Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Салихов, Оценка функции концентрации методом Эссеена, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 561–577

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:42:53

© 1996 г.

САЛИХОВ Н. П.*

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ
МЕТОДОМ ЭССЕЕНА

В работе используется метод Эссеена получения верхних оценок функции концентрации случайной величины X в терминах характеристической функции величины X . Решены некоторые задачи параметрической оптимизации таких оценок. Указаны применения к оценке вероятностей больших отклонений независимых одинаково распределенных случайных величин.

Ключевые слова и фразы: функция концентрации, характеристическая функция, вероятности больших отклонений, формула суммирования Пуассона, неравенство Эссеена, числа Эйлера.

1. Введение. Пусть случайная величина X имеет характеристическую функцию $f(t)$ и функцию концентрации $Q(X; \lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}} \mathbf{P}\{x \leq X \leq x + \lambda\}$, $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$. Известны верхние оценки для $Q(X; \lambda)$ в терминах $f(t)$. Так, если $f(t)$ абсолютно интегрируема на $\mathbf{R}$, то при $\lambda > 0$

$$Q(X; \lambda) \leq c\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \frac{\sin(t\lambda/2)}{t\lambda/2} \right| dt \leq c\lambda \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad (1)$$

где $c = 1/(2\pi)$. Эта оценка следует из формулы обращения (см. [1, с. 51]). При $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$Q(X; \lambda) \leq \lambda c(\tau) \int_{-2\tau/\lambda}^{2\tau/\lambda} |f(t)| dt, \quad (2)$$

в котором $c(\tau)$ зависит от положительного параметра τ . При

$$c(\tau) = \left(2\tau \left(\frac{\sin(\tau/2)}{\tau/2} \right)^2 \right)^{-1}, \quad 0 < \tau < 2\pi,$$

неравенство (2) доказано в [2]. Метод работы [2] был обобщен в [3, с. 52–54], [4], [5, с. 56–60]. Заметим, что в оценках (1), (2) константы $c, c(\tau)$

*ФАПСИ, Б. Кисельный пер., 4, 103031 Москва, Россия.

не могут быть меньше $1/(2\pi)$, поскольку для величины X с плотностью распределения

$$p_1(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2$$

и характеристической функцией $h_1(t) = \max(1-|t|, 0)$ (см. [5, с. 58–59], [6, с. 385]), например, из (2) следует, что при любом допустимом $\tau \in (0, \infty)$ и при любом $\lambda \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(\lambda/4)}{\lambda/4} \right)^2 &\leq \lambda^{-1} \mathbf{P} \left\{ -\frac{\lambda}{2} \leq X \leq \frac{\lambda}{2} \right\} \leq \lambda^{-1} Q(X; \lambda) \\ &\leq c(\tau) \int_{-1}^1 (1-|t|) dt = c(\tau). \end{aligned}$$

Нашей целью будет поиск возможно меньшей константы $c(\tau)$ в оценке (2). Верхнюю оценку функции концентрации мы используем в п. 5 для оценивания сверху вероятности больших отклонений суммы независимых одинаково распределенных случайных величин вместо обычно используемого неравенства Берри–Эссеена ([7, с. 615–618]).

2. Некоторые множества плотностей распределения. Для получения оценки (2) в [3, с. 52–54], [4], [5, с. 56–60] используются плотности $p(x)$ из множества

$$\begin{aligned} \Pi = \left\{ p(x): p(0) > 0, p(x) = p(-x) \text{ для всех } x > 0, \right. \\ \left. h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx = 0 \text{ при } |t| \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\Pi_0 = \left\{ p(x): p(x) \in \Pi, h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx \text{ не возрастает на } (0, 1) \right\}.$$

Если случайные величины $Y_1, Y_2, \dots$ независимы и имеют плотности распределения $q_1(x), q_2(x), \dots$ из Π (Π_0), то плотность

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(x), \quad \text{где все } c_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1,$$

а также плотность распределения суммы $Y_1 + \dots + Y_n$ при любом $n \geq 1$ принадлежат Π (Π_0).

Теорема 1. Множество Π_1 функций

$$p_k(x) = \frac{1}{2\pi a_k} \left(\frac{\sin(x/(2k))}{x/(2k)} \right)^{2k},$$

где

$$a_k = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \left(\sin \frac{x}{x} \right)^{2k} dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

является подмножеством множества Π_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $p_k(x)$ — плотность симметричного распределения, $p_k(0) > 0$. Применяя метод из [8, с. 96–97] и используя теорему 1а из [7, с. 41–42], можно получить следующие формулы для характеристической функции:

$$h_k(t) = 2 \int_0^\infty p_k(x) \cos(tx) dx: \quad h_k(t) = 0, \quad \text{если } |t| \geq 1,$$

$$h_k(t) = \frac{H_k(t)}{H_k(0)}, \quad \text{если } |t| \leq 1,$$

где

$$H_k(t) = \sum_{i=0}^{[(1-t)k]} (-1)^i C_{2k}^i (k(1-t) - i)^{2k-1}$$

$$= (2k-1)! \frac{d}{dx} P\{Z \leq x\} \Big|_{x=-kt},$$

Z — сумма $2k$ независимых равномерно распределенных на $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ случайных величин. По теореме 4.5.5 из [1, с. 125] (см. также [7, с. 197]) распределение величины Z является одновершинным с вершиной в 0, следовательно (см. теорему 2 из [7, с. 183]), $h_k(t)$ не возрастает на $(0, 1)$.

