Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, О дисперсии сумм для функций от стационарного марковского процесса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 633–639

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:26:00

С другой стороны, рассмотрим плотность распределения вероятностей вида

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_d) = f(x_1) f^*(x_2, \dots, x_d),$$

где

$$f(x_1) = \begin{cases} (2\sqrt{3})^{-1}, & |x_1| \leq 3^{1/2}, \\ 0, & |x_1| > 3^{1/2}, \end{cases}$$

и положим $\mathbf{a} = (\mu, 0, 0, \dots, 0)$. Тогда $(\mathbf{a}^T Q_f^{-1} \mathbf{a})^{1/2} = \mu$ и

$$I(\tilde{f}, \mathbf{a}) = \int_{\mathbf{R}^d} |f(x_1) - f(x_1 - \mu)| f^*(x_2, \dots, x_d) dx = \frac{\mu}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{f \in F^d, \mathbf{a}} I(f, \mathbf{a}) \leq \frac{\mu}{\sqrt{3}}.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979, 388 с.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965, 544 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975, 648 с.

Поступила в редакцию
10.VII.1992

Исправленный вариант
3.VIII.1995

© 1996 г.

БЕЖАЕВА З. И.*, ОСЕЛЕДЕЦ В. И.**

О ДИСПЕРСИИ СУММ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОТ СТАЦИОНАРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА¹⁾

Для функции от стационарного эргодического марковского процесса изучается вопрос о предельном поведении дисперсии сумм. При некоторых дополнительных предположениях получено необходимое и достаточное условие равенства нулю предельной средней дисперсии.

Ключевые слова и фразы: дисперсия сумм, эргодический марковский процесс, перемешивание, пересечение σ -алгебр.

*МГИЭМ, Б.Вузовский пер., 3/4, Москва, Россия.

**Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Воробьевы горы, Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-00239).

Рассмотрим стационарный процесс ξ_t ($t \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$) с пространством состояний X . Обозначим через $\mathcal{X} = X^{\mathbb{Z}}$ пространство траекторий цепи ξ_t , через $\mathcal{F}$ — σ -алгебру, порожденную цилиндрическими множествами в $\mathcal{X}$, а через μ — стационарную меру, порожденную процессом ξ_t в $\mathcal{F}$.

Пусть T — оператор сдвига в пространстве траекторий $\mathcal{X}$, т.е. для любого $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \in \mathcal{X}$: $Tx = (\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots) \in \mathcal{X}$, где $x'_k = x_{k+1}$.

С процессом ξ_t можно связать гильбертово пространство L таких комплекснозначных функций $g(x)$, $x \in \mathcal{X}$, что

$$\int_{\mathcal{X}} |g(x)|^2 d\mu(x) < \infty,$$

с естественным скалярным произведением $(g_1, g_2) = \mathbb{E} g_1 \bar{g}_2 = \int_{\mathcal{X}} g_1 \bar{g}_2 d\mu$ для любых $g_1, g_2 \in L$.

Процесс ξ_t называется процессом с перемешиванием, если для любой $g_1 \in L$, $\mathbb{E} g_1 = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g_1(T^n x), g) = 0 \quad \text{для всех } g \in L.$$

При изучении предельных теорем для $f(x)$ — вещественнозначных функций от траектории стационарного процесса — часто возникает вопрос о предельном поведении дисперсии $\text{Var } S_n(f)$, где $S_n(f) = \sum_{k=1}^n f(T^k x)$. (См., например, [1], [2].)

Из результатов работы В. П. Леонова [3] следует, что если стационарный процесс ξ_t является процессом с перемешиванием и функция $f \in L$ такова, что $\mathbb{E} f = 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k(f(T^k x), f)$ сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_n(f)}{n} = \sigma^2(f) = 0$$

тогда и только тогда, когда существует функция $F \in L$, для которой $f(x) = F(x) - F(Tx)$.

Мы будем рассматривать вопрос о предельном поведении величины $\text{Var } S_n(f)$ для стационарных марковских процессов.

Пусть $L_0 = \{f \in L: f(x) = f_0(x_0)\}$. На пространстве L_0 определим оператор $P: L_0 \rightarrow L_0$:

$$\forall f \in L_0 \quad (Pf)(\xi_0) = \mathbb{E}(f(\xi_1) | \xi_0),$$

и сопряженный к нему оператор P^* .

Оператор Q на L_0 называется марковским, если: 1) $Qf \geq 0$ при $f \geq 0$; 2) $Q1 = 1$; 3) $Q^*1 = 1$.

