Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Каштанов, И. М. Янишевский, Совместное распределение момента катастрофы и аддитивного функционала доходов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 650–655

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:10:39

7. Hahn M. G., Kuelbs J., Weiner D. C. The asymptotic joint distribution of self-normalized censored sums and sums of squares. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 3, p. 1284–1341.
8. Hahn M. G., Kuelbs J., Weiner D. S. The asymptotic distribution of magnitude — Winsorized sums via self-normalization. — J. Theoret. Probab., 1990, № 1, p. 137–168.

Поступила в редакцию
10.II.1994

© 1996 г. КАШТАНОВ В. А.*, ЯНИШЕВСКИЙ И. М.**

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА КАТАСТРОФЫ И АДДИТИВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ДОХОДОВ

В работе определяется модель управляемого полумарковского процесса с катастрофами, обобщающая исследованную А. Д. Соловьевым модель процесса восстановления с катастрофами. Исследуется двумерный вектор, каждая компонента которого является аддитивным функционалом, построенным на траекториях этого процесса. Получено уравнение для совместного распределения этих функционалов и доказаны теоремы, описывающие структуру математических ожиданий и смешанного момента в зависимости от функций распределения, определяющих стратегию управления.

Ключевые слова и фразы: управляемый полумарковский процесс, катастрофа, аддитивный функционал, двумерный смешанный момент, структура функционала, стратегия управления.

Процесс марковского восстановления $\{\xi_n, \theta_n, n \geq 0\}$ со значениями в $E \times R^+$ (E — конечное множество) является исходным объектом для конструктивного задания семейства полумарковских процессов специального типа. Общепринято, что первая компонента образует однородную цепь Маркова, фиксирующую состояние процесса на n -м шаге. Вторая компонента θ_n фиксирует время пребывания в состоянии ξ_n . Пусть на каждом шаге процесса марковского восстановления происходит некоторое событие A_n . Определим случайную величину η_n как интервал времени от n -го скачка процесса до наступления события A_n . Далее, предположим, что процесс марковского восстановления управляется в моменты изменения состояния выбором решения ν_n со значениями в измеримом пространстве $(U, \mathcal{U})$, где U интерпретируется как множество управлений, а σ -алгебра $\mathcal{U}$ -измеримых множеств из U (предполагается, что она содержит одноточечные подмножества) интерпретируется как совокупность подмножеств управлений. Добавим к базовой последовательности две компоненты η_n и ν_n , $n \geq 0$. Такая последовательность $\{\xi_n, \theta_n, \eta_n, \nu_n, n \geq 0\}$ является однородной цепью Маркова, которая задается начальным распределением $P\{\xi_0 = e_i\} = p_i$, $e_i \in E$, и переходными вероятностями, определяемыми ядром

$$P\{\xi_n = e_j, \theta_n < x, \eta_n < y, \nu_n \in U \mid \xi_{n-1} = e_i\} = D_{ij}(x, y, U). \quad (1)$$

*Московский государственный институт математики и электроники, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, Москва, Россия.

**Институт высокопроизводительных вычислительных систем РАН, ул. Вавилова, 39, Москва, Россия.

Ядро (1) определяет некоторые характеристики процесса марковского восстановления. Например, можно найти семейство вероятностных мер $\Phi_i(U)$, $t \in J$ (J — множество $\{j: e_j \in E\}$) на пространстве управлений

$$\Phi_i(U) = P\{\nu_n \in U \mid \xi_{n-1} = e_i\} = \sum_{j \in J} D_{ij}(\infty, \infty, U).$$

Кроме того, при любых i, j, x, y функций $D_{ij}(x, y, U) \leq \Phi_i(U)$ для каждого $U \in \mathcal{U}$, тогда мера $D_{ij}(x, y, U)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\Phi_i(U)$ и существует такая измеримая функция $Q_{ij}(x, y, u)$, что

$$D_{ij}(x, y, U) = \int_U Q_{ij}(x, y, u) \Phi_i(du), \quad (2)$$

где $Q_{ij}(x, y, u) = P\{\xi_n = e_j, \theta_n < x, \eta_n < y \mid \xi_{n-1} = e_i, \nu_n = u\}$. Из (2) следует, что ядро (1) восстанавливается при наличии двух функций $Q_{ij}(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $\Phi_i(\cdot)$.

