметим, что $\mathbf{E}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^{-2} < \infty$.

3. Оценивание функции регрессии. Пусть $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ — выборка независимых наблюдений над распределением пары (X, Y) со значениями из $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$, и пусть $\mathbf{E}|Y| < \infty$. Требуется оценить функцию регрессии

$$\psi(x) = \mathbf{E}\{Y \mid X = x\}.$$

Будем предполагать, что распределение случайного вектора X имеет плотность f относительно меры Лебега в $\mathbf{R}^d$. В дальнейшем в этом разделе символ f_γ обозначает плотность распределения с.в. γ .

Классическая (см. [5], [6]) оценка функции $\psi(x)$ имеет вид

$$\hat{\psi}_n(x) = \frac{\sum Y_i f_\gamma(\varepsilon^{-1}(X_i - x))}{\sum f_\gamma(\varepsilon^{-1}(X_i - x))}, \quad (3.1)$$

где γ — случайный вектор со значениями в $\mathbf{R}^d$, выбираемый статистиком,

$$0 < \varepsilon \equiv \varepsilon(n) \rightarrow 0, \quad n\varepsilon^d \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.2)$$

Отметим, что оценка (3.1) может быть переписана в виде

$$\hat{\psi}_n(x) = \frac{\sum Y_i f_{x+\varepsilon\gamma}(X_i)}{\sum f_{x+\varepsilon\gamma}(X_i)}. \quad (3.1^*)$$

Последняя форма записи представляется нам более удобной.

Хорошо известно, что оценка $\hat{\psi}_n(x)$ состоятельна при выполнении условия (3.2) и определенных предположениях на γ , а при дополнительных ограничениях имеет место сходимость

$$(\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)) \kappa^{-1}(x) \sqrt{n\varepsilon^d} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa^2(x) &= f^{-1}(x) \lambda(x) \mathbf{E} f_\gamma(\gamma), \\ \lambda(\cdot) &= \mathbf{E} \left\{ (Y - \psi(x))^2 \mid X = \cdot \right\}. \end{aligned}$$

При построении доверительных интервалов для $\psi(x)$ важным представляется вопрос о точности нормальной аппроксимации распределения статистики ψ_n . Цель данного раздела — оценить скорость сходимости в предельных теоремах для оценок функции регрессии в схемах последовательного оценивания.

Имеется тесная связь между оценками плотности распределения и оценками регрессии. Так, (3.1) есть аналог введенной Розенблатом [19] ядерной оценки плотности. Следующая оценка $\psi_n(x)$ соответствует оценке плотности, предложенной Дехойвельсом [9] (числа $\{\varepsilon_i\}$ и функция H выбираются статистиком):

$$\psi_n = \frac{\sum H(\varepsilon_i) Y_i f_{x+\varepsilon_i \gamma}(X_i)}{\sum H(\varepsilon_i) f_{x+\varepsilon_i \gamma}(X_i)}. \quad (3.4)$$

Частным случаем (3.4) является статистика

$$\psi_n^* = \frac{\sum Y_i f_{x+\varepsilon_i \gamma}(X_i)}{\sum f_{x+\varepsilon_i \gamma}(X_i)}. \quad (3.5)$$

Отметим, что (3.5) есть аналог оценки плотности, предложенной Волвертоном и Вагнером [10].

Положим $\nu(\cdot) = \mathbf{E}\{|Y - \psi(x)|^3 \mid X = \cdot\}$,

$$H_{nk} = \sum H^{k+1}(\varepsilon_i) \varepsilon_i^{-kd}, \quad H_n \equiv H_{n0}, \quad H_{nkt} = \sum H^{k+1}(\varepsilon_i) \varepsilon_i^{t-kd}.$$

В дальнейшем символ $\|\cdot\|$, примененный к вектору или матрице, означает операторную норму; $\|g\| = \sup_x |g(x)|$. Числа $r_i \equiv r_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$ определим равенствами

$$\begin{aligned} r_1(x) &= \left(\frac{\mathbf{E} f_\gamma(\gamma)}{f(x)} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{\sqrt{2\pi}} + 20 \mathbf{E} \left(\frac{f_\gamma(\gamma)}{\mathbf{E} f_\gamma(\gamma)} \right)^2 \frac{\nu(x)}{\lambda^{3/2}(x)} \right), \\ 2\sqrt{\pi} r_2(x) &= \left(\|(f\psi)''\| + \|\psi\| \|f''\| \right) \frac{\mathbf{E} |\gamma|^2}{\kappa(x) f(x)}, \\ \sqrt{2\pi} r_3(x) &= \frac{\|(\lambda f)''\| \mathbf{E} f_\gamma(\gamma) |\gamma|^2}{\lambda(x) f(x) \mathbf{E} f_\gamma(\gamma)}, \quad \sqrt{2\pi} r_4(x) = \|f''\| f^{-1}(x) \mathbf{E} |\gamma|^2. \end{aligned}$$

Будем считать, что распределение вектора γ симметрично и выполнены следующие условия: $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$,

$$E(1 + f_\gamma^2(\gamma))(1 + |\gamma|^2) < \infty, \quad (3.6)$$

$$\frac{H_{n1}}{H_n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{H_{n02}^2 H_{n1}}{H_{n12} H_n^2} \rightarrow 0, \quad H_{nk} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty, k = 0, 1, 2).$$

Кроме того, будем предполагать, что при $i = 0, 1, 2$

$$\|f^{(i)}\| + \|\lambda^{(i)}\| + \|\psi^{(i)}\| + \|\nu^{(i)}\| < \infty.$$

Теорема 3.1. При всех достаточно больших n

$$\begin{aligned} & \sup_y \left| P\{\psi_n(x) - \psi(x) < y\kappa(x) H_{n1}^{1/2} H_n^{-1}\} - \Phi(y) \right| \\ & \leq r_1(x) \frac{H_{n2}}{H_{n1}^{3/2}} + r_2(x) H_{n02} H_{n1}^{-1/2} + r_3(x) \frac{H_{n12}}{H_{n1}} + r_4(x) \frac{H_{n02}}{H_n}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где Φ — функция распределения нормальной $N(0, 1)$ случайной величины.

Следствие 3.1. Если $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_n$, $H(\varepsilon_n) \equiv 1$ и $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n\varepsilon_n^d \rightarrow \infty$, то при всех достаточно больших n

$$\begin{aligned} & \sup_y \left| P\{\psi_n(x) - \psi(x) < y\kappa(x) (n\varepsilon_n^d)^{-1/2}\} - \Phi(y) \right| \\ & \leq r_1(n\varepsilon_n^d)^{-1/2} + r_2\varepsilon_n^2 (n\varepsilon_n^d)^{1/2} + (r_3 + r_4)\varepsilon_n^2 \\ & \sim r_1(n\varepsilon_n^d)^{-1/2} + r_2\varepsilon_n^2 (n\varepsilon_n^d)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отметим, что правая часть соотношения (3.8) достигает минимума при $\varepsilon \equiv \varepsilon_n = (dr_1/((4+d)r_2n))^{1/(2+d)}$. При этом скорость сходимости в (3.8) есть $O(n^{-1/(2+d)})$.

Положим $r_i \equiv r_i(x) = r_i^*(x)/(\kappa(x)\sqrt{\pi})$ ($i = 5, 6$), где

$$\begin{aligned} r_5^* &= \left(\|\psi\| \|f^{(4)}\| + \|(\psi f)^{(4)}\| \right) \frac{E|\gamma|^4}{24 f(x)}, \\ r_6^* &= \|f''\| \left(\|(\psi f)''\| + \|\psi\| \|f''\| \right) \left(\frac{E|\gamma|^2}{2 f(x)} \right)^2. \end{aligned}$$

Определим функции w, w^* равенствами

$$w(\cdot) = \frac{E((\psi f)'' - \psi f'')\gamma\gamma}{2f}, \quad w^*(x) \equiv w^*(x, n) = w(x) \frac{H_{n02}}{H_n}.$$

Теорема 3.2. Пусть $\|f^{(4)}\| + \|\psi^{(4)}\| < \infty$. Тогда при всех достаточно больших n

$$\sup_y \left| P\{\psi_n(x) - \psi(x) < y\kappa(x) H_{n1}^{1/2} H_n^{-1}\} - \Phi\left(y - \frac{w(x)}{\kappa(x)} H_{n02} H_{n1}^{-1/2}\right) \right|$$

$$\leq r_1 \frac{H_{n2}}{H_{n1}^{3/2}} + r_3 \frac{H_{n12}}{H_{n1}} + r_4 \frac{H_{n02}}{H_n} + r_5 \frac{H_{n04}}{H_{n1}^{1/2}} + r_6 \frac{H_{n02}^2}{H_n H_{n1}^{1/2}}. \quad (3.7^*)$$

Следствие 3.2. Если $\|f^{(4)}\| + \|\psi^{(4)}\| < \infty$, $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_n$, $H(\varepsilon_n) \equiv 1$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n\varepsilon_n^d \rightarrow \infty$, то при всех достаточно больших n

$$\sup_y \left| \mathbf{P} \left\{ \psi_n(x) - \psi(x) < y \kappa(x) (n\varepsilon_n^d)^{-1/2} \right\} - \Phi \left(y - \frac{w(x)}{\kappa(x)} (n\varepsilon_n^{d+4})^{1/2} \right) \right| \leq r_1 (n\varepsilon_n^d)^{-1/2} + (r_3 + r_4) \varepsilon_n^2 + (r_5 + r_6) \varepsilon_n^4 (n\varepsilon_n^d)^{-1/2}. \quad (3.8^*)$$

Правая часть этого выражения достигает минимума при

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_n = n^{-1/(d+4)} \left(\frac{-2q_2 + \sqrt{4q_2^2 + q_1 q_3 d(d+8)}}{q_3(d+8)} \right)^{2/(4+d)},$$

где $q_1 = r_1(x)$, $q_2 = r_3(x) + r_4(x)$, $q_3 = r_5(x) + r_6(x)$; при этом порядок убывания правой части (3.8*) есть $n^{-2/(d+4)}$.