Оператор P (а также P^*) является марковским оператором.

Для любого марковского оператора Q на L_0 инвариантной функцией называется такая функция g , что $Qg = g$. Инвариантным множеством оператора Q называется множество, индикатор которого — инвариантная функция.

Через $\mathcal{F}(Q)$ будем обозначать σ -алгебру инвариантных множеств марковского оператора Q , а через σ_t^Q будем обозначать σ -алгебру, порожденную случайными величинами $\{\xi_u, t \leq u \leq s\}$, кроме того, положим $\sigma_t = \sigma_t^P$.

Марковский процесс называется эргодическим, если $\mathcal{F}(P)$ тривиальна.

Сформулируем основные результаты работы, доказательство которых приводится ниже.

Теорема 1. Если стационарный эргодический процесс Маркова ξ_t обладает свойством перемешивания, а для функции $f \in L_0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k(P^k f, f)$ сходится и $\sigma^2(f) = 0$, то существует такая функция $F \in L_0$, что

$$f = F - PF,$$

и F измерима относительно $\sigma_{-1} \cap \sigma_0 = T(\sigma_0 \cap \sigma_1)$.

Доказательство этой теоремы опирается на результаты работы Леонова [3].

В работе [4] показано, что если ξ_t — стационарная эргодическая цепь Маркова со счетным пространством состояний, то $T(\sigma_0 \cap \sigma_1)$ совпадает с σ -алгеброй симметричных множеств (обменной σ -алгеброй) [5]. Симметричные σ -алгебры изучались во многих работах, см., например, [4]–[8]. В [8], в частности, показано, что условие тривиальности симметричной σ -алгебры для конечных цепей Маркова эквивалентно справедливости для этой цепи локальной предельной теоремы в форме Колмогорова [9].

В настоящей работе для σ -алгебры $T(\sigma_0 \cap \sigma_1)$ доказана возможность еще одного представления.

Теорема 2. Если ξ_t — стационарный марковский процесс, то

$$T(\sigma_0 \cap \sigma_1) = \mathcal{F}(P^*P).$$

В работе [10] показано, что для стационарного марковского эргодического процесса $f = F - PF$, $F \in L_0$, всегда существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_n(f)}{n} = \sigma^2(f) = (F, F) - (PF, PF).$$

При этом не требуется, чтобы процесс обладал свойством перемешивания.

Теорема 3. Если ξ_t — стационарный эргодический процесс Маркова и $f = F - PF$, $F \in L_0$, то $\sigma^2(f) = 0$ тогда и только тогда, когда F измерима относительно σ -алгебры $T(\sigma_0 \cap \sigma_1)$.

З а м е ч а н и е. Из теорем 2, 3 следует, что если f , $F \in L_0$, $f(x) = F(x) - PF$ и $\sigma^2(f) = 0$, то F измерима относительно $\sigma_{-1} \cap \sigma_0$, т.е. $F(x_0) = F_{-1}(x_{-1})$, а значит, и $F(x_1) = F_{-1}(x_0)$. Из этих равенств можно получить, что $PF = F(Tx)$, $f(x) = F(x) - F(Tx)$.

Для любого оператора Q на L определим его норму $\|Q\| = \sup_{\|g\|=1} \|Qg\|$. Оператор P называется строго эргодичным, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k - \Pi \right\| = 0,$$

где оператор Π определен формулой $\Pi f = (f, 1)1$.

В [10] содержится утверждение, что марковский оператор P строго эргодичен тогда и только тогда, когда любая функция $f \in L_0$, для которой $Ef = 0$, представима в виде $f = F - PF$, $F \in L_0$. Кроме того, эргодический марковский оператор P строго эргодичен тогда и только тогда, когда P — квазикompактный оператор, т.е. когда P является суммой строгого сжатия и компактного оператора (см., например, [10]).

Заметим еще, что в [11], в частности, указано необходимое и достаточное условие обращения в нуль $\sigma^2(f)$ для марковских цепей с инвариантной мерой μ , для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n P^k h}{n}(x) = \int h d\mu$$

для всех x и ограниченных измеримых функций h .

Заметим также, что для этого случая оператор P строго эргодичен.

Из теоремы 3 следует, что для строго эргодичных цепей Маркова справедливо свойство: $\sigma^2(f) > 0$ для любых f , если σ -алгебра $T(\sigma_0 \cap \sigma_1) = \mathcal{F}(P^*P)$ тривиальна.