Введем также множество

$$L(\Pi_1) = \left\{ p(x): p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_k(x), \text{ все } c_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 \right\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Известно ([9, с. 408], [10, с. 642]), что

$$a_k = 2k^2 \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{(k-i)^{2k-1}}{i!(2k-i)!} = \frac{2k^2}{(2k)!} H_k(0). \quad (3)$$

Приведем значения первых чисел a_k :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{33}{20}, \quad a_4 = \frac{604}{315}, \quad a_5 = \frac{78095}{36316}.$$

З а м е ч а н и е 2. Так как $H_k(t)$ не возрастает на $[0, 1]$, то

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i C_{2k}^i (k(1-t) - i)^{2k-2} \geq 0$$

для $t \in \Delta_r = ((k-r-1)/k, (k-r)/k]$, $r = 0, \dots, k-1$. Таким образом, верны неравенства

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i C_{2k}^i (r-i+y)^{2k-2} \geq 0 \quad (4)$$

для $y \in [0, 1)$, $r = 0, \dots, k-1$. Положим

$$A_{n,r}(y) = \sum_{i=0}^r (-1)^i C_{n+1}^i (r-i+y)^n$$

для $y \in [0, 1)$, $r = 0, 1, \dots, n$. Заметим, что $A_{n,r}(0) = A_{n,r}$ — число Эйлера ([11, с. 51–53]).

Из определения величин $A_{n,r}(y)$ следуют равенства:

$$A_{n,r}(y) - A_{n,r-1}(y) = \sum_{i=0}^r (-1)^i C_{n+2}^i (r-i+y)^n,$$

$$A_{n,r}(y) = (r+y) A_{n-1,r}(y) + (n-r+1-y) A_{n-1,r-1}(y)$$

для $y \in [0, 1)$, $r = 0, 1, \dots, n$. (Последнее рекуррентное соотношение используется при натуральном y в [12, с. 253].) Отсюда и из неравенств (4) следует, что $A_{2k-2,r}(y) \geq A_{2k-2,r-1}(y)$, если $r = 0, 1, \dots, k-1$, $y \in [0, 1)$. Для чисел Эйлера неравенства $A_{n,r} > A_{n,r-1}$ при $n \geq 2$, $1 \leq r < 1 + n/2$ можно доказать методом индукции по n , используя равенства: $A_{n,r} = r A_{n-1,r} + (n-r+1) A_{n-1,r-1}$, $A_{n,r} = A_{n,n-r+1}$ при $r = 1, \dots, n$ ([11, с. 51–53]).

З а м е ч а н и е 3. Пусть Π^P — множество плотностей, которым соответствует характеристическая функция из класса Пойа, состоящего из всех характеристических функций, принимающих только действительные значения и выпуклых на $[0, \infty)$ (см. [1, с. 108–109] или [7, с. 570]). Так как характеристическая функция из класса Пойа не возрастает при $t > 0$ (см. [1, с. 109]), то $\Pi \cap \Pi^P \subset \Pi_0$. Плотность $p_2(x) \notin \Pi^P$, так как $h_2''(t) < 0$ для $t \in (0, \frac{1}{3})$.

З а м е ч а н и е 4. Плотности из Π_1 использовались, например, в [1, с. 111, 397], [3, с. 52–54], [4], [5, с. 58, 59, 150], [7, с. 601, 707], [8, с. 96–98].

3. Оценки функции концентрации. Результаты работ [3, с. 52–54], [4] (см. также леммы 3, 4 в [5, с. 56–58]) можно представить следующим образом. Пусть $p(x) \in \Pi$, $h(t)$ — соответствующая характеристическая функция, $\lambda > 0$, $\beta > 0$, $\tau \geq \lambda/(2\beta)$, $c = \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) > 0$. Тогда

$$Q(X; \lambda) \leq \frac{\beta}{2\pi c} \int_{-1/\beta}^{1/\beta} |f(t) h(\beta t)| dt.$$

При фиксированных положительных λ, β в последней оценке оптимальным является выбор $\tau = \lambda/(2\beta)$; в этом случае (с использованием замены $\beta = \lambda/(2\tau)$) из нее получим оценки

$$Q(X; \lambda) \leq \lambda \left(4\pi\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) \right)^{-1} \int_{-2\tau/\lambda}^{2\tau/\lambda} \left| f(t) h\left(\frac{\lambda t}{2\tau}\right) \right| dt, \quad (5)$$

$$Q(X; \lambda) \leq \lambda \left(4\pi\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) \right)^{-1} \int_{-2\tau/\lambda}^{2\tau/\lambda} |f(t)| dt, \quad (6)$$

если $\lambda > 0$, $\tau > 0$, $\min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) > 0$. При $p(x) = p_1(x)$ неравенство (6) совпадает с оценкой Эссеена ([2], см. также формулу (2) настоящей работы).

Полагая в (5) $\lambda = 2\tau\beta$, $\tau > 0$, $\beta > 0$ и затем устремляя τ к 0, получаем

$$\begin{aligned} Q(X; 0) &\leq (2\pi p(0))^{-1} \beta \int_{-1/\beta}^{1/\beta} |f(t) h(\beta t)| dt \\ &\leq (2\pi p(0))^{-1} \beta \int_{-1/\beta}^{1/\beta} |f(t)| dt \end{aligned} \quad (7)$$

при любых $\beta > 0$, $p(x) \in \Pi$.

Для любой непрерывной на $\mathbf{R}$ плотности $p(x)$ определим функционал $z = z(p)$:

$$z = \inf \left\{ r: \sup_{\tau > 0} \left(\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) \right) = r \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) \right\}.$$

Ясно, что $z > 0$, если $p(0) > 0$, и что $z < \infty$, поскольку

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) = 0$$

для любой интегрируемой неотрицательной на $(0, \infty)$ функции $p(x)$. Если $p(0) > 0$ и y — минимальный положительный корень уравнения $p(x) = 0$, то $z \in (0, y)$. Правые части в (5) при $p(x) \in \Pi_0$ и в (6) при $p(x) \in \Pi$ возрастают по τ при $\tau \geq z$ и поэтому их минимальные значения достигаются на полуинтервале $(0, z]$.