Доказательство теоремы 3.1. Положим

$$\eta_i = f_{x+\varepsilon_i \gamma}(X_i) H(\varepsilon_i), \quad \xi_i = Y_i \eta_i.$$

Отметим, что для всякой измеримой функции $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\mathbf{E} h(Y) f_{x+\varepsilon \gamma}^{t+1}(X) = \varepsilon^{-td} \mathbf{E} \hat{H}(x + \varepsilon \gamma) f(x + \varepsilon \gamma) f_\gamma^t(\gamma) \quad (t \geq 0), \quad (3.9)$$

где $\hat{H}(y) \equiv \mathbf{E}\{h(Y) \mid X = y\}$. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} |m_1 - \psi(x) f(x) H_n| &\leq H_{n02} \mathbf{E} |\gamma|^2 \frac{\|(\psi f)''\|}{2}, \\ |m_2 - f(x) H_n| &\leq H_{n02} \mathbf{E} |\gamma|^2 \frac{\|f''\|}{2}, \\ \left| \frac{m_1}{m_2} - \psi(x) \right| &\leq r_{nx} \|(\psi f)''\| + r_{nx} \|f''\| \left(\|\psi\| + r_{nx} \|(\psi f)''\| \right) \\ &\quad \times (1 - r_{nx} \|f''\|)^{-1} \sim r_{nx} \left(\|(\psi f)''\| + \|f''\| \|\psi\| \right), \end{aligned}$$

где $r_{nx} = f^{-1}(x) \mathbf{E} |\gamma|^2 H_{n02} / (2H_n)$ (последнее неравенство справедливо при всех n , для которых $r_{nx} < 1$). Вследствие (3.9)

$$\mathbf{E} (Y - \psi(x))^2 f_{x+\varepsilon \gamma}^2(X) = \varepsilon^{-d} \mathbf{E} \lambda(x + \varepsilon \gamma) f(x + \varepsilon \gamma) f_\gamma(\gamma).$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$|\sigma_1^2 - \lambda(x) f(x) \mathbf{E} f_\gamma(\gamma) H_{n1}| \leq \|(\lambda f)''\| \mathbf{E} |\gamma|^2 f_\gamma(\gamma) H_{n12} (1 + o(1)) \quad (3.10)$$

(нетрудно выписать и явную оценку, однако это слишком загромождало бы изложение). Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{m_2} &= \kappa(x) H_{n1}^{1/2} H_n^{-1} \rho, \\ |\rho - 1| &\leq \sqrt{2\pi} (r_3(x) H_{n12} H_{n1}^{-1} + r_4(x) H_{n02} H_n^{-1}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

при всех достаточно больших n . Отметим также, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma_2}{m_2} \sim \left(\frac{E f_\gamma(\gamma)}{f(x)} \right)^{1/2} H_{n1}^{1/2} H_n^{-1}.$$

Легко убедиться, что $\mu \leq 3\mu_1 + 4\sigma_1^3 \mu_2^*$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\mu}{\sigma_1^3} \leq 7 \left(\frac{E f_\gamma(\gamma)}{f(x)} \right)^{1/2} E \left(\frac{f_\gamma(\gamma)}{E f_\gamma(\gamma)} \right)^2 \frac{\nu(x)}{\lambda^{3/2}(x)} H_{n2} H_{n1}^{-3/2} (1 + o(1)).$$

Из теоремы 2.1 с учетом неравенства $(H_{n1})^2 \leq H_{n2} H_n$ выводим:

$$\sup_u \left| P \left\{ \psi_n(x) - \frac{m_1}{m_2} < \frac{u\sigma_1}{m_2} \right\} - \Phi(u) \right| \leq r_1 H_{n2} H_{n1}^{-3/2} \quad (3.12)$$

при всех достаточно больших n . Делая замену переменной $z = u + (m_1/m_2 - \psi(x)) m_2/\sigma_1$, получим:

$$\sup_z \left| P \left\{ \psi_n(x) - \psi(x) < \frac{z\sigma_1}{m_2} \right\} - \Phi(z) \right| \leq r_1 H_{n2} H_{n1}^{-3/2} + r_2 H_{n02} H_{n1}^{-1/2}. \quad (3.13)$$

Положим $z = y/\rho$. Из (3.10)–(3.13) и равенства

$$\sup_z z \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (3.14)$$

вытекает утверждение теоремы 3.1.

З а м е ч а н и е. Если носитель распределения случайного вектора γ ограничен, то (3.7) останется в силе, если в определении r_i вместо участвующего в определении нормы $\|\cdot\|$ супремума по $\mathbf{R}^d$ взять супремум по произвольному фиксированному шару с центром в точке x . Если же вторые производные функций f, ψ, λ, ν непрерывны в окрестности x , то нормы можно заменить модулями значений в точке x стоящих под знаками нормы функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.2. Положим

$$r_7(x, n) = r_5^* \frac{H_{n04}}{H_n} + r_6^* \left(\frac{H_{n02}}{H_n} \right)^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$\left| \frac{m_1}{m_2} - \psi(x) - w^*(x) \right| \leq r_7(x, n) (1 + o(1)).$$

Делая в (3.12) замену переменной $z = u + (m_1/m_2 - \psi(x))m_2/\sigma_1$, с учетом (3.11) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \sup_z \left| \mathbf{P} \left\{ \psi_n(x) - \psi(x) < \frac{z\sigma_1}{m_2} \right\} - \Phi \left(z - w^*(x) \frac{m_2}{\sigma_1} \right) \right| \\ & \leq r_1 \frac{H_{n2}}{H_{n1}^{3/2}} + r_7(x, n) \frac{m_2}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} (1 + o(1)) \\ & = r_1 H_{n2} H_{n1}^{-3/2} + (r_5^* H_{n04} + r_6^* H_{n02}^2 H_n^{-1}) \frac{H_{n1}^{-1/2}}{\kappa(x) \sqrt{2\pi}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$w^*(x) \frac{m_2}{\sigma_1} = w(x) \frac{H_{n02}}{\kappa(x) H_{n1}^{1/2} \rho}.$$

Поэтому, принимая во внимание (3.14),

$$\begin{aligned} & \sup_y \left| \mathbf{P} \left\{ \psi_n(x) - \psi(x) < y \kappa(x) H_{n1}^{1/2} H_n^{-1} \right\} - \Phi \left(y - \frac{w(x)}{\kappa(x)} H_{n02} H_{n1}^{-1/2} \right) \right| \\ & \leq r_1 H_{n2} H_{n1}^{-3/2} + (r_5^* H_{n04} + r_6^* H_{n02}^2 H_n^{-1}) H_{n1}^{-1/2} \frac{(1 + o(1))}{\kappa(x) \sqrt{2\pi}} \\ & \quad + \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi e}} |1 - \rho|, \end{aligned}$$

что влечет за собой утверждение теоремы 3.2.

4. Статистическое оценивание показателя скорости убывания «хвоста» неизвестного вероятностного распределения.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые копии случайной величины X , распределение которой допускает при $x > 0$ представление

$$p(x) \equiv \mathbf{P}\{X \geq x\} = L(x) x^{-b} \quad (b > 0), \quad (4.1)$$

где функция $L(x)$ медленно меняется при $x \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(xt)}{L(x)} = 1$$

для любого $t > 0$. Требуется оценить число b по наблюдениям $X_1, \dots, X_n$.

