Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Егоров, Об асимптотическом поведении самонормированных сумм случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 643–650

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 08:05:50

© 1996 г.

ЕГОРОВ В. А.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ САМОНОРМИРОВАННЫХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Изучается поведение так называемых самонормированных сумм $t_n = S_n/T_n^{1/2}$, где $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $T_n = X_1^2 + \dots + X_n^2$, X_i , $i = 1, 2, \dots$, — симметричные независимые, но не одинаково распределенные случайные величины. Для полной и цензурированной выборок получены необходимые и достаточные условия сходимости распределения t_n к стандартному нормальному распределению.

Ключевые слова и фразы: самонормированные суммы, симметричные независимые случайные величины, асимптотическая нормальность, относительная устойчивость, цензурированная выборка, статистика Стьюдента.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — последовательность независимых случайных величин. Положим $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $T_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Давно замечено, что S_n и $T_n^{1/2}$ ведут себя в определенном смысле синхронно. Так, в силу неравенств Марцинкевича [1] при $p > 1$ величины $E|S_n|^p$ и $ET_n^{p/2}$ грубо эквивалентны при $n \rightarrow \infty$, а в силу результатов Д. А. Райкова и Б. В. Гнеденко [2] в условиях предельной пренебрегаемости слагаемых слабый закон больших чисел для T_n равносильен центральной предельной теореме для S_n . Поэтому естественным является интерес к асимптотическому поведению отношения $t_n = S_n/T_n^{1/2}$. Отметим, что интерес к асимптотическому поведению отношения t_n вызван также задачами математической статистики, в которых используется статистика Стьюдента или подобные ей статистики при нарушении предположения о нормальности исходной выборки.

В этой статье исследуются условия асимптотической нормальности отношения t_n для полной выборки и аналогичного отношения для цензурированной выборки в предположении симметричности, но не одинаковой распределенности, величин X_n . Близкие исследования для одинаково распределенных слагаемых проводились в работах [3], [7], [8].

Следующая теорема является вспомогательной, но она также представляет и самостоятельный интерес. В ней получены новые условия относительной слабой устойчивости сумм положительных независимых случайных величин.

Теорема 1. Пусть $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ — последовательность независимых положительных случайных величин. Для того, чтобы последовательность сумм $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ была относительно устойчивой и слагаемые были бесконечно малы относительно соответствующей нормировки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{Y_{n,n}}{T_n} \xrightarrow{P} 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (1)$$

где $Y_{n,n} = \max_{i \leq n} Y_i$. Это отношение, в свою очередь, равносильно условию

$$\sum_{i=1}^n P\{Y_i > \varepsilon T_n\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, кафедрa высшей математики, ул. профессора Попова, 5, 197022 С.-Петербург, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 93-011-1459.

З а м е ч а н и е. Ниже мы сознательно применяем одно и то же обозначение для $\sum_{i=1}^n X_i^2$ и $\sum_{i=1}^n Y_i$, поскольку в последующих за этой теоремой результатах будет предполагаться, что $Y_i = X_i^2$, $i \leq n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пусть выполнено соотношение (1). Введем величину $Z_n = \sum_{i=1}^n I\{Y_i > \varepsilon T_n\}$, где $I(A)$ — индикатор события A . Очевидно, верно неравенство

$$0 \leq Z_n \leq \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Поэтому выполнено условие

$$EZ_n = \sum_{i=1}^n P\{Y_i > \varepsilon T_n\} \leq \frac{P\{Z_i \neq 0\}}{\varepsilon} = \frac{P\{Y_{n,n} > \varepsilon T_n\}}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Из соотношения (4) следует соотношение (2). То, что соотношение (2) влечет за собой (1), очевидно. Таким образом, соотношения (1) и (2) равносильны.

Далее, в силу условия (2) можно найти такую последовательность положительных чисел ε_n , $\varepsilon_n \downarrow 0$, для которой выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^n P\{Y_i > \varepsilon_n T_n\} \leq \varepsilon_n. \quad (5)$$

Из (5) получаем, что

$$\sum_{i=1}^n P\{Y_i > \varepsilon'_n T_{n,i}\} \leq \varepsilon'_n, \quad (6)$$

где $\varepsilon'_n = \varepsilon_n / (1 - \varepsilon_n)$, $T_{n,i} = T_n - Y_i$. Поэтому для любой числовой последовательности x_n выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^n P\{Y_i > x_n, x_n > \varepsilon'_n T_{n,i}\} \leq \varepsilon'_n$$