В [12, с. 236] изучается $\sigma^2(f)$ для случая эргодических цепей Маркова с конечным числом значений. Там же имеется замечание, что «по-видимому, неизвестны достаточно общие и легко проверяемые условия, при которых $\sigma^2(f) > 0$ ».

Из теорем 1–3 следует, что для эргодических цепей Маркова с конечным числом значений $\sigma^2(f) > 0$ для любых f , если σ -алгебра $\mathcal{F}(P^*P)$, совпадающая с симметричной σ -алгеброй, тривиальна.

Перейдем к доказательству сформулированных теорем.

Доказательство теоремы 1. Введем пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}$ — пространство траекторий цепи ξ_i , а $\mathcal{Y}$ — окружность единичного радиуса в комплексной плоскости, $\mathcal{Y} = \{y: |y| = 1\}$.

На пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ введем оператор $\tilde{T}$: $\tilde{T}(x, y) = (Tx, y \exp\{2\pi i \theta f(x)\})$, здесь θ — действительное число.

Этот оператор соответствует двухкомпонентной цепи Маркова (ξ_i, η_i) , переходы которой определяются следующим образом: $(\xi_i, \eta_i) \rightarrow (\xi_{i+1}, \eta_i \exp\{2\pi i \theta f(\xi_i)\})$.

Если в качестве одномерного распределения цепи (ξ_i, η_i) взять прямое произведение распределения ξ_i и равномерного распределения на окружности $\mathcal{Y}$, то легко видеть, что цепь (ξ_i, η_i) стационарна.

Измеримая функция ϕ на $\mathcal{X}$ называется инвариантной функцией цепи ξ_i (преобразования T), если $\phi(Tx) = \phi(x)$.

Приведем краткое доказательство хорошо известного утверждения.

Лемма 1. Для стационарного марковского процесса ξ_i любая инвариантная функция ϕ цепи ξ_i измерима относительно σ_0 , т.е. $\phi(x) = \phi(x_0)$.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{O}_+$, $\mathcal{O}_-$ остаточные (хвостовые) σ -алгебры процесса ξ_i :

$$\mathcal{O}_+ = \bigcap_i \sigma_i^\infty, \quad \mathcal{O}_- = \bigcap_i \sigma_{-\infty}^i.$$

Как известно, [13], инвариантная функция ϕ цепи ξ_i измерима относительно $\mathcal{O}_+$ и $\mathcal{O}_-$, т.е. ϕ измерима относительно $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$.

Для цепи Маркова ξ_i σ -алгебры $\mathcal{O}_+$ и $\mathcal{O}_-$ независимы при фиксированном ξ_0 . Поэтому $P(A | \xi_0) \in \{0, 1\}$ для любого $A \in \mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$, и, следовательно, $A \in \sigma_0$. Это означает, что $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_- \subseteq \sigma_0$. Доказательство леммы закончено.

Пусть теперь $f \in L_0$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} k(P^k f, f)$ сходится и $\sigma^2(f) = 0$. Тогда из [3] следует, что $f(x) = F(x) - F(Tx)$ для некоторой $F \in L$. Построим разбиение на эргодические компоненты цепи (ξ_i, η_i) (разбиение, порождающее инвариантную σ -алгебру цепи (ξ_i, η_i)).

Рассмотрим на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ отображение

$$\Phi: (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \rightarrow (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \quad \Phi(x, y) = (x, y \exp\{-2\pi i \theta F(x)\}).$$

Тогда $\Phi^{-1}(x, y) = (x, y \exp\{2\pi i \theta F(x)\})$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \tilde{T} \Phi(x, y) &= \Phi^{-1} \tilde{T}(x, y \exp\{-2\pi i \theta F(x)\}) \\ &= \Phi^{-1}(Tx, y \exp\{-2\pi i \theta F(x) + 2\pi i \theta f(x)\}) \\ &= (Tx, y \exp\{-2\pi i \theta F(x) + 2\pi i \theta f(x) + 2\pi i \theta F(Tx)\}) = (Tx, y). \end{aligned}$$

Следовательно, у нового преобразования $\Phi^{-1} \tilde{T} \Phi$ инвариантные функции $G(x, y)$: $G(\Phi^{-1} \tilde{T} \Phi(x, y)) = G(Tx, y) = G(x, y)$, при каждом фиксированном y являются инвариантными функциями цепи ξ_i .

Если цепь ξ_i — эргодическая, то любая инвариантная измеримая функция этой цепи является константой. Поэтому любая инвариантная измеримая функция преобразования $\Phi^{-1} \tilde{T} \Phi$ имеет вид $G(x, y) = G(y)$.