Из (5) можно получить более точную, чем (6), оценку. Для этого достаточно разбить отрезок интегрирования на несколько отрезков и заменить величину $|h(\lambda t/(2\tau))|$ ее максимальным значением на каждом таком отрезке.

В частности, при $p(x) = p_k(x)$, $h(t) = h_k(t)$, $k \geq 2$, используя монотонность функции $h_k(t)$, получаем, что при $1 - (m+1)/k < t \leq 1 - m/k$, $m \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

$$h_k(t) \leq h_k\left(1 - \frac{m+1}{k}\right)$$

$$= (H_k(0))^{-1} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_{2k}^i (m+1-i)^{2k-1} = \frac{A_{2k-1, m+1}}{A_{2k-1, k}}.$$

Отсюда, из оценки (5) и равенств (3) и $H_k(0) = A_{2k-1, k}$ следует, что

$$\begin{aligned} Q(X; \lambda) &\leq \frac{\lambda}{4\pi\tau p_k(\tau)} \sum_{m=1}^k \frac{A_{2k-1, k+1-m}}{A_{2k-1, k}} \int_{m-1 < \frac{|t|k\lambda}{2\tau} \leq m} |f(t)| dt \\ &= \left(\frac{\tau/(2k)}{\sin(\tau/(2k))} \right)^{2k} \frac{2k^2}{(2k)!} \sum_{m=1}^k B_{k,m} \int_{0 \leq |u| \leq m/k} \left| f\left(\frac{2\tau u}{\lambda}\right) \right| du, \quad (8) \end{aligned}$$

где $B_{k,m} = A_{2k-1, k+1-m} - A_{2k-1, k-m} > 0$ для $m = 1, \dots, k$, $\lambda > 0$, $0 < \tau < 2k\pi$.

4. Оптимизация оценок функции концентрации. Множитель $(4\pi\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x))^{-1}$ в оценках (5), (6), (8) можно уменьшать за счет выбора плотности $p(x)$.

Пусть A — некоторое множество плотностей $p(x)$. Положим

$$T(A) = (4\pi)^{-1} \inf_{p(x) \in A} \inf_{\tau > 0} \left(\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) \right)^{-1}.$$

Ясно, что $T(\Pi) \geq 1/(2\pi)$ (см. замечание об оценке (2) во введении). Удалось найти лишь $T(L(\Pi_1))$ и оценить снизу $T(\Pi_0)$.

Теорема 2. При фиксированном $\beta > 0$ минимальное по $p(x) \in \Pi$ значение правой части оценки (7) достигается при $p(x) = p_1(x)$; в этом случае (7) принимает вид

$$Q(X; 0) \leq \beta \int_{-1/\beta}^{1/\beta} |f(t)| dt. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть $p(x) \in \Pi$, $h(t)$ — соответствующая характеристическая функция. Из формулы суммирования Пуассона ([7, с. 705]) с учетом четности функции $p(x)$ следует, что

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(\pi n) \\ &= \pi \left(p(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p(2n\pi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p((2n-1)\pi) \right), \\ h(1) + h(-1) &= 0 = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(\pi n) \cos(\pi n) \\ &= \pi \left(p(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p(2n\pi) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} p((2n-1)\pi) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства

$$p(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p(2n\pi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} p((2n-1)\pi) = \frac{1}{2\pi}.$$

Значит, $2\pi p(0) \leq 1$ для любой $p(x) \in \Pi$ и правая часть оценки (7) всегда не меньше $\beta \int_{-1/\beta}^{1/\beta} |f(t)| dt$.

З а м е ч а н и е 5. Оценка (9) лучше оценки (1.13) из [5, с. 60].

Теорема 3. Верна оценка $T(\Pi_0) \geq 1/\pi = 0,3183\dots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p(x) \in \Pi_0$, $h(t)$ — соответствующая характеристическая функция. Из формулы суммирования Пуассона получаем:

$$\frac{\pi}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) \exp\left\{\frac{in\pi y}{\lambda}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(y + 2k\lambda) \quad (10)$$

при любых $y \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$. Полагая $y = 0$, $y = \lambda$ и используя четность функций $p(x)$, $h(t)$, найдем из (10):

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} \left(p(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p\left(\frac{(2n-1)\pi}{\lambda}\right) \right) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} h(2k\lambda), \\ \frac{\pi}{\lambda} \left(p(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} p\left(\frac{(2n-1)\pi}{\lambda}\right) \right) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} h((2k-1)\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{4\pi}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} p\left(\frac{(2n-1)\pi}{\lambda}\right) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (h((2k-1)\lambda) - h(2k\lambda)),$$

из которого, учитывая монотонность $h(t)$, получим неравенство $(4\pi/\lambda) \times p(\pi/\lambda) \leq 1$. Таким образом, $\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) \leq \tau p(\tau) \leq \frac{1}{4}$ при любом $\tau > 0$. Отсюда следует оценка $T(\Pi_0) \geq 1/\pi$.