или

$$\sum_{i=1}^n P\{Y_i > x_n\} P\{x_n > \varepsilon'_n T_{n,i}\} \leq \varepsilon'_n.$$

Тем более, выполнены условия

$$\sum_{i=1}^n P\{Y_i > x_n\} P\left\{T_n < \frac{x_n}{\varepsilon'_n}\right\} \leq \varepsilon'_n. \quad (7)$$

Пусть теперь числовые последовательности $\delta_n \downarrow 0$ и x_n выбраны таким образом, что

$$\frac{\delta_n}{\varepsilon'_n} \rightarrow \infty, \quad P\{Y_{n,n} < x_n\} = \prod_{i=1}^n G_i(x_n) = 1 - \delta_n \rightarrow 1, \quad (8)$$

где $G_i(x) = P\{Y_i < x\}$. Тогда из условия (8) следует соотношение

$$\max_{i \leq n} P\{Y_i > x_n\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

и поэтому из условий (7), (8) вытекает неравенство

$$P\left\{T_n < \frac{x_n}{\varepsilon'_n}\right\} \leq C \frac{\varepsilon'_n}{\delta_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (9)$$

где $C > 0$ есть некоторая постоянная. Из соотношений (8), (9) выводим, что

$$P\left\{T_n > \frac{x_n}{\varepsilon'_n}, Y_{n,n} < x_n\right\} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (10)$$

Поэтому, полагая

$$Y'_{i,n} = \begin{cases} Y_i, & \text{если } Y_i < x_n, \\ 0, & \text{если } Y_i \geq x_n, \end{cases} \quad T'_n = \sum_{i=1}^n Y'_{i,n},$$

получим соотношение

$$P\left\{T'_n > \frac{x_n}{\varepsilon'_n}\right\} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (11)$$

С другой стороны, в силу неравенства Чебышева,

$$P\left\{T'_n > 2 \sum_{i=1}^n EY'_{i,n}\right\} \leq \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Сравнивая соотношения (11) и (12), приходим к неравенству

$$2 \sum_{i=1}^n EY'_{i,n} > \frac{x_n}{\varepsilon'_n}. \quad (13)$$

Поэтому

$$\frac{\sum_{i=1}^n EY'_{i,n}}{x_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{x < x_n} x dG_i(x)}{x_n} \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Кроме того, очевидно, выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n P\{Y_i > x_n\} \sim \delta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (15)$$

В теореме 3 [2] условия (14) и (15) приведены как необходимые и достаточные условия для слабой относительной устойчивости последовательности сумм T_n .

Обратное утверждение теоремы легко вытекает из ее условия и критерия вырожденной сходимости [4] или критерия относительной слабой устойчивости [2].

Ниже для удобства ссылок предполагается, что $Y_i = X_i^2$, $i = 1, 2, \dots$.

Теорема 2. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых симметричных случайных величин. Положим

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad \nabla_n = \sup_x |P\{t_n < x\} - \Phi(x)|.$$

Тогда для справедливости соотношения

$$\nabla_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (16)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1) или эквивалентное ему условие (2).

Таким образом, центральная предельная теорема для t_n равносильна условию бесконечной малости слагаемых и слабой устойчивости сумм T_n и поэтому равносильна в условиях предельной пренебрегаемости слагаемых центральной предельной теореме с неслучайной нормировкой. Аналогичный результат для симметричных одинаково распределенных независимых слагаемых получен в работе [3].

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Отметим сначала, что величины X_n остаются условно независимыми, если фиксирована последовательность $(Y_n, n > 0)$, где $Y_n = X_n^2$. Этот факт использовался еще Марцинкевичем, о чем указано во вступительной статье Зигмунда сборника трудов Марцинкевича [6]. Его доказательство этого факта очень просто и коротко. Действительно, пусть на некотором вероятностном пространстве задана последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин $(u_n, n > 0)$, принимающих с вероятностями $\frac{1}{2}$ значения ± 1 , а исходная последовательность случайных величин X_n задана на другом вероятностном пространстве. На произведении этих вероятностных пространств зададим последовательность случайных величин $(Z_n, n > 0)$, положив $Z_n = Y_n^{1/2} u_n, n = 1, 2, \dots$. Легко видеть, что при фиксированных $(Y_i, i > 0)$ случайные величины $(Z_i, i > 0)$ независимы между собой и распределения случайных последовательностей $(X_n, n > 0)$ и $(Z_n, n > 0)$ совпадают. Поскольку последовательность $(Z_n, n > 0)$ по ее построению обладает доказываемым здесь свойством, этим свойством обладает и последовательность $(X_n, n > 0)$. Будем ниже снабжать штрихом $(E', P'$ и т.д.) соответствующие величины, если речь будет идти об условном распределении при фиксированных $Y_n, n > 0$.

