Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Вовк, Чисто мартингальный вариант усиленного закона больших чисел Колмогорова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 639–642

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:09:30

11. *Шуренков В. Н.* Эргодические процессы Маркова. М.: Наука, 1989, 336 с.
12. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. М.: Изд-во Московского ун-та, 1992, 395 с.
13. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969, 309 с.
14. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970, 352 с.
15. *Гордин М. И., Лифшиц Б. А.* Центральная предельная теорема для стационарных процессов Маркова. — Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 4, с. 766–767.

Поступила в редакцию

23.III.1993

© 1996 г.

ВОВК В. Г.*

ЧИСТО МАРТИНГАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ УСИЛЕННОГО ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ КОЛМОГОРОВА¹⁾

Рассматривается следующая альтернатива колмогоровской аксиоматике теории вероятностей: в качестве базисного выбирается понятие мартингала, а вероятности определяются при помощи мартингалов. В рамках этой «мартингальной» аксиоматики доказан «чисто мартингальный» вариант усиленного закона больших чисел Колмогорова, являющийся усилением обычного мартингального варианта.

Ключевые слова и фразы: мартингал, усиленный закон больших чисел, принцип невозможности системы игры.

1. Введение. Цель настоящей заметки — привлечь внимание к тому простому факту, что некоторые результаты теории вероятностей не требуют аксиоматики Колмогорова в полном объеме. Подробно будет рассмотрен только усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) Колмогорова; некоторые другие результаты будут упомянуты в п. 5.

Под усиленным законом больших чисел Колмогорова будет пониматься следующее обобщение классического результата Колмогорова: если ξ_i — мартингал-разность относительно фильтрации $(\mathcal{F}_i)$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(\xi_i^2 | \mathcal{F}_{i-1})}{i^2} < \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = 0$$

почти наверное. (Для любых двух событий A и B событие $A \Rightarrow B$ определяется как $A^c \cup B$; следовательно, « $A \Rightarrow B$ почти наверное» эквивалентно равенству нулю вероятности того, что A выполнено, а B — нет.) Фактически, это есть частный случай результата Чао (Chow) (см. [1, теорема 3.3.1]).

Формулировка усиленного закона больших чисел Колмогорова явно содержит только условные ожидания $E(\xi_i | \mathcal{F}_{i-1})$ (требуется их равенство нулю) и $E(\xi_i^2 | \mathcal{F}_{i-1})$.

*Научный совет РАН по комплексной проблеме «Кибернетика», ул. Вавилова, 40, 117333 Москва, Россия.

¹⁾Исследование поддержано Международным научным фондом Дж. Сороса, грант № MRS000.

Однако из-за использования аксиоматики Колмогорова неявно требуется существование многих других вероятностных характеристик: например, мы вынуждены предполагать, что вероятность события $\{\xi_1 \geq 0\}$ существует. Необходимость подобных допущений сужает область применимости усиленного закона больших чисел Колмогорова. Так, А. Н. Колмогоров отмечает в [2], что предположение о существовании вероятности для данного события является гипотезой, которая в каждом отдельном вопросе требует специальной проверки или обоснования.

В п. 2 описывается простая конструкция, которая позволяет сформулировать (см. п. 3) усиленный закон больших чисел Колмогорова в общем виде, без явно излишних допущений. Доказательства собраны в п. 4.

2. Нулевые события. Для формулировки усиленного закона больших чисел требуется только определить понятие нулевого события (т.е. события вероятности 0); в п. 5 мы кратко обсудим общее понятие вероятности. Наше определение нулевого события будет основано на идее Дэйвида [3] (см. также [4, § 3]).

Зафиксируем фильтрованное пространство $(\Omega, (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots), \mathcal{F})$ с $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Обычно фильтрованное пространство дополняется до *вероятностной модели* добавлением вероятностной меры P на $\mathcal{F}$. Если заранее выбранное событие $E \in \mathcal{F}$ удовлетворяет $P(E) = 0$, мы можем быть (почти) уверены, что E не произойдет (при условии, что мы принимаем модель). Это дает обычную интерпретацию усиленного закона больших чисел.

В этой заметке рассматривается другой тип моделей. *Конечномерная мартингальная модель* (нам потребуются только такие модели) получается из фильтрованного пространства $(\Omega, (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots), \mathcal{F})$ добавлением стохастической последовательности M со значениями в $\mathbf{R}^k$ (т.е. последовательности $M_0, M_1, \dots$ таких случайных элементов со значениями в $\mathbf{R}^k$, что каждый M_n является $\mathcal{F}_n$ -измеримым), где k — некоторое натуральное число; M называется *базисным мартингалом*. Предполагается, что $M_0 = 0$.