Теорема 4. Верны оценки

$$T(L(\Pi_1)) = T(\Pi_1) = \frac{1}{4\pi} \inf_{\tau > 0} \left(\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p_2(x) \right)^{-1} = 0,3212\dots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем значение $z_k = z(p_k)$, где z — функционал, определенный в п. 3. Минимальный положительный корень уравнения $p_k(x) = 0$ равен $2\pi k$. На отрезке $[0, 2\pi k]$ функция $p_k(x)$ убывает. Следовательно, $\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p_k(x) = \tau p_k(\tau)$ при любом $\tau \in [0, 2\pi k]$. Функция $x p_k(x)$ имеет на $[0, 2\pi k]$ единственный максимум в

точке $z_k = z(p_k) = 2k\theta_k$, где θ_k — единственный на $(0, \pi/2)$ корень уравнения $\operatorname{tg} x = 2k/(2k-1)x$. Имеем:

$$R_k = \frac{1}{4\pi} \inf_{\tau > 0} \left(\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p_k(x) \right)^{-1} = (4\pi z_k p_k(z_k))^{-1} = \frac{a_k}{4k\theta_k} \left(\frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \right)^{-2k}.$$

Используя равенство

$$(\cos \theta_k)^{-2} = 1 + (\operatorname{tg} \theta_k)^2 = 1 + \left(\frac{2k}{2k-1} \theta_k \right)^2,$$

найдем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \right)^{-2k} &= \left(\theta_k^2 + \left(1 - \frac{1}{2k} \right)^2 \right)^k, \\ R_k &= \frac{a_k}{4k} \theta_k^{-1} \left(\theta_k^2 + \left(1 - \frac{1}{2k} \right)^2 \right)^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом,

$$T(\Pi_1) = \inf_{k \geq 1} \frac{a_k}{4k} \theta_k^{-1} \left(\theta_k^2 + \left(1 - \frac{1}{2k} \right)^2 \right)^k.$$

Для дальнейшего доказательства найдем нижние оценки величин a_k, θ_k . Имеем: $\sin x \geq x - x^3/6 \geq 0$, если $x \geq 0$;

$$a_k > \frac{2k}{\pi} \int_0^{\sqrt{6}} \left(1 - \frac{x^2}{6} \right)^{2k} dx = \frac{2k\sqrt{6}}{\pi} \int_0^1 (1 - y^2)^{2k} dy = \frac{2k\sqrt{6}}{\pi} \frac{(4k)!!}{(4k+1)!!}$$

(см., например, [10, с. 136]). Так как

$$\frac{(4k)!!}{(4k+1)!!} = \frac{2^{4k+1}}{2k+1} (C_{4k+2}^{2k+1})^{-1}, \quad C_{2n}^n < \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

(см. [10, с. 146]), то

$$a_k > \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{k}{\sqrt{2k+1}}. \quad (12)$$

Докажем, что

$$\theta_k > \sqrt{\frac{6}{4k+1}}. \quad (13)$$

При $k = 1$ неравенство (13) проверяется вычислением ($\theta_1 = 1,1655... > \sqrt{6/5}$). При $k > 1$ заметим, что $\theta_k \leq \theta_2 = 0,8447... < 1$, и учтем оценки $\sin x < x - x^3/6 + x^5/120$, $\cos x > 1 - x^2/2 + x^4/24 - x^6/720 > 1 - x^2/2 + (1/24 - 1/720)x^4 > 0$ для всех $x \in (0, 1)$. Ясно, что θ_k больше минимального положительного корня уравнения

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{29x^4}{720} \right) \frac{2k}{2k-1} x,$$

т.е.

$$\theta_k^2 > \frac{30(4k+1)}{23k+3} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{5} \frac{23k+3}{(4k+1)^2}} \right) > \frac{6}{4k+1}$$

(используем оценку $\sqrt{1-x} < 1 - x/2$ при $x \in (0, 1)$).

Найдем теперь нижнюю оценку для R_k . Так как функция $x^{-1}(x^2 + (1 - 1/(2k))^2)^k$ монотонно возрастает при $x \geq \sqrt{6/(4k+1)}$, то с учетом (11), (12), (13) получим оценку

$$R_k > g_k = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{4k+1}{2k+1}} \left(1 + \frac{8k^2+1}{4k(4k+1)} \frac{1}{k} \right)^k.$$

Функция $(8x^2 + 1)/(4x(4x + 1))$ возрастает при $x \geq 2$. Следовательно, для всех натуральных k, m таких, что $k \geq m \geq 2$, верна оценка

$$g_k \geq g_{k,m} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{4k+1}{2k+1}} \left(1 + \frac{8m^2+1}{4m(4m+1)} \frac{1}{k} \right)^k,$$

правая часть которой возрастает по k при $k \geq 2$. Таким образом, $R_k > g_k \geq g_{k,m} \geq g_{m,m} = g_m$ при всех $k \geq m \geq 2$. Отсюда следует, что если при некотором натуральном $m \geq 2$ выполнено неравенство $g_m \geq \min_{1 \leq k \leq m-1} R_k$, то $\min_{k \geq 1} R_k = \min_{1 \leq k \leq m-1} R_k$. Вычисления показали, что $g_{20} = 0,3229 \dots$ (см. таблицу значений a_k, θ_k, R_k, g_k). Это с учетом значений R_k из таблицы дает равенство: $\min_{k \geq 1} R_k = R_2 = 0,3212 \dots < R_k$ при $k \neq 2$. Таким образом, $T(\Pi_1) = R_2 = 0,3212 \dots$.

Заметим теперь, что z_k является точкой глобального максимума функции $x p_k(x)$ на $[0, \infty)$. Это следует из того, что для $x = 2\pi k m + y$, $0 < y \leq 2\pi k$ и целых $m \geq 0$

$$\begin{aligned} x p_k(x) &= (2\pi a_k)^{-1} (2\pi k m + y) \left(\frac{\sin(y/(2k))}{(2\pi k m + y)/(2k)} \right)^{2k} \\ &\leq (2\pi a_k)^{-1} y \left(\frac{\sin(y/(2k))}{y/(2k)} \right)^{2k} \leq z_k p_k(z_k). \end{aligned}$$

Пусть $p(x) \in L(\Pi_1)$. Тогда при любом $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) &\leq \tau p(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau p_k(\tau) \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_k p_k(z_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k (4\pi R_k)^{-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k (4\pi R_2)^{-1} = (4\pi R_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(4\pi)^{-1} \inf_{\tau > 0} \left(\tau \min_{0 \leq x \leq \tau} p(x) \right)^{-1} \geq R_2$$

при любой $p(x) \in L(\Pi_1)$, т.е. $T(L(\Pi_1)) = R_2$.