Пусть $G(\Phi^{-1}(x, y)) = G_0(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} G_0(\tilde{T}(x, y)) &= G(\Phi^{-1}\tilde{T}(x, y)) = G(\Phi^{-1}\tilde{T}\Phi\Phi^{-1}(x, y)) \\ &= G(\Phi^{-1}(x, y)) = G_0(x, y). \end{aligned}$$

Положим $G(y) = y$. Тогда $G_0(x, y) = G(\Phi^{-1}(x, y)) = y \exp\{2\pi i \theta F(x)\}$ — инвариантная функция цепи (ξ_i, η_i) .

Из леммы 1 следует, что эта функция измерима относительно σ -алгебры, порожденной (ξ_0, η_0) . Из вида функции $G_0(x, y)$ следует, что функция $\exp\{2\pi i \theta F(x)\}$ измерима относительно σ_0 при любом действительном θ . Поэтому функция $F(x)$ измерима относительно σ -алгебры σ_0 , т.е. $F(x) = F_0(x_0)$.

Далее, $f(x_0) = F_0(x_0) - F_0(x_1)$, $F_0(x_1) = F_0(x_0) - f(x_0) = g(x_0)$. Следовательно, $F(x_0) = g(x_{-1})$. Это означает, что F измерима относительно σ -алгебры $\sigma_{-1} \cap \sigma_0 = T(\sigma_0 \cap \sigma_1)$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим подпространство $L_1 = \{f \in L: f(x) = f_1(x_1)\}$. Введем некоторые вспомогательные операторы.

$$\begin{aligned} U: L_0 &\rightarrow L_1, & \forall f \in L_0 & \quad Uf = f(x_1), \\ U^*: L_1 &\rightarrow L_0, & \forall f \in L_1 & \quad U^*f = f(x_0). \end{aligned}$$

Из определения этих операторов следует, что $U^*U: L_0 \rightarrow L_0$, $UU^*: L_1 \rightarrow L_1$ — тождественные операторы. Пусть

$$\begin{aligned} P_0: L &\rightarrow L_0, & \forall f \in L & \quad P_0f = E(f(\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots) | \xi_0), \\ P_1: L &\rightarrow L_1, & \forall f \in L & \quad P_1f = E(f(\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots) | \xi_1), \end{aligned}$$

и P_i — оператор проектирования на пространство L_i , где $i = 0, 1$.

Теперь легко заметить, что для любой $f \in L_0$

$$Pf = E(f(\xi_1) | \xi_0) = P_0Uf \quad \text{и} \quad P^*f = U^*P_1f.$$

Последнее равенство следует из того, что

$$(Pg, f) = E g(\xi_1) \bar{f}(\xi_0) = E(g(\xi_1) E(\bar{f}(\xi_0) | \xi_1)) = (g, U^*P_1f).$$

Из общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [14]) хорошо известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_0P_1)^n = P_{01}$, где P_{01} — оператор проектирования на пространство $L_{01} = L_0 \cap L_1$.

Доказательство теоремы 2 состоит из двух лемм.

Лемма 2. Функция f измерима относительно $T(\sigma_0 \cap \sigma_1)$ тогда и только тогда, когда $f \in U^*L_{01}$.

Доказательство этой леммы очевидно.

Положим $\mathcal{G}(P^*P) = \{f \in L: P^*Pf = f\}$.

Лемма 3. Справедливо следующее равенство: $\mathcal{G}(P^*P) = U^*L_{01}$.

Доказательство леммы 3. Из приведенных выше рассуждений следует, что

$$P^*P = U^*P_1P_0U, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (P^*P)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} U^*(P_1P_0)^nU = U^*P_{01}U.$$

Итак, если $f \in \mathcal{G}(P^*P)$, то $f = P^*Pf = U^*P_{01}Uf$, поэтому $P_{01}Uf = Uf$. Отсюда $Uf \in L_{01}$, т.е. $f \in U^*L_{01}$.

Очевидно и обратное. Если $f \in \mathcal{U}^* L_{01}$, то $\mathcal{U}f \in L_{01}$ и $P_{01}\mathcal{U}f = \mathcal{U}f$, $\mathcal{U}^* P_{01}\mathcal{U}f = f$. Доказательство леммы закончено.