Без ограничения общности будем считать, что $U = R^+$ и $\mathcal{U} = \mathfrak{B}(R^+)$.

Пусть $\{t_n, n \geq 0\}$, где $\theta_n = t_n - t_{n-1}$, — последовательность моментов марковского восстановления. Введем считающий процесс $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \sup\{n: t_n \leq t\}.$$

Далее, построим семейство полумарковских процессов $\xi(t) = \xi_{\delta(t)}$, $\theta(t) = \theta_{\delta(t)}$, $\eta(t) = \eta_{\delta(t)}$.

Пусть $\zeta = \inf\{t: \eta(t) < \theta(t)\}$. Определим момент $\tau = \zeta + \eta(\zeta)$ как момент катастрофы.

Исследованию распределения момента катастрофы у регенерирующих процессов посвящена работа А. Д. Соловьева в [1].

Аналогично [2] определим на траекториях управляемого полумарковского процесса $\xi(t)$ аддитивный функционал доходов $\sigma(t)$ следующим образом. Прибыль через время t ($t_{n-1} \leq t < t_n$), отсчитываемое от последнего момента марковского восстановления, определяется функцией $R_{ij}(t \mid t_n - t_{n-1}, u)$, $n \geq 1, i, j \in J$. Считается, что $R_{ij}(0 \mid t_n - t_{n-1}, u) = 0$, $n \geq 1, i, j \in J$. Полная прибыль между соседними моментами марковского восстановления равна $R_{ij}(t_n - t_{n-1}, u) = R_{ij}(t_n - t_{n-1} \mid t_n - t_{n-1}, u)$, $n \geq 1, i, j \in J$. Прибыли от последовательных переходов считаются аддитивными.

Необходимо решить следующую задачу: найти совместное распределение τ — момента наступления катастрофы, и $\sigma(\tau)$ — аддитивного функционала доходов. Пусть $P_k(t, c) = P\{\tau < t, \sigma(\tau) < c \mid \xi(0) = e_k\}$, $t \geq 0, -\infty < c < \infty$, и

$$p_k(s, w) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\{-st - wc\} d_t d_c P_k(t, c).$$

Теорема 1. Преобразование Лапласа–Стилтьеса $p_k(s, w)$ является решением системы

$$(I - D(s, w)) p(s, w) = h(s, w),$$

где

$$D(s, w) = \{d_{kj}(s, w), k, j \in J\},$$

$$d_{kj}(s, w) = \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty \exp\{-sx - wR_{kj}(x, u)\} d_x d_y Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u);$$

$$h(s, w) = \{h_k(s, w), k \in J\},$$

$$h_k(s, w) = \sum_{j \in J} \int_U \int_0^\infty \int_0^x \exp\{-sy - wR_{kj}(y \mid x, u)\} d_x d_y Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u);$$

$$p(s, w) = \{p_k(s, w), k \in J\}.$$

Доказательство. Выразим совместное распределение $P_k(t, c)$ через характеристики полумарковского процесса $\xi(t)$. По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} P_k(t, c) = & \sum_{j \in J} \int_{\cup} \int_0^t \int_0^x I_{\{R_{kj}(y|x, u) < c\}} d_x d_y Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \\ & + \sum_{j \in J} \int_{\cup} \int_t^\infty \int_0^t I_{\{R_{kj}(y|x, u) < c\}} d_x d_y Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \\ & + \sum_{j \in J} \int_{\cup} \int_0^t \int_x^\infty P_j(t-x, c-R_{kj}(x, u)) d_x d_y Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u). \quad (3) \end{aligned}$$

Применим двойное преобразование Лапласа–Стилтьеса. Тогда

$$\begin{aligned} p_k(s, w) = & \sum_{j \in J} \int_{\cup} \int_0^\infty \int_0^x \exp\{-sy - wR_{kj}(y|x, u)\} \\ & \times d_x d_y Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \\ & + \sum_{j \in J} p_j(s, w) \int_{\cup} \int_0^\infty \int_x^\infty \exp\{-sy - wR_{kj}(x, u)\} \\ & \times d_x d_y Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u). \end{aligned}$$