5. Применение к суммам независимых случайных величин.

Применим оценку (6) в случае, когда $X = S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $Y_1, \dots, Y_n$ независимы, $EY_i = 0$ для $i = 1, \dots, n$. Последнее условие не ограничивает общности, поскольку $Q(S_n; \lambda) = Q(\sum_{i=1}^n (Y_i - EY_i); \lambda)$. Пусть известно, что $f_n(t) = E \exp\{itS_n\}$ при некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$|f_n(t)| \leq \exp\{-\varepsilon t^2\} \text{ для всех } t \in [-\delta, \delta]. \quad (14)$$

Пусть $p(x) \in \Pi_1$, $0 < \tau \leq \rho \leq \lambda\delta/2$, $\lambda > 0$, $\min_{0 \leq x \leq \rho} p(x) > 0$. Тогда из оценок (6), (14) следует:

$$\begin{aligned} Q(S_n; \lambda) &\leq \lambda \inf_{0 < \tau \leq \rho} \left((4\pi\tau p(\tau))^{-1} \int_{-2\tau/\lambda}^{2\tau/\lambda} \exp\{-\varepsilon t^2\} dt \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\sqrt{\pi\varepsilon}} \inf_{0 < \tau \leq \rho} \left((\tau p(\tau))^{-1} \left(2\Phi\left(\frac{2\sqrt{2\varepsilon}\tau}{\lambda}\right) - 1 \right) \right) \\ &\leq \frac{\lambda}{4\sqrt{\pi\varepsilon}} (\bar{\rho} p(\bar{\rho}))^{-1} \left(2\Phi\left(\frac{2\sqrt{2\varepsilon}\bar{\rho}}{\lambda}\right) - 1 \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\bar{\rho} = \min(z(p), \rho)$ — точка максимума функции $xp(x)$ на $[0, \rho]$, $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp\{-t^2/2\} dt$. Указанный метод оценивания $Q(S_n; \lambda)$ аналогичен методу из [5, с. 74–76].

Приведем примеры оценок вида (14). Пусть

$$B_n = \sum_{i=1}^n EY_i^2, \quad M_{3,n} = \sum_{i=1}^n E|Y_i|^3.$$

Известно ([13], [6, с. 160]), что

$$|f_n(t)| \leq \exp\left\{-2^{-1}t^2(B_n - cM_{3,n}|t|)\right\}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$, где $c = 4 \sup_{x>0} (\cos x - 1 + x^2/2)/x^3 = 0,3966\dots$. Следовательно, оценка (14) выполняется при $\varepsilon = B_n p/2$, $\delta = (B_n/M_{3,n}) \times (1-p)/c$, $p \in (0, 1)$. Из леммы 12 в [14, с. 221] следует, что (14) выполняется также при $\varepsilon = (3-4b)/6$, $\delta = (B_n^{3/2}/M_{3,n})b$, $b \in (0, \frac{3}{4})$.

Лемма 1. Пусть случайная величина Y с характеристической функцией $f(t)$ такова, что $EY = 0$, $EY^2 = \sigma^2$, $\sigma > 0$. Тогда при любом $p \in (0, 1)$ верна оценка $|f(t)| \leq 1 - \sigma^2 p t^2/2$, если $|t| \leq \delta = \min(3(1-p)\sigma^2/(E|Y|^3), \sqrt{2}/\sigma)$. При дополнительном условии $EY^3 = 0$ та же оценка верна, если

$$|t| \leq \delta = \min\left(\max\left(3(1-p)\frac{\sigma^2}{E|Y|^3}, \left(12(1-p)\frac{\sigma^2}{EY^4}\right)^{1/2}\right), \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right).$$

Доказательство. Используя оценку

$$\left| f(t) - 1 - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(it)^k}{k!} \mathbf{E}Y^k \right| \leq \frac{|t|^m}{m!} \mathbf{E}|Y|^m$$

([7, с. 576, 574]) при $m = 3, 4$ и неравенство $b(t) = 1 - \sigma^2 t^2/2 \geq 0$ при $t \in [-\delta, \delta]$, получим оценку $|f(t)| \leq b(t) + \rho(t)$ для $t \in [-\delta, \delta]$, где $\rho(t) = \min(|t|^3 \mathbf{E}|Y|^3/6, t^4 \mathbf{E}Y^4/24)$, если $\mathbf{E}Y^3 = 0$; $\rho(t) = |t|^3 \mathbf{E}|Y|^3/6$ в противном случае. Для $t \in [-\delta, \delta]$ неравенство $b(t) + \rho(t) \leq 1 - \sigma^2 p t^2/2$ проверяется элементарно.

Если $Y, Y_1, \dots, Y_n$ независимы и одинаково распределены, $\mathbf{E}Y = 0$, то из леммы 1 следует, что оценка (14) верна при $\varepsilon = \sigma^2 p n/2$, $p \in (0, 1)$, и значении δ , указанном в лемме 1.

Теорема 5. Пусть $Y, Y_1, \dots, Y_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $\mathbf{E}Y = 0$, $\mathbf{E}Y^2 = \sigma^2$, $\sigma > 0$, $\mathbf{E}|Y|^3 = \beta < \infty$, $L = \beta/\sigma^3$, $\omega = \sigma \max(L, \sqrt{2})$. Тогда при всех $\lambda \in (0, 2\pi k\omega)$, $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$Q(S_n; \lambda) \leq \left(\frac{\lambda/(2k\omega)}{\sin(\lambda/(2k\omega))} \right)^{2k} \frac{2k}{(2k-1)!} \frac{1}{\delta(L)} \sum_{m=1}^k B_{k,m} I\left(\frac{m}{k} \delta(L)\right),$$

где $I(x) = \int_0^x (1-t^2)^n dt$, $B_{k,m}$ определены в (8), $\delta(L) = \sqrt{2/3}/L \leq 1/\sqrt{3}$, если $L \geq \sqrt{2}$ и $\delta(L) = (1 - \sqrt{2}L/3)^{1/2} \leq (1 - \sqrt{2}/3)^{1/2}$, если $1 \leq L \leq \sqrt{2}$.