Из базисного мартингала можно получать другие мартингалы при помощи следующего известного приема. Если $V = (V_1, V_2, \dots)$ — предсказуемая последовательность со значениями в $\mathbf{R}^k$ (т.е. каждое V_n есть $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримый случайный элемент со значениями в $\mathbf{R}^k$), то *мартингальное преобразование* $V \cdot M$ определяется как стохастическая последовательность $(V \cdot M)_n = \sum_{i=1}^n V_i \cdot (M_i - M_{i-1})$, $n = 0, 1, \dots$ ($\cdot$ в правой части обозначает скалярное произведение векторов на $\mathbf{R}^k$). Стохастические последовательности вида $c + V \cdot M$, где $c \in \mathbf{R}$, называются *M-мартингалами*. (Игровая интерпретация этих определений изложена, например, в [1, § 2.9]).

Событие $E \in \mathcal{F}$ назовем *M-нулевым*, если существует такой неотрицательный M -мартингал S , что $S_0 = 1$ и $S_n(\omega) \rightarrow \infty$ (при $n \rightarrow \infty$) для всех $\omega \in E$. Интерпретация этого определения дается следующим «инфинитарным принципом невозможности системы игры» [4, § 3]: если S — такой заранее выбранный неотрицательный M -мартингал, что $S_0 = 1$, то, пока мы принимаем модель, мы можем быть уверены, что $S_n(\omega)$ не будет стремиться к бесконечности (при $n \rightarrow \infty$), где ω — реализованный исход. (Принцип невозможности системы игры является мартингальным аналогом принципа «пренебрежения достаточно малыми вероятностями» — см. [5].) Таким образом, если M -нулевое событие выбрано заранее, мы можем быть уверены, что оно не произойдет.

Следующая теорема показывает, что определение M -нулевого события согласуется с аксиоматикой Колмогорова.

Теорема 1. Если M — локальный мартингал относительно вероятностной меры P на $(\Omega, \mathcal{F})$ и событие $E \in \mathcal{F}$ является M -нулевым, то $P(E) = 0$.

3. Основной результат. Будем говорить, что свойство $A(\omega)$ исхода $\omega \in \Omega$ выполнено *M-почти наверное*, если событие $\{\omega: \text{не } A(\omega)\}$ является M -нулевым. *Базисная мартингал-разность* определяется как стохастическая последовательность

$M_1 - M_0, M_2 - M_1, \dots$

Теорема 2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — стохастическая последовательность и $d_1, d_2, \dots$ — предсказуемая последовательность. Если базисной мартингал-разностью является $(\xi_i, \xi_i^2 - d_i)_{i=1}^\infty$, то, M -почти наверное,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{i^2} < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = 0. \quad (1)$$

Теорема 1 показывает, что теорема 2 влечет усиленный закон больших чисел Колмогорова.

4. Доказательства. Доказательство теоремы 1. Пусть $E \in \mathcal{F}$ есть M -нулевое событие. Существует такая предсказуемая последовательность V со значениями в $\mathbf{R}^k$, что функция $S = 1 + V \cdot M$ неотрицательна и $S_n(\omega) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) для всех $\omega \in E$. Относительно P функция S является неотрицательным локальным мартингалом, и, следовательно, неотрицательным супермартингалом (по лемме Фату). Из неравенства Дуба для любой константы $c > 0$ получаем $P(E) \leq P\{\exists n: S_n \geq c\} \leq 1/c$; следовательно, $P(E) = 0$.

Доказательство теоремы 2 будет состоять из нескольких шагов (аналогичных шагам доказательства Липцера усиленного закона больших чисел Колмогорова — см. [6, теорема VII. 5.4]). Вначале докажем аналог теоремы Дуба о сходимости мартингалов (применительно к неотрицательным мартингалам).

Лемма 1. Если S_n — неотрицательный M -мартингал, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ существует M -почти наверное.

Доказательство. Доказательство стандартно. Зафиксируем два положительных рациональных числа a и b , $a < b$. Определим $\tau_0 = 0$ и, для $m = 1, 2, \dots$,

$$\sigma_m = \min\{i > \tau_{m-1}: S_i > b\}, \quad \tau_m = \min\{i > \sigma_m: S_i < a\}.$$

Положим

$$V_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau_{m-1} < i \leq \sigma_m \text{ для некоторого } m, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и $S^{a,b} = S_0 + V \cdot S$ ($V \cdot S$ определяется точно так же, как $V \cdot M$). Упорядочим все $S^{a,b}$ в последовательность $S^1, S^2, \dots$ и положим $S^0 = S$. Легко видеть, что $S_n^* = (1/S_0) \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1} S_n^i$ (мы предполагаем $S_0 > 0$) является таким неотрицательным M -мартингалом, что $S_0^* = 1$ и $S_n^* \rightarrow \infty$, когда последовательность S_n расходится.