Пусть теперь выполнено условие (16). Тогда для любого фиксированного t

$$E \exp\{itt_n\} - e^{-t^2/2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (17)$$

Используя условную относительно последовательности Y_n независимость величин X_n , получим из (17) соотношение

$$EE' \exp\{itt_n\} - e^{-t^2/2} = E \left[\prod_{j=1}^n \cos \left(\frac{t|X_j|}{T_n^{1/2}} \right) - e^{-t^2/2} \right] \rightarrow 0. \quad (18)$$

Применяя неравенство $\cos z \leq \exp(-z^2/2)$, верное для всех достаточно малых z^2 , и очевидное неравенство $|X_i|/T_n^{1/2} \leq 1$, находим, что при всех достаточно малых t выполняется предельное соотношение

$$E \left| \prod_{i=1}^n \cos \left(\frac{t|X_i|}{T_n^{1/2}} \right) - e^{-t^2/2} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (19)$$

Используя при малых z разложение Маклорена функции $\ln \cos z$, получим

$$\ln \cos z = -\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} + \theta z^6, \quad |\theta| < C, \quad (20)$$

где C — постоянная. Из соотношений (19), (20) при достаточно малых $|t|$ следует соотношение

$$E \left| \exp \left\{ -\frac{t^4}{12T_n^2} \sum_{i=1}^n X_i^4 + \theta \frac{t^6}{T_n^3} \sum_{i=1}^n X_i^6 \right\} - 1 \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (21)$$

Поэтому для всех достаточно малых $|t|$

$$\frac{1}{T_n^2} \sum_{i=1}^n X_i^4 + \frac{12\theta t^2}{T_n^3} \sum_{i=1}^n X_i^6 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (22)$$

В силу (22),

$$\frac{1}{T_n^2} \sum_{i=1}^n X_i^4 \xrightarrow{P} 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (23)$$

С другой стороны, справедливо неравенство

$$\frac{1}{T_n^2} \sum_{i=1}^n X_i^4 \geq \frac{1}{T_n^2} \max_{i \leq n} X_i^4 = \left(\frac{Y_{n,n}}{T_n} \right)^2. \quad (24)$$

Из соотношений (23), (24) следует соотношение (1).

Перейдем к доказательству достаточности. В силу теоремы Эссеена справедливо неравенство

$$\left| P'\{t_n < x\} - \Phi(x) \right| \leq C \frac{1}{T_n^{3/2}} \sum_{i=1}^n |X_i^3|.$$

Поэтому

$$\nabla_n \leq CE \frac{1}{T_n^{3/2}} \sum_{i=1}^n |X_i^3| \leq CE \frac{\max_{i \leq n} |X_i|}{T_n^{1/2}}.$$

Поскольку последнее выражение под знаком математического ожидания не превосходит единицы, из этого неравенства следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\nabla_n \leq C \left(\varepsilon + P \left\{ \max_{i \leq n} |X_i| > \varepsilon T_n^{1/2} \right\} \right),$$

откуда вытекает достаточность условия (1). Теорема 2 доказана.

Отметим, что в теореме 2 априори не предполагается выполненным условие предельной пренебрегаемости слагаемых.

Рассмотрим теперь цензурированные выборки. Пусть $X_{n,i}$, $i \leq n$, $n = 1, 2, \dots$, есть абсолютные порядковые статистики, т.е. $|X_{n,1}| \leq |X_{n,2}| \leq \dots \leq |X_{n,n}|$. Будем предполагать, что выборка цензурирована, т.е. из нее удалены элементы $X_{n,n}$, $X_{n,n-1}, \dots, X_{n,n-k+1}$. Положим

$$S_{n,k} = \sum_{j=1}^{n-k} X_{n,j}, \quad T_{n,k} = \sum_{j=1}^{n-k} X_{n,j}^2 = \sum_{j=1}^{n-k} Y_{n,j}, \quad t_{n,k} = \frac{S_{n,k}}{(T_{n,k})^{1/2}},$$

$$\nabla_{n,k} = \sup \left| P\{t_{n,k} < x\} - \Phi(x) \right|.$$

Теорема 3. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — последовательность независимых симметричных случайных величин. Для того, чтобы

$$\nabla_{n,k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (25)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{X_{n,n-k}^2}{T_{n,k}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (26)$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. Поэтому мы его опускаем.

Покажем теперь, что при достаточно слабых дополнительных предположениях условия (26), а, следовательно, и условия (25), при различных фиксированных k равносильны.