Доказательство. Достаточно применить оценку (8), оценить в ней интегралы с помощью леммы 1:

$$\int_{0 \leq |u| \leq m/k} \left| f\left(\frac{2\tau u}{\lambda}\right) \right| du \leq \lambda \tau^{-1} \int_0^{t_m} \left(1 - \frac{p\sigma^2 t^2}{2} \right)^n dt = \frac{2m}{k} v_m^{-1} I(v_m),$$

где $t_m = 2\tau m/(\lambda k)$, $v_m = (2\tau/\lambda) \sqrt{p/2\sigma m/k}$, $p \in (0, 1)$, $2\tau/\lambda \leq \delta = u(p) = \min(3(1-p)\sigma^2/\beta, \sqrt{2}/\sigma)$, $\tau \in (0, 2k\pi)$, и затем выбрать параметры τ, p так, чтобы величины $v_m^{-1} I(v_m)$ были минимальными. Функция $x^{-1} I(x)$ убывает на $(0, 1)$, поэтому надо максимизировать v_m . При фиксированном $p \in (0, 1)$ величина v_m максимальна и равна $u(p) \sqrt{p/2\sigma m/k}$ при $\tau = \lambda u(p)/2$. Функция $u(p) \sqrt{p/2}$ достигает максимума при $p = p_0 = \max(\frac{1}{3}, 1 - \sqrt{2}L/3)$. Таким образом, величины $v_m^{-1} I(v_m)$, $m = 1, \dots, k$, минимальны при $p = p_0$, $\tau = \lambda u(p_0)/2 = \lambda/\omega \in (0, 2k\pi)$.

Замечание 6. При малых n для вычисления интеграла $I(x)$ можно пользоваться формулой

$$\int_0^x (1-t^2)^n dt = \frac{x}{2n+1} \frac{1}{D_n} \sum_{i=1}^n D_i (1-x^2)^i,$$

где $D_i = 2^{-2i} C_{2i}^i$ для $i = 1, \dots, n$ ([9, с. 35]).

Используя теорему 5 с $k = 1$ и оценку

$$I(x) \leq \int_0^x \exp\{-nt^2\} dt < \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \quad \text{при } x > 0,$$

получим неравенство

$$\begin{aligned} Q(S_n; \lambda) &\leq \left(\frac{\lambda(2\omega)}{\sin(\lambda/(2\omega))} \right)^2 \frac{2}{\delta(L)} \int_0^{\delta(L)} (1-t^2)^n dt \\ &< c(L) \left(\frac{\lambda(2\omega)}{\sin(\lambda/(2\omega))} \right)^2 \frac{L}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\lambda \in (0, 2\pi\omega)$, $c(L) = \sqrt{3\pi/2}$, если $L \geq \sqrt{2}$, и $c(L) = \sqrt{3\pi}/(L(3 - \sqrt{2}L)^{1/2})$, если $1 \leq L < \sqrt{2}$.

З а м е ч а н и е 7. Функция $c(L)$ убывает на интервале $[1, \sqrt{2}]$ от $(3\pi/(3 - \sqrt{2}))^{1/2} = 2,4378\dots$ до $\sqrt{3\pi/2} = 2,1708\dots$. Докажем, что если оценка (16) верна для всех $\lambda \in (0, 2\pi\omega)$ с некоторой функцией $c(L)$, то $\sup_{L \geq 1} c(L) \geq 2\sqrt{2/\pi}(1 - \cos \sqrt{2}) = 1,3469\dots$. Действительно, пусть $P\{Y = -1\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$ и $2 < \lambda < 4$. Тогда $Q(S_{2n}; \lambda) = 2^{-2n}(C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1})$. Так как $\sigma = L = 1$, то оценка (16) верна при $\lambda \in (0, 2\pi\sqrt{2})$. С учетом равенства $\omega = \sqrt{2}$ получим:

$$c(1) > \sqrt{2n} \left(\frac{\sin(2^{-3/2}\lambda)}{2^{-3/2}\lambda} \right)^2 2^{-2n}(C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1}).$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 2$ придем к оценке $c(1) \geq 2\sqrt{2/\pi}(1 - \cos \sqrt{2})$.

Для оценивания сверху величин $Q(S_n; \lambda)$, $P\{S_n \geq x\}$ полезно оценить функционал $U = \int_a^b u(x) dF(x)$, где $u(x)$ — неотрицательная не возрастающая на (a, b) функция, $-\infty < a < b \leq \infty$, $F(x) = P\{X < x\}$ — функция распределения.