Различные оценки числа b изучались в [21]–[36]. Хилл [21] предложил оценку

$$\hat{b}_n = \frac{N_n}{\sum_{i=1}^{N_n} \ln(X_{(n-i+1)}/X_{(n-N_n)})}, \quad (4.2)$$

где $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ — вариационный ряд выборки $X_1, \dots, X_n$, числа $\{N_n\}$ выбираются статистиком (здесь и ниже $\ln x = -\infty$, если $x \leq 0$). Распределение оценки

$$b_n^* = \frac{\sum_1^n 1\{X_i > N_n\}}{\sum_1^n \ln(X_i/N_n) 1\{X_i > N_n\}}, \quad (4.3)$$

(числа $\{N_n\}$ выбираются статистиком) изучалось в [4], [28], где установлена следующая

Теорема В. Пусть последовательность чисел $\{N_n\}$ такова, что $\text{pr}(N_n) \rightarrow \infty$ и $\gamma_n = E\{\ln(X/N_n) \mid X > N_n\} - 1/b \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $b_n^* \xrightarrow{P} b$, причем сходимость

$$(\text{pr}(x_n))^{1/2} \left(\frac{b_n^*}{b} - 1 \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.4)$$

имеет место в том и только том случае, если $\text{pr}(N_n) \gamma_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В частном случае $L(x) = a^b 1\{x \geq a\}$, $N_n \equiv a$, статистика b_n^* совпадает с оценкой максимального правдоподобия.

Отметим, что теоремы о слабой сходимости во всех упомянутых работах имеют вид

$$k_n(b_n - b) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (4.5)$$

где $k_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

В настоящем разделе рассматривается оценка

$$b_n = \frac{\sum Y_{0,i}}{\sum Y_{1,i}}, \quad (4.6)$$

где

$$Y_{k,i} = \ln^k \left(\frac{X_i}{N_{i,n}} \right) 1\{X_i > N_{i,n}\}, \quad (4.7)$$

числа $\{N_{i,n}\}$ выбираются статистиком. Оценка (4.6) является естественным обобщением статистики (4.3) для схем последовательного оценивания.

Принцип построения оценок (4.3), (4.6) становится понятным в свете следующего обстоятельства: условное распределение с.в. $\ln(X/N)$ при условии $X > N$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к экспоненциальному закону $E(b)$. Более того, при $N \rightarrow \infty$

$$b^k E \left\{ \ln^k \left(\frac{X}{N} \right) \mid X \geq N \right\} = \int_0^\infty L^{-1}(N) L(Ne^{u/b}) e^{-u} du^k = k! (1 + v_k(N)),$$

где для любого $k \in \mathbb{N}$ при $N \rightarrow \infty$

$$v_k(N) \equiv \frac{\int_0^\infty h_N(u) e^{-u} du^k}{k!} \rightarrow 0, \quad (4.8)$$

$$h_N(u) \equiv h_N(u, b) = L^{-1}(N) L(Ne^{u/b}) - 1$$

(справедливость (4.8) вытекает из свойств медленно меняющихся функций [39]).

Естественно поставить вопрос о скорости сходимости в теоремах вида (4.5). Ниже мы выводим оценки типа Берри-Эссеена в предельных теоремах для распределений статистик b_n .

Положим $N_{i,n} \equiv N_{n,n}$ при $i > n$,

$$\begin{aligned} p_i &= p(N_{i,n}), \quad v_{k,i} = v_k(N_{i,n}), \quad r_n = \sum_1^n p_i, \\ \varepsilon_n &= r_n^{-1} \sum_1^n p_i v_{1,i}, \quad \delta_n = r_n^{-1} \sum_1^n p_i v_{2,i}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В этом разделе мы предполагаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty, \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ i \rightarrow \infty}} N_{i,n} = \infty. \quad (A)$$

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [28], легко убедиться, что условие (A) обеспечивает состоятельность оценки b_n . Применение теорем 2.1–2.5 позволяет получить следующие результаты.

Утверждение 4.1. При всех достаточно больших n

$$\begin{aligned} \sup_y \left| \mathbf{P} \left\{ r_n^{1/2} \left(\frac{b_n}{b} - \frac{1}{1 + \varepsilon_n} \right) < y \right\} - \Phi(y) \right| \\ \leq 80 r_n^{-1/2} + 36 r_n^{-1} + |\delta_n - 3\varepsilon_n| \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Утверждение 4.2. При всех достаточно больших n

$$\begin{aligned} \sup_{20y^2 < r_n} \left| \mathbf{P} \left\{ r_n^{1/2} \left(\frac{b_n}{b} - \frac{1}{1 + \varepsilon_n} \right) < y \right\} - \Phi(y) \right| \\ \leq 2|y| \varphi\left(\frac{y}{2}\right) |\delta_n - 3\varepsilon_n| + \frac{27C_+ r_n^{-1/2}}{|y|^3 + \frac{1}{4}} + 2y^2 \varphi\left(\frac{y}{2}\right) r_n^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Положим

$$\tilde{m}_* \equiv \tilde{m}_*(n) = r_n^{-1} \sum_1^n p_i^2 (\varepsilon_n - v_{1,i}), \quad \tilde{m}' \equiv \tilde{m}'(n) = r_n^{-1} \sum_1^n p_i^2 (v_{1,i} - \varepsilon_n)^2.$$

Запись $a_n \asymp b_n$ означает, что

$$0 < \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

Ниже в этом разделе предполагается, что

$$\min_{i,j \in J_n} \sum_{k \in J_n \setminus \{i,j\}} p_k \asymp r_n.$$

Утверждение 4.3. При $n \rightarrow \infty$

$$(bEb_n^{-1} - 1 - \varepsilon_n) r_n + \tilde{m}_* = O(r_n^{-1}).$$

Утверждение 4.4. При $n \rightarrow \infty$

$$r_n E \left(\frac{b}{b_n} - 1 - \varepsilon_n \right)^2 = 1 + 2(\delta_n - \varepsilon_n) - \varepsilon_n^2 - \tilde{m}' + O(r_n^{-1}).$$

Отметим, что $\tilde{m}_* = \tilde{m}' = 0$, $\varepsilon_n = v_1(N_n)$, $\delta_n = v_2(N_n)$, если положить

$$N_{i,n} = N_n \quad (i \in \mathbf{N}). \quad (4.12)$$

Утверждение 4.5. Если выполнено (4.12), то при $n \rightarrow \infty$, $N \equiv N_n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} (np(N))^2 E \left(\frac{b}{b_n} - 1 - \varepsilon_n \right)^2 &= (np(N) + 1 - p(N)) (1 + 2(\delta_n - \varepsilon_n) - \varepsilon_n^2) \\ &\quad + O \left(\frac{1}{np(N)} \right). \end{aligned}$$

Из утверждений 4.3, 4.5 следует, что в условиях утверждения 4.5

$$\begin{aligned} np(N) E \left(\frac{b}{b_n} - 1 \right)^2 &= 1 + 2(\delta_n - \varepsilon_n) - \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^2 np(N) \\ &\quad + \frac{1}{np(N)} + o \left(\frac{1}{np(N)} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Аналогичные утверждениям 4.1–4.5 результаты могут быть выведены и для статистики, предложенной в [24].

Утверждения 4.1–4.5 следуют из теорем 2.1–2.5.

З а м е ч а н и е о б о д н о й б л и з к о й з а д а ч е. Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ — независимые наблюдения над распределением с.в. Y , удовлетворяющим условию Крамера: $E \exp(tY) < \infty$ для некоторого $t > 0$. Положим $\sigma = \sup\{t: E \exp(tY) < \infty\}$. В работе [37] рассматривалась задача оценивания числа σ по выборке $Y_1, \dots, Y_n$ с помощью статистик

$$\sigma_n = \frac{\sum_{i=1}^n 1\{Y_i > y_n\}}{\sum_{i=1}^n (Y_i - y_n) 1\{Y_i > y_n\}}, \quad \hat{\sigma}_n = \frac{Y_{(n)}}{\ln n},$$

где $Y_{(n)} = \max\{Y_i: 1 \leq i \leq n\}$, числа $\{y_n\}$ выбираются исследователем.

В [37] установлено, что при определенных предположениях на распределение с.в. Y оценки $\sigma_n, \hat{\sigma}_n$ состоятельны и скорость сходимости σ_n к σ есть $1/\ln n$.

Покажем, что задача оценивания числа σ в известном смысле сводится к задаче оценивания индекса b . А именно, определим функцию L равенством

$$P\{Y \geq y\} = e^{-\sigma y} L(e^y). \quad (4.14)$$

Если L — медленно меняющаяся функция, то распределение с.в. $X = e^Y$ удовлетворяет (4.1) с $b = \sigma$; условное распределение $Y - y$ при условии $Y \geq y$ сходится при $y \rightarrow \infty$ к экспоненциальному закону $E(\sigma)$; для любого $t \in \mathbf{R}$

$$h(y) = o(y), \quad h(y+t) - h(y) = o(1) \quad (y \rightarrow \infty),$$

где $h(y) = \ln L(e^y)$ (в этом нетрудно убедиться с помощью свойств медленно меняющихся функций).

Таким образом, если предположить, что распределение с.в. Y удовлетворяет (4.14), где L — медленно меняющаяся функция, то из результатов настоящего раздела вытекают соответствующие утверждения об асимптотике распределения оценки σ_n .