Ниже, как и раньше, считаем, что $Y_n = X_n^2$.

Введем условие предельной пренебрегаемости слагаемых в виде

$$\max_{i \leq n} P\{Y_i > \varepsilon T_n\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (27)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и условие

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{x > x_0} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{Y_i > \lambda x\}}{\sum_{j=1}^n \mathbf{P}\{Y_j > x\}} < B < 1 \quad (28)$$

для некоторого B и всех достаточно больших n .

Теорема 4. При выполнении условий (27), (28) условия (26) и (1) эквивалентны.

Доказательство. Очевидно, из (1) вытекает (26). Покажем обратное включение. Пусть выполнены условия (26)–(28). Положим для произвольного $\varepsilon > 0$

$$Z_n = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} I\{Y_{i_1} > \varepsilon T_n\} I\{Y_{i_2} > \varepsilon T_n\} \cdots I\{Y_{i_{k+1}} > \varepsilon T_n\},$$

где $I(A)$ — индикатор события A . Очевидно, $Z_n < 1/\varepsilon^{k+1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z_n &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \mathbf{P}\{Y_{i_1} > \varepsilon T_n, Y_{i_2} > \varepsilon T_n, \dots, Y_{i_{k+1}} > \varepsilon T_n\} \\ &\leq \frac{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}}{\varepsilon^{k+1}} = \frac{\mathbf{P}\{Y_{n,n-k} > \varepsilon T_n\}}{\varepsilon^{k+1}} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Положим

$$A(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) = Y_{i_1} + Y_{i_2} + \dots + Y_{i_{k+1}},$$

$$A^i(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) = A(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) - Y_i,$$

$$B(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) = T_n - A(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}).$$

Тогда из соотношений (29) следует, что найдется такая последовательность ε_n , достаточно медленно сходящаяся к нулю, что

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \mathbf{P}\{Y_{i_1} - \varepsilon_n A^{i_1}(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) > \varepsilon_n B(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}), \dots, \\ Y_{i_{k+1}} - \varepsilon_n A^{i_{k+1}}(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) \\ > \varepsilon_n B(i_1, i_2, \dots, i_{k+1})\} < \varepsilon_n^{k+1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Поэтому с учетом неравенства $B(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) \leq T_n$ получим, что для любой последовательности $x_n > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \mathbf{P}\{Y_{i_1} - \varepsilon_n A^{i_1}(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) > x_n, \dots, \\ Y_{i_{k+1}} - \varepsilon_n A^{i_{k+1}}(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) > x_n\} \\ \times \mathbf{P}\left\{T_n < \frac{x_n}{\varepsilon_n}\right\} < \varepsilon_n^{k+1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Далее, так как $A^{ij}(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) \leq k\lambda_n x_n$, если $Y_{ij} \leq \lambda_n x_n$ для всех $j = 1, 2, \dots, k+1$, то для любой последовательности $\lambda_n > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{k+1}\left\{T_n < \frac{x_n}{\varepsilon_n}\right\} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \mathbf{P}\{x_n(1 + k\varepsilon_n \lambda_n) < Y_{ij} < \lambda_n x_n, \\ j = 1, 2, \dots, k+1\} < \varepsilon_n^{k+1} \end{aligned}$$

или

$$P^{k+1} \left\{ T_n < \frac{x_n}{\varepsilon_n} \right\} \times \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} \prod_{j=1}^{k+1} P \left\{ x_n(1 + k\varepsilon_n \lambda_n) < Y_{i_j} < \lambda_n x_n \right\} < \varepsilon_n^{k+1}. \quad (32)$$

Пусть $\varepsilon_n \lambda_n \rightarrow 0$. Тогда, используя условие (27) и рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим, что найдется такая последовательность $\varepsilon \downarrow 0$, которую, не умаляя общности, можно взять равной последовательности из (32), что

$$\max_{i \leq n} P \left\{ T_n < \frac{x_n}{\varepsilon_n} \right\} P \left\{ x_n(1 + k\varepsilon_n \lambda_n) < Y_i < \lambda_n x_n \right\} \leq \varepsilon_n. \quad (33)$$

Нам далее потребуется следующая лемма, доказанная в [5].

Лемма. Пусть Y_j — последовательность положительных чисел,

$$Q_{k,n} = \sum Y_{j_1} Y_{j_2} \cdots Y_{j_k},$$

где суммирование ведется по всем индексам при условии $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$. При любых целых положительных n и p и при любом положительном A , если $Y_j \leq A$, $j \leq n$, и $Q_{p,n} \leq A^p$, то $\sum Y_j \leq (2p-1)A$.