Лемма 2. Пусть $u(x) \geq 0$ и не возрастает на (a, b) , $F(x) = P\{X < x\}$, $G(x) = P\{Y < x\}$ — две функции распределения, $H(x) = F(x) - G(x)$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |H(x)| \leq c$. Тогда для

$$U = \int_a^b u(x) dF(x)$$

верна оценка

$$\left| U - \int_a^b u(x) dG(x) \right| \leq 2cu(a). \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу монотонности $u(x)$

$$\begin{aligned} U - \int_a^b u(x) dG(x) &= \int_a^b u(x) dH(x) = u(x)H(x) \Big|_a^b + \int_a^b H(x) d(-u(x)) \\ &\leq c(u(a) + u(b)) + c(u(a) - u(b)) = 2cu(a). \end{aligned}$$

Аналогично получаем оценку

$$\int_a^b u(x) dG(x) - U = \int_a^b u(x) d(-H(x)) \leq 2cu(a).$$

Если в лемме 1 положить $F(x) = P\{S_n < x\sqrt{B_n}\}$, где $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $Y_1, \dots, Y_n$ независимы, $EY_i = 0$, $E|Y_i|^3 < \infty$ для $i = 1, \dots, n$, $G(x) = \Phi(x)$, $u(x) = 1$, $b = a + (\lambda + \varepsilon)/\sqrt{B_n}$, $\varepsilon > 0$, и применить для оценки $|H(x)|$ неравенство Эссеена ([5, с. 157]), то из (17) легко получить оценку (см. [15])

$$Q(S_n; \lambda) \leq 2\Phi\left(\frac{\lambda}{2B_n^{1/2}}\right) - 1 + 2\gamma_n \frac{M_{3,n}}{B_n^{3/2}} \quad (18)$$

при любом $\lambda \geq 0$, где γ_n — константа в неравенстве Эссеена.

Если $Y, Y_1, \dots, Y_n$ одинаково распределены, $EY = 0$, $EY^2 = \sigma^2$, $\sigma > 0$, $E|Y|^3 = \beta < \infty$, то неравенство (18) имеет вид

$$Q(S_n; \lambda) \leq 2\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sigma\sqrt{n}}\right) - 1 + 2\bar{\gamma}_n \frac{\beta}{\sigma^3\sqrt{n}} \quad (19)$$

при любом $\lambda \geq 0$. Неизвестные точно минимальные значения констант $\gamma_n, \bar{\gamma}_n$ удовлетворяют неравенствам (см. [5, с. 158, 195, 283])

$$0,3989 < (2\pi)^{-1/2} \leq \sup_{n \geq 1} \gamma_n \leq 0,7915,$$

$$0,4096 < \frac{3 + \sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} \leq \sup_{n \geq 1} \bar{\gamma}_n \leq 0,7655.$$

Применяя (19) к случаю, когда $\lambda = 0$ и Y имеет то же распределение, что в замечании 7, и используя неравенство $2^{-2m} C_{2m}^m > (\pi(m + \frac{1}{2}))^{-1/2}$ ([10, с. 146]), получим оценку

$$\bar{\gamma}_n \geq 2^{-n-1} \sqrt{n} C_n^{[n/2]} > (\sqrt{2\pi}(1 + n^{-1})^h)^{-1},$$

где $h = \frac{1}{2}$, если n четно, $h = 1$, если n нечетно.

Точное значение константы γ_1 найдено в [16] и равно 0,3703... Мы не проводим сравнения оценки (15) и оценки теоремы 5 с оценками (18), (19).

Если известна верхняя оценка для $Q(X; \lambda)$, то функционал U можно оценить с помощью следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $u(x) \geq 0$ и не возрастает на (a, ∞) , $F(x) = P\{X < x\}$ — функция распределения, $-\infty < a < b \leq \infty$. Тогда при любом $\lambda > 0$

$$U = \int_a^b u(x) dF(x) \leq Q(X; \lambda) \left(u(a) + \lambda^{-1} \int_a^b u(x) dx \right). \quad (20)$$

Доказательство. Положим $n = [(b - a)/\lambda]$, если $b < \infty$, и $n = \infty$, если $b = \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}
 U &\leq \sum_{k=0}^n \int_{a+k\lambda}^{a+(k+1)\lambda} u(x) dF(x) \\
 &\leq \sum_{k=0}^n u(a+k\lambda) \int_{a+k\lambda}^{a+(k+1)\lambda} dF(x) \leq Q(X; \lambda) \sum_{k=0}^n u(a+k\lambda) \\
 &\leq Q(X; \lambda) \left(u(a) + \lambda^{-1} \int_a^y u(x) dx \right).
 \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 8. Если $u(x) = e^{-tx}$, $t > 0$, $b = \infty$, то оценка (20) имеет вид

$$U \leq Q(X; \lambda) e^{-ta} \left(1 + \frac{1}{\lambda t} \right).$$

Эту оценку можно улучшить, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} u(a+k\lambda) = e^{-ta} \sum_{k=0}^n (e^{-\lambda t})^k = \frac{e^{-ta}}{1 - e^{-\lambda t}}.$$

Таким образом, $U \leq Q(X; \lambda) e^{-ta} / (1 - e^{-\lambda t})$.

Применим леммы 2, 3 для оценивания вероятностей больших отклонений суммы независимых одинаково распределенных случайных величин.

Теорема 6. Пусть $Y, Y_1, \dots, Y_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $\text{Var } Y > 0$, $P\{Y < x\} = F(x)$, функция $\psi(t) = \log E \exp\{tY\}$ конечна для всех $t \in (-d, d)$ при некотором $d > 0$. Для каждого $t \in (0, d)$ определим случайную величину Z с функцией распределения

$$P\{Z < x\} = \exp\{-\psi(t)\} \int_{-\infty}^x \exp\{ty\} dF(y)$$

и моментами

$$\begin{aligned}
 \mu = EZ &= \psi'(t), \quad \sigma = (E(Z - EZ)^2)^{1/2} = (\psi''(t))^{1/2} > 0, \\
 \beta = E|Z - EZ|^3 &= \exp\{-\psi(t)\} \int_{-\infty}^{\infty} |y - \psi'(t)|^3 e^{ty} dF(y).
 \end{aligned}$$

При любом $x \in \mathbf{R}$ верны оценки

$$\begin{aligned}
 &\left| \exp\{tx - n\psi(t)\} P\{S_n \geq x\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M(\chi) \exp\left\{-\frac{(x - n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right\} \right| \\
 &\leq 2\bar{\gamma}_n L_n,
 \end{aligned} \tag{21}$$