Стохастическая последовательность вида $T_n = S_n + A_n$, где S_n есть M -мартингал и A_n — неубывающая предсказуемая последовательность с $A_0 = 0$, называется M -субмартингалом. Любую такую последовательность A_n будем называть компенсатором субмартингала T_n .

Лемма 2. Если T_n — неотрицательный M -субмартингал с компенсатором A_n , то, M -почти наверное, $A_\infty < \infty \Rightarrow T_n$ сходится.

Доказательство. Пусть $S_n = T_n - A_n$; S является M -мартингалом. Для $C = 1, 2, \dots$ положим

$$V_n^C = \begin{cases} 1, & \text{если } A_n \leq C, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad S_n^C = 1 + \frac{1}{C} (V^C \cdot S)_n.$$

Все M -мартингалы S^C неотрицательны и удовлетворяют $S_0^C = 1$. Легко видеть, что M -мартингал $R_n = \sum_{C=1}^{\infty} 2^{-C} (S^C)_n^*$ (где $*$ обозначает преобразование из доказательства леммы 1) неотрицателен, $R_0 = 1$, и в случае, когда T_n расходится и $A_\infty < \infty$, стремится к бесконечности.

Лемма 3. Если S_n есть M -мартингал, S_n^2 — M -субмартингал и A_n — компенсатор M субмартингала S_n^2 , то, M -почти наверное, $A_\infty < \infty \Rightarrow S_n$ сходится.

Доказательство. Если A_n -компенсатор M -субмартингала S_n^2 , то A_n — также компенсатор M -субмартингала $(S_n + 1)^2$. По лемме 2, S_n^2 и $(S_n + 1)^2$ сходятся при $A_\infty < \infty$ (M -почти наверное). Остается заметить, что $S_n = \frac{1}{2} ((S_n + 1)^2 - S_n^2 - 1)$.

Доказательство теоремы 2. По лемме 3 (примененной к M -мартингал-разности ξ_i/i), $\sum_{i=1}^{\infty} d_i/i^2 < \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i/i$ сходится, M -почти наверное. Остается применить лемму Кронекера (см., например, [1, лемма 3.2.3]), из которой следует, что для любой последовательности $x_1, x_2, \dots$ действительных чисел выполнено $\sum_{i=1}^{\infty} x_i/i$ сходится $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=1}^n x_i = 0$.

5. Замечания. В этой заметке мы определили только события вероятности 0. Однако формулировка некоторых важных предельных теорем (например, центральной предельной теоремы) требует отличных от 0 вероятностей. Построение таких вероятностей, проведенное в [4, § 4], легко переносится на мартингалы модели. Определив отличные от 0 вероятности, мы можем, например, применить метод Линдеберга для доказательства чисто мартингалового варианта центральной предельной теоремы (аналогично доказательству теоремы 5 в [4]).

В этой заметке мы пытались изложить основную идею мартингалового подхода к основаниям теории вероятностей на максимально простом примере. В частности, рассматривался только случай дискретного времени. Случаю непрерывного времени посвящена статья [7].

Может оказаться полезным рассматривать в качестве основного понятия не мартингал, а супермартингал (в этом случае мы должны ограничиться неотрицательными последовательностями V_n при определении «супермартингалового преобразования»). В этой «супермартингаловой схеме» теорема 2 утверждает, что (1) выполнено, если базисная супермартингал-разность — $(\xi_i, -\xi_i, \xi_i^2 - d_i, d_i - \xi_i^2)_{i=1}^{\infty}$. Преимущество супермартингаловой схемы проявляется в том, что для справедливости заключения теоремы 2 достаточно только потребовать, чтобы $(\xi_i, -\xi_i, \xi_i^2 - d_i)_{i=1}^{\infty}$ было базисной супермартингал-разностью (единственное изменение в доказательстве — слова « M -мартингал» и « M -субмартингал» следует заменить на « M -супермартингал» и «семимартингал» соответственно).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stout W. F. Almost sure convergence. New York: Academic Press, 1974, 381 p.
2. Колмогоров А. Н. Вероятность. — Большая Советская Энциклопедия, 3-е изд. Т. 4. М.: Советская Энциклопедия, 1971, с. 544.
3. Dawid A. P. Calibration-based empirical probability (with discussion). — Ann. Statist., 1985, v. 13, p. 1251–1285.
4. Vovk V. G. A logic of probability, with application to the foundations of statistics (with discussion). — J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 1993, v. 55, p. 317–351.
5. Прохоров Ю. В., Севастьянов В. А. Вероятностей теория. — Большая Советская Энциклопедия, 3-е изд. Т. 4. М.: Советская Энциклопедия, 1971, с. 540–543.
6. Ширяев А. Н. Вероятность, 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1989, 640 с.
7. Vovk V. G. Forecasting point and continuous processes: prequential analysis. — Test, 1994, v. 2.

Поступила в редакцию
2.III.1994