5. Статистическое оценивание $f(x)/(1-F(x))$. Пусть дана выборка $X_1, \dots, X_n$ независимых наблюдений над распределением с.в. X с функцией распределения F и плотностью f . В дальнейшем в этом разделе символ f_ξ для любой с.в. ξ обозначает плотность ее распределения, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Пусть $\bar{F}(x) > 0$. Определим функцию интенсивности отказов (иначе — «failure rate» или «hazard function») равенством

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}. \quad (5.1)$$

Потребность в сведениях о функции h возникает в теории надежности, сейсмологии и других областях (см. [40], [41]). Требуется оценить число $h(x)$.

Ватсон и Лидбеттер [42] предложили оценки

$$h_n^*(x) = \frac{f_n(x)}{\bar{F}_n(x)}, \quad (5.2)$$

$$h_n^{(2)}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{f_{x+\varepsilon\gamma}(X_i)}{n\bar{F}_n(X_i)}, \quad (5.3)$$

где F_n — выборочная функция распределения, $\bar{F}_n = 1 - F_n$, $f_n \equiv f_{n,\varepsilon}$ есть классическая ядерная оценка плотности с ядром f_γ (см. также [41], [43]):

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{x+\varepsilon\gamma}(X_i). \quad (5.4)$$

В настоящем разделе предлагается обобщение статистики (5.2) для схемы рекуррентного оценивания.

Положим

$$h_n(x) = \frac{\sum_1^n f_{x+\varepsilon_i \gamma_i}(X_i)}{\sum_1^n 1\{X_i \geq x\}}, \quad (5.5)$$

где $0 < \varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, распределения случайных величин $\{\gamma_i\}$ и числа $\{\varepsilon_i\}$ выбираются статистиком. Мы предполагаем, что распределение каждой с.в. γ_i симметрично и $E\gamma_i^2 = 1$ (иначе от ε_i и γ_i перейдем к $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i \sqrt{D\gamma_i}$ и $\gamma_i^* = \gamma_i / \sqrt{D\gamma_i}$).

Положим

$$\begin{aligned} \nu_{ij} &= Ef_{\gamma_i}^j(\gamma_i), \quad \nu_i = \nu_{i1}, \\ H_{nkt}^* &= \sum_1^n \varepsilon_i^{t-k} Ef_{\gamma_i}^k(\gamma_i) \gamma_i^t, \quad H_{nk}^* = H_{nk0}^*, \\ r_{ni}^+ &= (h(x) + r_{nx}^{(2)}) \left(\|f''\| \frac{H_{n02}^*}{2n} + 2\|f'\| \varepsilon_i E\gamma_i^+ \right), \\ q_n &= \|f''\| \frac{H_{n12}^*}{2} + \sum_1^n r_{ni}^+, \\ r_{nx}^{(1)} &= \frac{q_n + \|f''\|^2 \sum_1^n \varepsilon_i^4}{f(x) H_{n1}^*}, \quad r_{nx}^{(2)} = \|f''\| \frac{H_{n02}^*}{2n P\{X \geq x\}}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

и пусть $G(x) = \{n \in \mathbb{N}: r_{nx}^{(1)} < 1\}$,

$$\begin{aligned} q_{nx}^* &= \frac{3\|f\|\|f''\|}{P\{X \geq x\}} \left(4\|f\| H_{n02}^* + \sum_1^n \varepsilon_i \nu_i + \frac{H_{n02}^* H_{n1}^*}{n} \right), \\ \hat{r}_{nx} &= \frac{f(x) H_{n2}^* + \|f''\| H_{n22}^* / 2 + q_{nx}^*}{(f(x) H_{n1}^*)^{3/2} (1 - r_{nx}^{(1)})^{3/2}}, \\ \check{r}_{nx} &= 3\hat{r}_{nx} + 4(n P\{X \geq x\} P\{X < x\})^{-1/2}, \\ \beta(n, x) &= \frac{(f(x) H_{n1}^*)^{1/2}}{n P\{X \geq x\}}, \quad Q_{nx}^{(i)} = \frac{r_{nx}^{(i)}}{(1 - r_{nx}^{(i)}) \beta(n, x)} \quad (i = 2, 3), \\ Q_{nx}^{(1)} &= 27 C_* \frac{\check{r}_{nx}}{8} + 8e^{-1} \left(\frac{P\{X < x\}}{2\pi n P\{X \geq x\}} \right)^{1/2} + 17 \frac{P\{X < x\}}{n P\{X \geq x\}}. \end{aligned}$$

Теорема 5.1. Для любого $n \in G(x)$

$$\begin{aligned} &\sup_y \left| P\{h_n(x) - h(x) < y\beta(n, x)\} - \Phi(y) \right| \\ &\leq Q_{nx}^{(1)} + Q_{nx}^{(2)} + \frac{r_{nx}^{(1)}}{(1 - r_{nx}^{(1)}) \sqrt{2\pi e}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ниже запись $a_n(x) \lesssim b_n(x)$ означает, что

$$a_n(x) \leq b_n(x) (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (5.8)$$

Следствие 5.1. Если $\varepsilon_i = \varepsilon$ и $\gamma_i = \gamma$ для любого i , $\varepsilon \equiv \varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &\equiv \sup_y \left| \mathbf{P} \left\{ h_n^*(x) - h(x) < \frac{y\beta_x}{\sqrt{2\pi n\varepsilon}} \right\} - \Phi(y) \right| \\ &\lesssim \frac{81C_*\nu_*}{8\nu^{3/2}\sqrt{f(x)n\varepsilon}} + \frac{\|f''\|\sqrt{n\varepsilon^5}}{2\sqrt{2\pi\nu f(x)}}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $\nu = \mathbf{E}f_\gamma(\gamma)$, $\nu_* = \mathbf{E}f_\gamma^2(\gamma)$, $\beta_x = \sqrt{2\pi\nu f(x)}/\mathbf{P}\{X \geq x\}$.

Минимум по ε в правой части (5.9) достигается при выборе

$$\varepsilon(n) = \left(\frac{81C_*\nu_*\sqrt{2\pi}}{20\nu\|f''\|n} \right)^{1/3} \quad (5.10)$$

При этом правая часть (5.9) есть $O_x(n^{-1/3})$. Таков же порядок убывания правой части (5.7) и в схеме рекуррентного оценивания, если $\varepsilon_i \sim ci^{-1/3}$, $\gamma_i = \gamma$.

Предположим теперь, что f четырежды дифференцируема, и пусть

$$g_n(x) = f''(x) \frac{H_{n02}^*}{2n\mathbf{P}\{X \geq x\}}, \quad r_{nx}^{(3)} = \|f^{(4)}\| \frac{H_{n04}^*}{24n\mathbf{P}\{X \geq x\}}.$$

Теорема 5.2. Для любого $n \in G(x)$

$$\begin{aligned} \sup_y \left| \mathbf{P} \left\{ h_n(x) - h(x) < y\beta(n, x) \right\} - \Phi \left(y - \frac{g_n(x)}{\beta(n, x)} \right) \right| \\ \leq Q_{nx}^{(1)} + Q_{nx}^{(3)} + \frac{r_{nx}^{(1)}}{(1 - r_{nx}^{(1)})\sqrt{2\pi e}}. \end{aligned} \quad (5.7^*)$$

Следствие 5.2. Если $\varepsilon_i = \varepsilon$ и $\gamma_i = \gamma$ для любого i , $\varepsilon \equiv \varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \sup_y \left| \mathbf{P} \left\{ h_n^*(x) - h(x) < \frac{y\beta_x}{\sqrt{2\pi n\varepsilon}} \right\} - \Phi \left(y - f''(x) \sqrt{\frac{n\varepsilon^5}{4\nu f(x)}} \right) \right| \\ \lesssim \frac{\delta_1}{\sqrt{n\varepsilon}} + \delta_2\varepsilon^2 + \delta_3\sqrt{n\varepsilon^9}, \end{aligned} \quad (5.9^*)$$

где функции $\delta_i \equiv \delta_i(x)$ определены формулами

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{81C_*\nu_*}{8\nu^{3/2}\sqrt{f(x)}}, \quad \delta_3 = \|f^{(4)}\| \frac{\mathbf{E}\gamma^4}{24\sqrt{2\pi\nu f(x)}}, \\ \delta_2 &= \frac{\|f''\|\mathbf{E}\gamma^2 f_\gamma(\gamma)/2 + 2h(x)\|f'\|\mathbf{E}\gamma^+}{\nu f(x)\sqrt{2\pi e}}. \end{aligned}$$

Минимум по ε в правой части (5.9*) достигается выбором

$$\varepsilon^{5/2} = \frac{2\delta_2 \sqrt{1 + 9\delta_1\delta_3/(4\delta_2^2)} - 1}{9\delta_3 \sqrt{n}}. \quad (5.11)$$

При этом точность аппроксимации в (5.9*) есть $O(n^{-2/5})$.