где $L_n = L/\sqrt{n} = \beta/(\sigma^3\sqrt{n})$ — дробь Ляпунова, $\chi = t\sqrt{n}\sigma + (x - n\mu)/(\sqrt{n}\sigma)$, $\bar{\gamma}_n$ — константа в неравенстве Берри-Эссеена,

$$M(z) = \frac{1 - \Phi(z)}{\Phi'(z)}$$

— отношение Миллса ([14, с. 279]), и

$$P\{S_n \geq x\} \leq Q\left(\sum_{i=1}^n Z_i; \lambda\right) (1 - e^{-\lambda t})^{-1} \exp\{n\psi(t) - tx\}, \quad (22)$$

где $\lambda > 0$, $Z_1, \dots, Z_n$ независимы и распределены как Z .

Доказательство. Формулы для моментов величины Z и равенство

$$P\{S_n \geq x\} = \exp\{n\psi(t)\} \int_x^\infty \exp\{-ty\} dP\left\{\sum_{i=1}^n Z_i < y\right\}$$

выводятся в [7, с. 615–616] (см. также [14, с. 267–272]). Применяя для оценки последнего интеграла лемму 3 с учетом замечания 8, сразу получим оценку (22).

Положим в лемме 2

$$F(x) = P\left\{\sum_{i=1}^n Z_i < x\right\}, \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(y - \mu n)^2}{2n\sigma^2}\right\} dy.$$

Тогда, используя для оценки $|H(x)|$ неравенство Берри-Эссеена ([5, с. 157–158]), получим оценку

$$|\exp\{-n\psi(t)\} P\{S_n \geq x\} - I| \leq 2\bar{\gamma}_n L_n e^{-tx}, \quad (23)$$

где

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n}} \int_x^\infty \exp\left\{-ty - \frac{(y - n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right\} dy.$$

С помощью замены $y = n\mu + \sqrt{n}\sigma(z - t\sqrt{n}\sigma)$ получим:

$$\begin{aligned} I &= (1 - \Phi(\chi)) \exp\{-tn\mu + 2^{-1}t^2n\sigma^2\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 - \Phi(\chi)}{\Phi'(\chi)} \exp\left\{-tx - \frac{(x - n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right\}, \end{aligned}$$

что с учетом (23) дает оценку (21).

З а м е ч а н и е 9. Метод получения оценки (21), по существу, предложен в [7, с. 615–618]. В случае, когда Y_1 принимает лишь конечное число значений и $x = n\psi'(t)$, более точное, чем (21), неравенство доказано в [18]. Для независимых (не обязательно одинаково распределенных) случайных величин более общее, чем (21), неравенство другим методом доказано в [17] (а при специальном выборе x — в [14, с. 276–277], см. формулы (2.28), (2.34)).

Таблица значений a_k, θ_k, R_k, g_k

k	a_k	θ_k	R_k	g_k
1	1.0000...	1.1655...	0.3450...	0.2640...
2	1.3333...	0.8447...	0.3212...	0.2859...
3	1.6500...	0.6954...	0.3232...	0.2969...
4	1.9174...	0.6047...	0.3246...	0.3034...
5	2.1520...	0.5422...	0.3255...	0.3077...
6	2.3635...	0.4958...	0.3260...	0.3108...
7	2.5575...	0.4596...	0.3264...	0.3131...
8	2.7379...	0.4303...	0.3267...	0.3149...
9	2.9070...	0.4059...	0.3270...	0.3163...
10	3.0669...	0.3853...	0.3272...	0.3175...
11	3.2188...	0.3676...	0.3273...	0.3184...
12	3.3639...	0.3520...	0.3274...	0.3192...
13	3.5029...	0.3383...	0.3275...	0.3199...
14	3.6367...	0.3261...	0.3276...	0.3205...
15	3.7657...	0.3151...	0.3277...	0.3210...
16	3.8904...	0.3052...	0.3278...	0.3275...
17	4.0113...	0.2961...	0.3279...	0.3219...
18	4.1286...	0.2878...	0.3279...	0.3223...
19	4.2426...	0.2802...	0.3280...	0.3226...
20	4.3537...	0.2731...	0.3280...	0.3229...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979, 423 с.
2. Esseen C. G. On the Kolmogorov-Rogozin inequality for the concentration function. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1966, B. 5, N. 3, S. 210–216.
3. Хенгартнер В., Теодореску Р. Функции концентрации. М.: Наука, 180, 173 с.
4. Даугавет А. И., Петров В. В. Обобщение неравенства Эссеена для функции концентрации. — Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1985, т. 142, с. 55–58.
5. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
6. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы). М.: Наука, 1987, 397 с.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
8. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Мир, 1982, 286 с.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 798 с.
10. Физтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Физматгиз, 1962, 807 с.
11. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. М.: Мир, 1978, 844 с.
12. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963, 287 с.
13. Золотарев В. М. Некоторые неравенства теории вероятностей и их применения к уточнениям теоремы А. М. Ляпунова. — Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 3, с. 501–504.
14. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
15. Петров В. В. Об одном неравенстве для функций концентрации. — Литов. матем. сб., 1963, т. 3, № 1, с. 195–197.
16. Бенткус В. Ю., Киша К. П. Оценки близости распределения к нормальному закону. — Литов. матем. сб., 1989, т. 29, № 4, с. 657–673.
17. Саханенко А. И. Оценки типа Берри-Эссеена для вероятности больших отклонений. — Сиб. матем. журн., 1991, т. 32, № 4, с. 133–142.
18. Салихов Н. П. Уточнение неравенства Чернова. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 3, с. 583–586.

Поступила в редакцию
2.VIII.1993