Из этих двух лемм и следует утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Вычислим сначала $\sigma^2(f)$ для случая, когда $f = F - PF$:

$$\sigma^2(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_n(f)}{n} = (f, f) + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (P^k f, f).$$

Из вида функции f следует, что

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (P^k f, f) = (PF, f) - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k F, f\right).$$

В силу эргодичности процесса ξ_t из последнего равенства легко следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k F, f\right) = (EF, f) = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma^2(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_n(f)}{n} = (f, f) + 2(PF, f) \\ &= (F, F) - (PF, PF) = (F, F) - (F, P^*PF). \end{aligned}$$

Если $F = P^*PF$, что по теореме 2 эквивалентно измеримости F относительно σ -алгебры $T(\sigma_0 \cap \sigma_1)$, то $\sigma^2(f) = 0$.

Поэтому из равенства $(F, F) = (F, P^*PF)$ и из того, что $(E - P^*P) \geq 0$, следует, что $P^*PF = F$. Доказательство теоремы 3 закончено.

Другое доказательство этой теоремы можно получить, используя результаты работы [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
2. Rio E. Covariance inequalities for strongly mixing processes. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1993, v. 29, № 4.
3. Леонов В. П. О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. VI, в. 1, с. 93–101.
4. Hewitt E., Savage L. J. Symmetric measure on cartesian products. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 80, p. 470–501.
5. Blackwell D., Freedman D. The tails σ -field of Markov chain and a theorem of Orey. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, № 3, p. 1291–1295.
6. Григоренко Л. А. О σ -алгебре симметричных событий для счетной цепи Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 1, с. 198–204.
7. Григоренко Л. А. Симметричные события для некоторых стационарных случайных последовательностей. — Успехи матем. наук, 1984, т. 39, в. 1, с. 127–128.
8. Гуревич Б. М. Локальная предельная теорема для цепей Маркова и условия типа регулярности. — Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. XIII, в. 1, с. 183–188.
9. Колмогоров А. Н. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, т. 13, № 4, с. 281–300.
10. Krengel U. Ergodic Theorems. Berlin–New York: de Gruyter, 1985.

11. *Шуренков В. Н.* Эргодические процессы Маркова. М.: Наука, 1989, 336 с.
12. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. М.: Изд-во Московского ун-та, 1992, 395 с.
13. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969, 309 с.
14. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970, 352 с.
15. *Гордин М. И., Лифшиц Б. А.* Центральная предельная теорема для стационарных процессов Маркова. — Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 4, с. 766–767.

Поступила в редакцию

23.III.1993

© 1996 г.

ВОВК В. Г.*

ЧИСТО МАРТИНГАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ УСИЛЕННОГО ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ КОЛМОГОРОВА¹⁾

Рассматривается следующая альтернатива колмогоровской аксиоматике теории вероятностей: в качестве базисного выбирается понятие мартингала, а вероятности определяются при помощи мартингалов. В рамках этой «мартингальной» аксиоматики доказан «чисто мартингальный» вариант усиленного закона больших чисел Колмогорова, являющийся усилением обычного мартингального варианта.

Ключевые слова и фразы: мартингал, усиленный закон больших чисел, принцип невозможности системы игры.

1. Введение. Цель настоящей заметки — привлечь внимание к тому простому факту, что некоторые результаты теории вероятностей не требуют аксиоматики Колмогорова в полном объеме. Подробно будет рассмотрен только усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) Колмогорова; некоторые другие результаты будут упомянуты в п. 5.

Под усиленным законом больших чисел Колмогорова будет пониматься следующее обобщение классического результата Колмогорова: если ξ_i — мартингал-разность относительно фильтрации $(\mathcal{F}_i)$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(\xi_i^2 | \mathcal{F}_{i-1})}{i^2} < \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = 0$$

почти наверное. (Для любых двух событий A и B событие $A \Rightarrow B$ определяется как $A^c \cup B$; следовательно, « $A \Rightarrow B$ почти наверное» эквивалентно равенству нулю вероятности того, что A выполнено, а B — нет.) Фактически, это есть частный случай результата Чао (Chow) (см. [1, теорема 3.3.1]).

Формулировка усиленного закона больших чисел Колмогорова явно содержит только условные ожидания $E(\xi_i | \mathcal{F}_{i-1})$ (требуется их равенство нулю) и $E(\xi_i^2 | \mathcal{F}_{i-1})$.

*Научный совет РАН по комплексной проблеме «Кибернетика», ул. Вавилова, 40, 117333 Москва, Россия.

¹⁾Исследование поддержано Международным научным фондом Дж. Сороса, грант № MRS000.