Применяя лемму, из неравенств (32), (33) получаем

$$P \left\{ T_n < \frac{x_n}{\varepsilon_n} \right\} \sum_{i=1}^n P \left\{ x_n(1 + k\varepsilon_n \lambda_n) < Y_i < \lambda_n x_n \right\} < (2k+1)\varepsilon_n. \quad (34)$$

Выберем последовательность λ_n так, чтобы $\varepsilon_n \lambda_n \rightarrow 0$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, и пусть $x_n \rightarrow \infty$. Тогда, используя условие (28), из (34) выводим

$$P \left\{ T_n < \frac{x_n}{\varepsilon_n} \right\} \sum_{j=1}^n P \left\{ Y_j > x_n(1 + k\varepsilon_n \lambda_n) \right\} \leq (2k+1)\varepsilon_n.$$

Последнее неравенство практически совпадает с соотношением (7). Поэтому последняя часть доказательства совпадает с соответствующей частью доказательства теоремы 1. Следовательно, последовательность T_n слабо устойчива и выполнено соотношение (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marcinkiewicz J., Zygmund A. Sur les fonction independentes. — Fund. Math., 1937, v. 29, p. 60–90.
2. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
3. Maller R. A. Asymptotic normality of lightly trimmed means — a converse. — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1982, v. 92, № 3, p. 535–545.
4. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
5. Егоров В. А. Об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 3, с. 520–528.
6. Zygmund A. Josef Marcinkiewicz. Collected papers. Warszawa: Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1964.

7. Hahn M. G., Kuelbs J., Weiner D. C. The asymptotic joint distribution of self-normalized censored sums and sums of squares. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 3, p. 1284–1341.
8. Hahn M. G., Kuelbs J., Weiner D. S. The asymptotic distribution of magnitude — Winsorized sums via self-normalization. — J. Theoret. Probab., 1990, № 1, p. 137–168.

Поступила в редакцию
10.II.1994

© 1996 г.   КАШТАНОВ В. А.*, ЯНИШЕВСКИЙ И. М.**

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА КАТАСТРОФЫ И АДДИТИВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ДОХОДОВ

В работе определяется модель управляемого полумарковского процесса с катастрофами, обобщающая исследованную А. Д. Соловьевым модель процесса восстановления с катастрофами. Исследуется двумерный вектор, каждая компонента которого является аддитивным функционалом, построенным на траекториях этого процесса. Получено уравнение для совместного распределения этих функционалов и доказаны теоремы, описывающие структуру математических ожиданий и смешанного момента в зависимости от функций распределения, определяющих стратегию управления.

Ключевые слова и фразы: управляемый полумарковский процесс, катастрофа, аддитивный функционал, двумерный смешанный момент, структура функционала, стратегия управления.

Процесс марковского восстановления $\{\xi_n, \theta_n, n \geq 0\}$ со значениями в $E \times R^+$ (E — конечное множество) является исходным объектом для конструктивного задания семейства полумарковских процессов специального типа. Общепринято, что первая компонента образует однородную цепь Маркова, фиксирующую состояние процесса на n -м шаге. Вторая компонента θ_n фиксирует время пребывания в состоянии ξ_n . Пусть на каждом шаге процесса марковского восстановления происходит некоторое событие A_n . Определим случайную величину η_n как интервал времени от n -го скачка процесса до наступления события A_n . Далее, предположим, что процесс марковского восстановления управляется в моменты изменения состояния выбором решения ν_n со значениями в измеримом пространстве $(U, \mathcal{U})$, где U интерпретируется как множество управлений, а σ -алгебра $\mathcal{U}$ -измеримых множеств из U (предполагается, что она содержит одноточечные подмножества) интерпретируется как совокупность подмножеств управлений. Добавим к базовой последовательности две компоненты η_n и ν_n , $n \geq 0$. Такая последовательность $\{\xi_n, \theta_n, \eta_n, \nu_n, n \geq 0\}$ является однородной цепью Маркова, которая задается начальным распределением $P\{\xi_0 = e_i\} = p_i$, $e_i \in E$, и переходными вероятностями, определяемыми ядром

$$P\{\xi_n = e_j, \theta_n < x, \eta_n < y, \nu_n \in U \mid \xi_{n-1} = e_i\} = D_{ij}(x, y, U). \quad (1)$$

*Московский государственный институт математики и электроники, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, Москва, Россия.

**Институт высокопроизводительных вычислительных систем РАН, ул. Вавилова, 39, Москва, Россия.