Пусть $\gamma_i \equiv \gamma$. С помощью теорем 2.3, 2.4 нетрудно показать, что при определенных предположениях на f и f_γ

$$\mathbf{E}h_n(x) - \frac{m_1}{m_2} = O_x\left(\frac{1}{n}\right), \quad \mathbf{E}\left(h_n(x) - \frac{m_1}{m_2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{m_2}\right)^2 = O_x(n^{-2})$$

при $n \rightarrow \infty$ (обозначим п. 1) и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(h_n(x) - h(x))^2 &= \frac{f(x)H_{n1}^*}{(n\mathbf{P}\{X \geq x\})^2} + \left(\frac{f''(x)H_{n02}^*}{2n\mathbf{P}\{X \geq x\}}\mathbf{E}\gamma^2\right)^2 \\ &\quad + O_x((H_{n02}^* + r_{nx}^{(1)}H_{n1}^*)n^{-2}). \end{aligned}$$

Если $\varepsilon_i \equiv \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то правая часть этого соотношения асимптотически эквивалентна

$$\frac{\nu h(x)}{n\varepsilon\mathbf{P}\{X \geq x\}} + \left(\frac{\varepsilon^2 f''(x)\mathbf{E}\gamma^2}{2\mathbf{P}\{X \geq x\}}\right)^2 \quad (5.12)$$

(ср. с [43]). Минимум по ε в (5.12) достигается при $\varepsilon = \varepsilon_*$, где

$$\varepsilon_*^5 = \varepsilon_*^5(n, x) = \frac{\nu f(x)}{n(f''(x)\mathbf{E}\gamma^2)^2}.$$

При $\varepsilon = \varepsilon_*$ выражение (5.12) примет вид

$$\frac{5}{4} n^{-4/5} (\mathbf{P}\{X \geq x\})^{-2} (\nu f(x))^{4/5} (f''(x)\mathbf{E}\gamma^2)^{2/5}.$$

Доказательство теорем 5.1 и 5.2 аналогично выводу теорем 3.1, 3.2; поэтому детали опущены.

6. Доказательства теорем 2.1–2.2. Положим

$$m_* \equiv m_*(n) = \sum \mathbf{E}\xi_i^* \bar{\eta}_i, \quad \xi_i(n, x) = \bar{\xi}_i^* - x d_n \frac{\bar{\eta}_i}{m_2},$$

$$\mu_n(x) = \sum \mathbf{E}|\xi_i(n, x)|^3,$$

$$d_n \equiv d_n(x) = \sigma_1 \left(\frac{x m_*}{\sigma_1 m_2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x \sigma_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{x m_*}{\sigma_1 m_2}\right)^2} \right)^{-1}, \quad (6.1)$$

$$B_n^* = \left\{ x \in \mathbf{R}: |x \sigma_2| \leq \left| \frac{m_2}{2} \right| \right\}. \quad (6.2)$$

Отметим, что число $d_n(x)$ корректно определено при всех x таких, что $|x\sigma_2/m_2| \leq 1$.

В доказательстве теорем 2.1, 2.2 используются известные равномерная и неравномерная оценки скорости сходимости в ЦПТ. Основная идея состоит в введении случайных величин $\xi_i(n, x)$, к распределениям которых и применяются упомянутые оценки. Причем число d_n выбирается так, что $d_n^2 = D \sum \xi_i(n, x)$. Второй этап доказательства посвящен учету погрешностей, связанных с приближением $d_n \approx \sigma_1$.

Лемма 6.1. При $n \geq 1, x \in B_n^*$

$$\Delta^*(n, x) \equiv \left| P \left\{ \sum \left(\xi_i - \frac{\eta_i m_1}{m_2} \right) < x d_n \frac{\sum \eta_i}{m_2} \right\} - \Phi(x) \right| \leq C_+ (1 + |x|^3)^{-1} d_n^{-3} \mu, \quad (6.3)$$

где $C_+ = 31.995$ есть абсолютная константа.

Доказательство. Заметим, что

$$\left\{ \sum \left(\xi_i - \frac{\eta_i m_1}{m_2} \right) < x d_n \sum \frac{\eta_i}{m_2} \right\} = \left\{ \sum \left(\xi_i^* - x d_n \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right) < x d_n \right\}. \quad (6.4)$$

Число d_n выбрано нами как решение квадратного (относительно d_n) уравнения

$$d_n^2 = \sum D \left(\bar{\xi}_i^* - x d_n \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right). \quad (6.5)$$

Следующий результат доказан в [11].

Теорема С. Предположим, что случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и имеют нулевое среднее; $G_n = X_1 + \dots + X_n$. Тогда для любого $n \geq 1, x \in \mathbf{R}$

$$(1 + |x|^3) \left| P \left\{ G_n < x \sqrt{D G_n} \right\} - \Phi(x) \right| \leq C_+ \sum E |X_i|^3 (D G_n)^{-3/2}. \quad (6.6)$$

Из (6.4)–(6.6) выводим:

$$\Delta^*(n, x) \leq C_+ d_n^{-3} \mu_n(x) (1 + |x|^3)^{-1}. \quad (6.7)$$

С помощью формулы Тейлора заключаем, что

$$E |\xi_i(n, x)|^3 \leq E |\bar{\xi}_i^*|^3 + 3 |x d_n| E \left| \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right| (\bar{\xi}_i^*)^2 + 3 E \left| x d_n \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right|^3. \quad (6.8)$$

Из (6.2) и приводимой ниже леммы 6.2 (см. (6.10')) следует, что

$$|x d_n| \leq \frac{\sigma_1 |m_2|}{\sigma_2} \quad (x \in B_n^*). \quad (6.9)$$

Применяя неравенство Гёльдера, из (6.7)–(6.9) получим (6.3).

Лемма 6.1 доказана.

Лемма 6.2. Для любого $x \in B_n^*$

$$\left| 1 - \frac{\sigma_1}{d_n} \right| \leq \left| \frac{x\sigma_2}{m_2} \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (6.10)$$

Доказательство. Равенство (6.1) можно переписать в виде

$$\frac{\sigma_1}{d_n} = \frac{xm_*}{\sigma_1 m_2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x\sigma_2}{m_2} \right)^2 + \left(\frac{xm_*}{\sigma_1 m_2} \right)^2}. \quad (6.11)$$

Соотношение (6.11) и очевидное неравенство

$$|m_*| \leq \sigma_1 \sigma_2 \quad (6.12)$$

влекут за собой неравенство

$$\frac{\sigma_1}{d_n} \leq 1 + \frac{|xm_*|}{\sigma_1 m_2} \leq 1 + \left| \frac{x\sigma_2}{m_2} \right| \quad (6.13)$$

при всех x таких, что $|x\sigma_2/m_2| \leq 1$. Отметим, что для любого $\varepsilon \geq |x\sigma_2/m_2|$ неравенство $\sigma_1/d_n \geq \varepsilon$ эквивалентно следующему:

$$1 - \left(\frac{x\sigma_2}{m_2} \right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{m_*}{\sigma_1 \sigma_2} \right)^2 \right\} \geq \left(\varepsilon - \frac{xm_*}{\sigma_1 m_2} \right)^2,$$

что может быть переписано в виде

$$1 - \left(\frac{x\sigma_2}{m_2} \right)^2 \geq \varepsilon^2 - 2\varepsilon \frac{xm_*}{\sigma_1 m_2}. \quad (6.14)$$

Но правая часть (6.14) не превосходит $\varepsilon^2 + 2\varepsilon|x\sigma_2/m_2|$. Полагая $\varepsilon = 1 - |x\sigma_2/m_2|$, получим:

$$\frac{\sigma_1}{d_n} \geq 1 - \left| \frac{x\sigma_2}{m_2} \right|. \quad (6.15)$$

Из (6.2), (6.13), (6.15) вытекает (6.10).

Лемма 6.2 доказана.

Следствие 6.1. При $n \geq 1$, $x \in B_n^*$

$$\left| \Phi\left(\frac{x\sigma_1}{d_n}\right) - \Phi(x) \right| \leq x^2 \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sigma_2}{|m_2|}. \quad (6.16)$$

Доказательство. Согласно (6.10), имеет место неравенство

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\sigma_1}{d_n} \leq \frac{3}{2}. \quad (6.10')$$

С помощью (6.10') и формулы Тейлора выводим:

$$\begin{aligned} \left| \Phi\left(\frac{x\sigma_1}{d_n}\right) - \Phi(x) \right| &\leq |x| \left| 1 - \frac{\sigma_1}{d_n} \right| \varphi\left(|x| \min_{0 \leq \theta \leq 1} \left\{ \theta + (1-\theta) \frac{\sigma_1}{d_n} \right\}\right) \\ &\leq |x| \left| 1 - \frac{\sigma_1}{d_n} \right| \varphi\left(\frac{x}{2}\right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

что вместе с (6.10) влечет за собой (6.16).

Следствие 6.1 доказано.