Или, в матричном виде, $(I - D(s, w))p(s, w) = h(s, w)$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно заметить, что задача о распределении времени пребывания в подмножестве состояний $E_0 \subset E$ [3] и суммарного дохода за это время [4] является частным случаем рассмотренной выше задачи. Пусть

$$G_{ik}(x, u) = P\{\xi_n = e_k, \theta_n < x \mid \xi_{n-1} = e_i, \nu_n = u\}.$$

Тогда для всех $e_i \in E_0$ положим $Q_{ij}(x, y, u) = G_{ij}(x, u) D^+(y)$, где

$$D^+(y) = \begin{cases} 0, & y < \infty, \\ 1, & y = \infty. \end{cases}$$

Аналогично для всех $e_j \in E \setminus E_0$ положим $Q_{jk}(x, y, u) = G_{jk}(x, u) D^-(y)$, где

$$D^-(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1, & y > 0. \end{cases}$$

Подставив полученные выражения в (3), получим известные результаты.

Введем обозначения: T_k — математическое ожидание времени до момента катастрофы:

$$T_k = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty t d^2 P_k(t, c);$$

c_k — математическое ожидание дохода до момента катастрофы:

$$c_k = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty c d^2 P_k(t, c);$$

r_k — смешанный момент:

$$r_k = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty tc d^2 P_k(t, c). \quad (4)$$

Теорема 2. Математическое ожидание момента катастрофы и математическое ожидание дохода до момента катастрофы представляют собой дробно-линейные функционалы вида

$$T_k(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \frac{\int_U \dots \int_U A_1^{(k)}(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n d\Phi_i(u_i)}{\int_U \dots \int_U B(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n d\Phi_i(u_i)}, \quad (5)$$

$$c_k(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \frac{\int_U \dots \int_U A_2^{(k)}(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n d\Phi_i(u_i)}{\int_U \dots \int_U B(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n d\Phi_i(u_i)}, \quad (6)$$

и, если существуют экстремумы функционалов на множестве Ω допустимых функций распределения $\Phi_i(u)$, $i \in J$ (для которых существуют выражения (5) и (6)), то они достигаются на вырожденных функциях распределения, т.е.

$$\max_{\Omega} T_k(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \max_{\Omega^* \cap \Omega} T_k(\Phi_1, \dots, \Phi_n),$$

$$\min_{\Omega} c_k(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \min_{\Omega^* \cap \Omega} c_k(\Phi_1, \dots, \Phi_n),$$

где Ω^* — множество функций распределения

$$\Phi_i^*(u) = \begin{cases} 0, & u \leq u_i, \\ 1, & u > u_i. \end{cases}$$

Доказательство. Исходя из (3), составим систему уравнений

$$\begin{aligned} T_k = \sum_{j \in J} & \left[\int_U \int_0^\infty \int_0^x y d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right. \\ & + \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty x d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \\ & \left. + T_j \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right], \end{aligned}$$

или, в матричном виде, $(I - D(0, 0))T = v$, где

$$T = \{T_k, k \in J\}, \quad v = \{v_k, k \in J\},$$

$$\begin{aligned} v_k = \sum_{j \in J} & \left[\int_U \int_0^\infty \int_0^x y d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right. \\ & \left. + \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty x d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right]. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} c_k = \sum_{j \in J} & \left[\int_U \int_0^\infty \int_0^x R_{kj}(y | x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right. \\ & + \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty R_{kj}(x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \\ & \left. + c_j \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right], \end{aligned}$$

или, в матричном виде, $(I - D(0, 0))c = f$, где

$$c = \{c_k, k \in J\}, \quad f = \{f_k, k \in J\},$$

$$f_k = \sum_{j \in J} \left[\int_U \int_0^\infty \int_0^x R_{kj}(y | x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right. \\ \left. + \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty R_{kj}(x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right].$$

Тогда

$$T_k = \frac{D_1^{(k)}}{D(0, 0)}, \quad c_k = \frac{D_2^{(k)}}{D(0, 0)}, \quad (7)$$