Доказательство теоремы 2.2. Ввиду (6.10'), $x\sigma_1/d_n \in B_n^*$ как только $x \in B_n$. Из леммы 6.1 и (6.10') находим, что при $x \in B_n$

$$\left| \mathbf{P} \left\{ \sum \left(\xi_i - \frac{\eta_i m_1}{m_2} \right) < x\sigma_1 \frac{\sum \eta_i}{m_2} \right\} - \Phi\left(\frac{x\sigma_1}{d_n}\right) \right| \leq C_+ \|x\|_*^{-3} \sigma_1^{-3} \mu, \quad (6.18)$$

что вместе с (6.16) влечет за собой утверждение теоремы 2.2.

Доказательство теоремы 2.1 проводится аналогично доказательству теоремы 2.2 с использованием вместо теоремы С результата Жиганова [12], что вместе с (6.10) дает оценку

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{P} \left\{ \sum \left(\xi_i - \frac{\eta_i m_1}{m_2} \right) < x\sigma_1 \sum \frac{\eta_i}{m_2} \right\} - \Phi\left(\frac{x\sigma_1}{d_n}\right) \right| \\ \leq C_* \mu \sigma_1^{-3} \left(1 + \frac{|x|\sigma_2}{m_2} \right)^3 \leq C_* \mu \left(\frac{3}{2\sigma_1} \right)^3 \end{aligned} \quad (6.19)$$

при $x \in B_n$. Заметим, что

$$\sup_x x^2 \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{8}{e\sqrt{2\pi}}. \quad (6.20)$$

Оценим

$$\sup_{x \notin B_n} \left| \mathbf{P} \left\{ \sum \xi_i^* < x\sigma_1 \sum \frac{\eta_i}{m_2} \right\} - \Phi(x) \right|.$$

Для определенности будем считать, что $m_2 > 0$. Ввиду (6.2) и неравенства Чебышева,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sum \xi_i^* \geq x\sigma_1 \sum \frac{\eta_i}{m_2} \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ \sum \frac{\xi_i^*}{\sigma_1} \geq \sum \frac{\eta_i}{3\sigma_2}; \sum \eta_i \geq 0 \right\} \\ &+ \mathbf{P} \left\{ \sum \eta_i < 0 \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \sum \left(\frac{\xi_i^*}{\sigma_1} - \frac{\bar{\eta}_i}{3\sigma_2} \right) \geq \frac{m_2}{3\sigma_2} \right\} \\ &+ \mathbf{P} \left\{ \sum \bar{\eta}_i < -m_2 \right\} \leq 17 \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

при $x \in \mathbf{R}^+ \setminus B_n$. Для нормальной $\mathcal{N}(0, 1)$ с.в. ζ выполняется:

$$\mathbf{P}\{\zeta \in \mathbf{R}^+ \setminus B_n\} \leq 9 \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right)^2.$$

Объединяя (6.16), (6.19)–(6.21), получим (2.2).

Теорема 2.1 доказана.

Отметим, что константы в неравенствах (2.2), (2.3) не оптимальны. Более точные оценки можно получить, если вместо B_n взять, к примеру, множество $\{x: |x| \leq (|m_2|/\sigma_2)^\alpha\}$, $\alpha \in (0; 1)$.

7. Доказательства теорем 2.3–2.5. Положим

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \frac{\bar{T}_n}{m_2}, \quad \zeta_{ni} = \frac{\bar{T}_{ni}}{m_2}, \quad \bar{T}_{ni} = T_n - \eta_i, \\ \tau_n &= 1\{T_n > m^+\}, \quad \tau_{ni} = 1\{T_{ni} > m^+\}, \quad \tau_{ni}^* = 1 - \tau_{ni}; \end{aligned}$$

аналогично определяются τ_n^* и τ_{ni}^* .

Доказательство теоремы 2.3 опирается на следующее соотношение:

$$m_2 \mathbf{E} Z_n - m_1 = m_2 \mathbf{E} \frac{S_n^*}{T_n} = \sum \mathbf{E} \xi_i^* \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-1}. \quad (7.1)$$

Пользуясь тождеством

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2(1+x)^{-1} \quad (7.2)$$

с $x = \bar{\eta}_i/(m_2(1 + \zeta_{ni}))$, получим:

$$\begin{aligned} & \left| \sum \mathbf{E} \xi_i^* \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-1} \tau_{ni} - \sum \mathbf{E} \xi_i^* \mathbf{E} (1 + \zeta_{ni})^{-1} \tau_{ni} \right. \\ & \quad \left. + \sum \mathbf{E} \xi_i^* \bar{\eta}_i \mathbf{E} (1 + \zeta_{ni})^{-2} \frac{\tau_{ni}}{m_2} \right| \leq \delta^{-3} m_2^{-2} \sum \mathbf{E} |\xi_i^*| \eta_i^2 \equiv \rho_1. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \left| \sum \mathbf{E} \xi_i^* \mathbf{E} (1 + \zeta_{ni})^{-1} \tau_{ni} \right| \leq 3\delta^{-3} m_2^{-2} \sum |\mathbf{E} \xi_i^*| \mathbf{D} \eta_i \\ & \quad + \delta^{-1} \alpha(n) \sum |\mathbf{E} \xi_i^*| \equiv \rho_2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Действительно,

$$1 + \zeta_{ni} = 1 + \zeta_n - \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} = (1 + \zeta_n) \left(1 - \frac{\bar{\eta}_i}{m_2(1 + \zeta_n)} \right).$$

С учетом (7.2) выводим:

$$\left| \sum \mathbf{E} \xi_i^* \mathbf{E} (1 + \zeta_{ni})^{-1} \tau_{ni} - \sum \mathbf{E} \xi_i^* \mathbf{E} (1 + \zeta_n)^{-1} \tau_{ni} - \sum \mathbf{E} \xi_i^* \mathbf{E} \frac{\bar{\eta}_i \tau_{ni}}{(1 + \zeta_n)^2 m_2} \right| \leq \delta^{-3} m_2^{-2} \sum |\mathbf{E} \xi_i^*| D \eta_i. \quad (7.5)$$

Далее, заметим, что

$$\tau_n \equiv 1\{T_n > m^+\} = \tau_{ni} + 1\{T_{ni} \leq m^+ < T_n\}.$$

Отсюда и из приводимой ниже леммы 7.2 вытекает оценка

$$|\mathbf{E} (1 + \zeta_n)^{-1} \tau_{ni} - \mathbf{E} (1 + \zeta_n)^{-1} \tau_n| \leq \delta^{-1} \alpha(n). \quad (7.6)$$

Учитывая, что

$$(1+x)^{-2} = 1 - x(1+x)^{-1} - x(1+x)^{-2} \quad \text{и} \quad 1 + \zeta_n = 1 + \zeta_{ni} + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2},$$

закключаем, что

$$\tau_{ni} |(1 + \zeta_n)^{-2} - (1 + \zeta_{ni})^{-2}| \leq 2\delta^{-3} \left| \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right|. \quad (7.7)$$

Из (7.5)–(7.7) и тождества $\sum \mathbf{E} \xi_i^* = \sum \mathbf{E} \xi_i^* \mathbf{E} (1 + \zeta_n)^{-1} \tau_n = 0$ выводим (7.4).

Вследствие приводимой ниже леммы 7.2 справедлива оценка

$$\left| \sum \mathbf{E} \xi_i^* \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-1} \tau_{ni}^* \right| \leq m_2 \alpha(n) \sum \mathbf{E} \left| \frac{\xi_i^*}{\eta_i} \right| \equiv \rho_3. \quad (7.8)$$

Ввиду неравенства $|\zeta_{ni}| \tau_{ni}^* \leq \tau_{ni}^*$ и леммы 7.2 имеем:

$$|\mathbf{E} \zeta_{ni} \tau_{ni}| \leq \alpha(n).$$

Заметим, что $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 2x^2(1+x)^{-1} + x^2(1+x)^{-2}$. Следовательно,

$$|\mathbf{E} (1 + \zeta_{ni})^{-2} \tau_{ni} - 1| \leq 3\alpha(n) + 3 \left(\frac{\sigma_2}{m^+} \right)^2 \equiv \rho^*(n). \quad (7.9)$$

Пусть

$$\rho_4 = \rho^*(n) \frac{\sum |\mathbf{E} \xi_i^* \bar{\eta}_i|}{m_2}. \quad (7.10)$$

Из (7.1)–(7.4), (7.8)–(7.10) вытекает утверждение теоремы 2.3.

Доказательство теоремы 2.4. Положим

$$T_{nij} = T_n - \eta_i - \eta_j 1\{i \neq j\}, \quad \zeta_{nij} = \frac{\bar{T}_{nij}}{m_2}, \quad \tau_{nij} = 1\{T_{nij} > m^+\}. \quad (7.11)$$

Таким образом, $\tau_{nij} = \tau_{ni}$ при $i = j$. Доказательство опирается на тождество

$$\begin{aligned} (m_2 Z_n - m_1)^2 &\equiv \left(\frac{m_2 S_n^*}{T_n} \right)^2 = \sum_i (\xi_i^*)^2 \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-2} \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \xi_i^* \xi_j^* (1 + \zeta_n)^{-2}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Рассмотрим сумму

$$\sum \mathbf{E}(\bar{\xi}_i^*)^2 \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-2} \tau_{ni} + \sum_{i \neq j} \mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \bar{\xi}_j^* (1 + \zeta_n)^{-2} \tau_{nij}. \quad (7.13)$$

Заметим, что при $i \neq j$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &\equiv \mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \bar{\xi}_j^* \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i + \bar{\eta}_j}{m_2} + \zeta_{nij} \right)^{-2} \tau_{nij} \\ &= -2 \mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \bar{\xi}_j^* \bar{\eta}_j \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i + \theta_j \bar{\eta}_j}{m_2} + \zeta_{nij} \right)^{-3} \frac{\tau_{nij}}{m_2} \\ &= 6 \mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i \bar{\xi}_j^* \bar{\eta}_j \left(1 + \frac{\theta_i \bar{\eta}_i + \theta_j \bar{\eta}_j}{m_2} + \zeta_{nij} \right)^{-4} \frac{\tau_{nij}}{m_2^2}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

где каждая из случайных величин θ_j независима от всех прочих случайных величин и имеет равномерное распределение на $[0, 1]$. Поэтому

$$\sum_{i \neq j} |\lambda_{ij}| \leq 6\delta^{-4} m_2^{-2} \left(\sum \mathbf{E} |\bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i| \right)^2 \equiv R_1. \quad (7.15)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} &\left| \sum \left\{ \mathbf{E}(\bar{\xi}_i^*)^2 \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-2} \tau_{ni} - (\mathbf{D} \xi_i^*) \mathbf{E}(1 + \zeta_n)^{-2} \tau_{ni} \right\} \right| \\ &\leq 2\delta^{-3} \sum \mathbf{E}(\bar{\xi}_i^*)^2 \left| \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right| \equiv R_2. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Из (7.9) и (7.16) выводим:

$$\begin{aligned} &\left| \sum \left\{ \mathbf{E}(\bar{\xi}_i^*)^2 \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-2} \tau_{ni} - \mathbf{D} \xi_i^* \right\} \right| \leq R_2(n) + \rho^*(n) \sigma_1^2 \\ &\equiv R_2 + R_3. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Ввиду леммы 7.2,

$$\left| \sum \mathbf{E}(\xi_i^*)^2 \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-2} \tau_{ni}^* + \sum_{i \neq j} \mathbf{E} \xi_i^* \xi_j^* (1 + \zeta_n)^{-2} \tau_{nij}^* \right|$$

$$\leq m_2^2 \alpha(n) \left(\left(\sum_i \mathbf{E} \left| \frac{\xi_i^*}{\eta_{(i)}} \right| \right)^2 + \sum_i \sum_j^* \mathbf{E} |\xi_i^* \xi_j^*| \eta_{ij}^{-2} \right) \equiv R_5, \quad (7.18)$$

где суммирование под знаком $\sum_j^*$ ведется по множеству $\{j: A_j \cap A_i \neq \emptyset\}$. Объединяя (7.12)–(7.18) и учитывая приводимую ниже лемму 7.1, получим (2.6).

Теорема 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.5 использует тот факт, что $\mathbf{E} \bar{\xi}_i^* = 0$ ($i \geq 1$). Вследствие (7.14),

$$\begin{aligned} & \sum_{i \neq j} \left| \lambda_{ij} - 6m_2^{-2} \mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i \mathbf{E} \bar{\xi}_j^* \bar{\eta}_j \mathbf{E} (1 + \zeta_{nij})^{-4} \tau_{nij} \right| \\ & \leq 24m_2^{-3} \delta^{-5} \left(\sum_i \mathbf{E} |\bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i| \right) \left(\sum_j \mathbf{E} |\bar{\xi}_j^* (\bar{\eta}_j)^2| \right) \equiv R_6. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Отметим, что $\mathbf{E} \zeta_{nij} = 0$ и

$$\begin{aligned} (1+x)^{-4} - 1 + 4x &= x^2 \{ (1+x)^{-4} + 2(1+x)^{-3} + 3(1+x)^{-2} \\ & \quad + 4(1+x)^{-1} \} \end{aligned} \quad (7.20)$$

при $x > -1$. С учетом (7.20) и леммы 7.2 имеем:

$$|\mathbf{E} (1 + \zeta_{nij})^{-4} \tau_{nij} - 1| \leq 5\alpha(n) + 10\delta^{-4} \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right)^2 \equiv R_7^*, \quad (7.9^*)$$

где $R_7^* \equiv R_7^*(n)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} - 6m_2^{-2} \left(\sum_i \mathbf{E} \xi_i^* \bar{\eta}_i \right)^2 \right| \leq R_6 + 6m_2^{-2} \left(\sum_i |\mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i| \right)^2 R_7^* \\ & \quad + 6m_2^{-2} \sum_i (\mathbf{E} \bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i)^2 \equiv R_6 + R_7. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (7.13). Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} & \sum \left(\mathbf{E} (\bar{\xi}_i^*)^2 \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-2} \tau_{ni} - (\mathbf{D} \xi_i^*) \mathbf{E} (1 + \zeta_{ni})^{-2} \tau_{ni} \right. \\ & \quad \left. + 2\mathbf{E} (\bar{\xi}_i^*)^2 \left(\frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right) \mathbf{E} (1 + \zeta_{ni})^{-3} \tau_{ni} \right) \\ & = 3 \sum \mathbf{E} \left(\frac{\bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i}{m_2} \right)^2 \left(1 + \frac{\theta'_i \bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-4} \tau_{ni} \\ & \leq 3\delta^{-4} \sum \mathbf{E} \left(\frac{\bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i}{m_2} \right)^2 \equiv R_8 \end{aligned} \quad (7.22)$$

и

$$|\mathbf{E}(1 + \zeta_{ni})^{-3} \tau_{ni} - 1| \leq 4\alpha(n) + 6\delta^{-3} \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right)^2 \equiv \rho_1^* \quad (7.23)$$

(ср. с (7.9*)). Аналогично убеждаемся, что

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}(1 + \zeta_{ni})^{-2} \tau_{ni} - \left\{ 1 + 3 \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right)^2 \right\} \right| \leq 10 \alpha(n) \\ & + 3 \mathbf{E} \left(\frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right)^2 + 4 m_2^{-3} \sum |\mathbf{E}(\bar{\eta}_i)^3| \\ & + 5 \delta^{-6} m_2^{-4} \left\{ 3 \sigma_2^4 + \sum \mathbf{E}(\bar{\eta}_j)^4 \right\} \equiv R_9(n, i). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Положим

$$R_9 = \sum_i R_9(n, i) \mathbf{D} \xi_i^*, \quad R_{10} = 2 \sum_i \mathbf{E} \left| (\bar{\xi}_i^*)^2 \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right| \rho_1^*. \quad (7.25)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_i \left| \mathbf{E}(\bar{\xi}_i^*)^2 \left(1 + \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} + \zeta_{ni} \right)^{-2} \tau_{ni} - (\mathbf{D} \xi_i^*) \left\{ 1 + 3 \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + 2 \mathbf{E}(\bar{\xi}_i^*)^2 \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right| \leq R_8 + R_9 + R_{10}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Объединяя (7.13), (7.18), (7.21)–(7.26) и учитывая (7.12) и приводимую ниже лемму 7.1, получим (2.6*).

Теорема 2.5 доказана.

Лемма 7.1. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i,j} \mathbf{E} \{ \xi_i^* \xi_j^* - \bar{\xi}_i^* \bar{\xi}_j^* \} (1 + \zeta_n)^{-2} \tau_{nij} \right| \\ & \leq \delta^{-2} \alpha(n) \sum |\mathbf{E} \xi_j^*| \sum \mathbf{E} |2 \xi_i^* - \mathbf{E} \xi_i^*| \equiv R_4(n). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Доказательство леммы 7.1. Воспользуемся тем фактом, что

$$\sum \xi_i^* = \sum \bar{\xi}_i^*.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \xi_i^* \xi_j^* \tau_{nij} &= \sum_{i,j} \xi_i^* \xi_j^* (\tau_{nij} - \tau_n) + \sum_{i,j} \bar{\xi}_i^* \bar{\xi}_j^* \tau_n \\ &= \sum_{i,j} \bar{\xi}_i^* \bar{\xi}_j^* \tau_{nij} + \sum_{i,j} \{ \xi_i^* \xi_j^* - \bar{\xi}_i^* \bar{\xi}_j^* \} (\tau_{nij} - \tau_n) \\ &= \sum_{i,j} \bar{\xi}_i^* \bar{\xi}_j^* \tau_{nij} + \sum_{i,j} (\tau_{nij} - \tau_n) \{ 2 \xi_i^* - \mathbf{E} \xi_i^* \} \mathbf{E} \xi_j^*. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Из (7.28), (7.30) и равенства

$$\tau_{nij} = \tau_n - 1\{T_{nij} \leq m^+ < T_n\}$$

следует (7.27).

Лемма 7.1 доказана.

Положим

$$\begin{aligned} K \equiv K(n) &= \sum \frac{E\eta_i^2}{m^+}, \quad \eta_i^* = \eta_i 1\{\eta_i \leq K\}, \\ \hat{T}_{nij} &= \sum_{k \notin A(i,j)} \eta_k, \quad T_{nij}^* = \sum_{k \notin A(i,j)} \eta_k^*. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Лемма 7.2. Для любых $i, j \in J_n$

$$P\{\hat{T}_{nij} \leq m^+\} \leq \exp \left\{ -\frac{(m^+)^2}{8 \sum E\eta_i^2} \right\} \equiv \alpha(n). \quad (7.30)$$

Доказательство леммы 7.2. Заметим, что

$$\min_{i,j \in J_n} ET_{nij} = 3m^+, \quad \min_{i,j \in J_n} ET_{nij}^* \geq 2m^+.$$

Последнее неравенство справедливо ввиду следующей оценки:

$$\sum E\eta_i 1\{\eta_i > K\} \leq \sum \frac{E\eta_i^2}{K} = m^+.$$

Поэтому

$$\{\hat{T}_{nij} \leq m^+\} \subset \{T_{nij}^* \leq m^+\} \subset \{T_{nij}^* - ET_{nij}^* \leq -m^+\}. \quad (7.31)$$

Легко видеть, что

$$DT_{nij}^* \leq \sum E(\eta_i^*)^2 \leq Km^+.$$

Применяя неравенство Бернштейна (см. [38, гл. 3, теорема 18]) к вероятностям событий в правой части (7.31), получим (7.30).

Лемма 7.2 доказана.

Доказательства следствий раздела 2 опускаются ввиду простоты. Достигнутое в них ослабление моментных условий по сравнению с соответствующими результатами [4] объясняется тем, что в настоящей работе мы раскладываем $(1 + \zeta_n)^{-r}$ в ряд Тейлора по степеням $\bar{\eta}_i/m_2$, а не по степеням ζ_{ni} .

Автор благодарен рецензенту за многочисленные замечания, позволившие улучшить изложение и устранить ряд неточностей, присутствовавших в первоначальном варианте статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Uspensky J. V.* Problem № 3408. — Amer. Math. Monthly, 1932, v. 39, № 1, p. 176–177.
2. *Kimball B. F.* Problem № 3460. — Amer. Math. Monthly, 1930, v. 37, p. 508.
3. *Stoyanov Y.* Probabilistic proof of the convergence of a class of n -fold integrals. — Glasnic Math., Ser. III, 1986, v. 21, № 1, p. 101–114.
4. *Новак С. Ю., Утев С. А.* Об асимптотике распределения отношения сумм случайных величин. — Сиб. матем. ж., 1990, т. 31, № 5, с. 92–101.
5. *Надарая Э. А.* Об оценке регрессии. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. IX, в. 1, с. 157–159.
6. *Watson G. S.* Smooth regression analysis. — Sankhyā, Ser. A, 1964, v. 26, p. 359–372.
7. *Hsing T.* Estimating the parameters of rare events. — Stochastic Processes Appl., 1991, v. 37, № 1, p. 117–139.
8. *Smith R. L., Weissman I.* Estimating the extremal index. — J. R. Statist. Soc. B, 1994, v. 56, № 3, p. 515–528.
9. *Deheuvels P.* Conditions nécessaires et suffisantes de convergence ponctuelle presque sûre et uniforme presque sûre des estimateurs de la densité. — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 1974, v. 278, p. 1217–1220.
10. *Wolverton C. T., Wagner T. I.* Asymptotically optimal discriminant functions for pattern classification. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1969, v. 15, p. 258–266.
11. *Paditz L.* On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. — Statistics, 1989, v. 20, № 3, p. 453–464.
12. *Жуганов И. С.* Об уточнении верхней константы в остаточном члене ЦПТ. — В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
13. *Collomb G.* Quelques propriétés de la méthode du noyau pour l'estimation non paramétrique de la régression en un point fixé. — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 1977, v. 285, № 4, p. 289–292.
14. *Devroye L.* Necessary and sufficient conditions for the pointwise convergence of nearest neighbour regression function estimates. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1982, B. 61, H. 4, S. 467–481.
15. *Noda K.* Estimation of a regression function by Parzen kernel-type density estimators. — Ann. Inst. Statist. Math., 1976, v. 28, № 2, p. 221–234.
16. *Parzen E.* On estimation of a probability density function and mode. — Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, № 3, p. 1065–1076.
17. *Roussas G. G.* Nonparametric regression estimation under mixing condition. — Stoch. Process. Appl., 1990, v. 36, № 1, p. 107–116.
18. *Schuster E. F., Yakowitz S.* Contributions to the theory of nonparametric regression with application to system identification. — Ann. Statist., 1979, v. 7, № 1, p. 139–149.
19. *Rosenblatt M.* Remarks on some nonparametric estimates of a density. — Ann. Math. Statist., 1956, v. 27, p. 832–835.
20. *Алексеев В. Г.* Некоторые вопросы статистического оценивания кривой регрессии. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 2, с. 209–216.
21. *Hill B. M.* A simple general approach to inference about the tail of a distribution. — Ann. Statist., 1975, v. 3, № 5, p. 1163–1174.
22. *Haeusler E., Teugels J. L.* On asymptotic normality of Hill's estimator for the exponent of regular variation. — Ann. Statist., 1985, v. 13, № 2, p. 743–756.
23. *Csörgő S., Deheuvels P., Mason D. M.* Kernel estimates of the tail index of the distribution. — Ann. Statist., 1985, v. 13, № 3, p. 1050–1077.
24. *Csörgő M., Horváth L., Révész P.* On the optimality of estimating the tail index and a naive estimator. — Austral. J. Math., 1987, v. 29, № 2, p. 166–178.

25. *Davis R., Resnick S.* Tail estimates motivated by extreme value theory. — *Ann. Statist.*, 1984, v. 12, № 4, p. 1476–1487.
26. *Smith R. L.* Estimating tails of probability distributions. — *Ann. Statist.*, 1987, v. 15, № 3, p. 1174–1207.
27. *Bacro J. N., Brito M.* Weak limiting behaviour of a simple tail Pareto-index estimator. — *J. Statist. Plan. Infer.*, 1995, v. 45, p. 7–19.
28. *Novak S. Yu.* Inference about the Pareto-type distribution. — In: *Trans. 11th Prague Conf. Inform. Theory Statist. Decision Func. Random Processes*. Prague: Academia, 1992, v. B, p. 251–258.
29. *Falk M.* Extreme quantile estimation in δ -neighbourhoods of generalized Pareto distribution. — *Statist. Probab. Lett.*, 1994, v. 20, № 1, p. 9–21.
30. *Teugels J. L.* On Pareto-type distributions. — В сб.: Четвертая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Т. IV. Вильнюс: Ин-т матем. и кибернет. АН Лит. ССР, 1985, с. 302–304.
31. *Dekkers A. L. M., Einmahl J. H. J., de Haan L.* A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. — *Ann. Statist.*, 1989, v. 17, № 4, p. 1833–1855.
32. *Resnick S., Starica C.* Smoothing the Hill estimator. — Technical Report, School of Operations Research and Industrial Eng., Cornell Univ., 1995.
33. *Mason D. M.* Laws of large numbers for sums of extreme values. — *Ann. Probab.*, 1982, v. 10, № 3, p. 754–764.
34. *Deheuvels P., Haeusler E., Mason D. M.* Almost sure convergence of the Hill estimator. — *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1988, v. 104, № 2, p. 371–381.
35. *Dekkers A. L. M., de Haan L.* On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. — *Ann. Statist.*, 1989, v. 17, № 4, p. 1795–1832.
36. *Hall P.* On some simple estimates of an exponent of regular variation. — *J. Roy. Statist. Soc. B*, 1982, v. 44, p. 37–42.
37. *Hall P., Teugels J. L., Vanmarcke A.* The abscissa of convergence of Laplace transforms. — *J. Appl. Probab.*, 1992, v. 29, № 2, p. 353–362.
38. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
39. *Seneta E.* Regularly varying functions. (Lecture Notes Math. V. 508.) Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1976, 112 p.
40. *Rice J., Rosenblatt M.* Estimation of the log survivor function and hazard estimation. — *Sankhyā, Ser. A*, 1976, v. 38, № 1, p. 60–78.
41. *Singpurwalla N. D., Wong M.-Y.* Kernel estimators of the failure-rate function and density estimation: an analogy. — *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1983, v. 78, № 382, p. 478–481.
42. *Watson G. S., Leadbetter M. R.* Hazard analysis. I. — *Biometrika*, 1964, v. 51, p. 175–184.
43. *Sethuraman J., Singpurwalla N. D.* Large sample estimates and uniform confidence bounds for the failure-rate function based on a naive estimator. — *Ann. Statist.*, 1981, v. 9, № 3, p. 628–632.

Поступила в редакцию
26.VIII.1993