где $D(0, 0)$ — определитель матрицы $I - D(0, 0)$, $D_1^{(k)}$ — определитель матрицы $G^{(k)} = \{g_{ij}^{(k)}, i, j \in J\}$,

$$g_{ij}^{(k)} = \begin{cases} v_i, & j = k, \\ 1 - d_{ij}(0, 0), & i = j, j \neq k, \\ -d_{ij}(0, 0), & i \neq j, i \neq k, j \neq k; \end{cases}$$

$D_2^{(k)}$ — определитель матрицы $Z^{(k)} = \{z_{ij}^{(k)}, i, j \in J\}$,

$$z_{ij}^{(k)} = \begin{cases} f_i, & j = k, \\ 1 - d_{ij}(0, 0), & i = j, j \neq k, \\ -d_{ij}(0, 0), & i \neq j, i \neq k, j \neq k. \end{cases}$$

Второе утверждение теоремы следует из [1], так как все входящие в равенства (7) определители являются линейными по $\Phi_i(u)$, $i \in J$, функционалами.

Теорема 3. Смешанный момент (4) представляет собой функционал вида

$$r_k(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \frac{\int_U \dots \int_U A_3^{(k)}(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n d\Phi_i(u_i)}{\int_U \dots \int_U B(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n d\Phi_i(u_i)} \\ + \frac{\int_U \dots \int_U \sum_{j \in J} A^{(j)}(u_1, \dots, u_n) C^{(j,k)}(v_1, \dots, v_n) \prod_{i=1}^n d\Phi_i(u_i) d\Phi_j(v_j)}{\int_U \dots \int_U B(u_1, \dots, u_n) B(v_1, \dots, v_n) \prod_{i=1}^n d\Phi_i(u_i) d\Phi_j(v_j)}. \quad (8)$$

Доказательство. Воспользовавшись (3), составим систему уравнений

$$r_k = \sum_{j \in J} \left[\int_U \int_0^\infty \int_0^x y R_{kj}(y | x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right. \\ \left. + \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty x R_{kj}(x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right. \\ \left. + T_j \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty R_{kj}(x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right. \\ \left. + c_j \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty x d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right. \\ \left. + r_j \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right],$$

или, в матричном виде, $(I - D(0, 0))r = s$, где

$$\begin{aligned} r &= \{r_k, k \in J\}, \quad s = \{s_k, k \in J\}, \\ s_k &= \sum_{j \in J} \left[\int_U \int_0^\infty \int_0^x y R_{kj}(y | x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right. \\ &\quad + \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty x R_{kj}(x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \\ &\quad + T_j \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty R_{kj}(x, u) d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \\ &\quad \left. + c_j \int_U \int_0^\infty \int_x^\infty x d^2 Q_{kj}(x, y, u) d\Phi_k(u) \right]. \end{aligned}$$

Тогда $r_k = D_3^{(k)} / D(0, 0)$, где $D(0, 0)$ — определитель матрицы $I - D(0, 0)$, $D_3^{(k)}$ — определитель матрицы $W^{(k)} = \{w_{ij}^{(k)}, i, j \in J\}$,

$$w_{ij}^{(k)} = \begin{cases} s_i, & j = k, \\ 1 - d_{ij}(0, 0), & i = j, j \neq k, \\ -d_{ij}(0, 0), & i \neq j, i \neq k, j \neq k. \end{cases}$$

Учитывая структуру T_j и c_j , $j \in J$, приходим к выводу, что смешанный момент (4) имеет вид (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В. (ред.) Вопросы математической теории надежности. М.: Радио и связь, 1983.
2. Джевелл В. С. Управляемые полумарковские процессы. — В кн.: Кибернетический сборник. М.: Мир, 1967, в. 4, с. 97–137.
3. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наукова думка, 1976, 184 с.
4. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решения. М.: Наука, 1977, 175 с.

Поступила в редакцию
5.IV.1994

© 1996 г.

НАГАЕВ С. В.*, ХОДЖАБАГЯН С. С.*

ОБ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Получены новые оценки для одномерной функции концентрации, включающие в качестве частного случая классическую оценку Эссеена. Для постоянных, участвующих в формулировках, даны численные значения.

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия.