Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Л. Пресман, В. И. Ротарь, О законе больших чисел для нелинейных функций многих случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 665–672

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:09:02

Авторы благодарны рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хенгартнер В., Теодореску Р. Функции концентрации. М.: Наука, 1980, 173 с.
2. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
3. Зигель Г. Верхние оценки для функции концентрации в гильбертовом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 2, с. 335–349.
4. Esseen C. G. On the concentration function of a sum of independent random variables. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1968, B. 9, H. 4, S. 290–308.
5. Мухин А. Б. О концентрации распределений сумм независимых случайных величин. 1. — Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем. наук, 1973, № 2, с. 25–29.
6. Dunnage J. E. A. Inequalities for the concentration functions of sums of independent random variables. — Proc. London Math. Soc. Third ser., 1971, v. 23, № 3, p. 489–514.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
8. Нагаев С. В., Ходжабагян С. С. Об одной верхней оценке функции концентрации. — Докл. АН УзССР, 1990, № 10, с. 8–9.
9. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию
15.III.1994

© 1996 г.

ПРЕСМАН Э. Л.*, РОТАРЬ В. И.*

**О ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ
МНОГИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) с конечной дисперсией. Рассматриваются с.в. $Z_n = U_n(X_1, \dots, X_n)$, где $U_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторые функции. Показывается, что при достаточно слабых условиях на последовательность $\{U_n\}$ существует последовательность чисел μ_n , для которых $Z_n - \mu_n \xrightarrow{P} 0$.

Ключевые слова и фразы: закон больших чисел, концентрация меры, функции многих случайных переменных.

Введение. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.). Рассмотрим с.в.

$$Z_n = U_n(X_1, \dots, X_n),$$

*ЦЭМИ РАН, ул. Красикова, 32, 117418 Москва, Россия.

где $U_n: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ — некоторые функции. Как заметил Поль Леви [1], следует ожидать, что при некоторых естественных условиях распределение с.в. Z_n при больших n почти вырожденно, точнее, существует последовательность чисел μ_n , для которых

$$Z_n - \mu_n \xrightarrow{P} 0. \quad (0.1)$$

Правдоподобность (0.1) можно обосновать следующими эвристическими рассуждениями.

Пусть, например, с.в. $X_1, X_2, \dots$ стандартно нормальны. Тогда при больших n распределение вектора $(X_1, \dots, X_n)$ близко к равномерному распределению на сфере радиуса $\sqrt{n}$ (что следует, например, из закона больших чисел: $[(X_1^2 + \dots + X_n^2)/n] \xrightarrow{P} 1$).

Асимптотически, при больших n , указанное равномерное распределение сосредоточено в малой окрестности дуги большого радиуса и, более того, в малой окрестности любой достаточно гладкой кривой, делящей сферу пополам, то есть на две части одинаковой лебеговой меры (см., например, [1]).

Далее, при некоторых предположениях на U_n , в качестве такой кривой можно выбрать одну из «кривых» постоянства функции U_n на сфере, точнее, множество $\{(x_1, \dots, x_n): x_1^2 + \dots + x_n^2 = n; U_n(x_1, \dots, x_n) = \mu_n\}$, где μ_n — медиана с.в. $U_n(X'_1, \dots, X'_n)$ и вектор $(X'_1, \dots, X'_n)$ распределен равномерно на сфере радиуса $\sqrt{n}$.

Таким образом, при больших n , значения с.в. Z_n с большой вероятностью будут «мало» отличаться от μ_n .

П. Леви привел в [1] полуэвристическое доказательство (0.1) для нормально распределенных с.в. $X_1, X_2, \dots$. Цель настоящей заметки — строго доказать, при некоторых предположениях на U_n , аналогичное утверждение для произвольных одинаково распределенных с.в. X_i с конечной дисперсией.

В заключение введения укажем на одну из возможных интерпретаций (0.1). Пусть при каждом n функции $U_n(x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in \mathbf{R}^1$, непрерывны, симметричны и для каждого числа c

$$U_n(c, \dots, c) = c. \quad (0.2)$$

В этом случае значение $U_n(x_1, \dots, x_n)$ обычно интерпретируют как центр множества чисел $\{x_1, \dots, x_n\}$; см., например, [2]–[5]. Тогда Z_n — (случайный) центр случайного множества $\{X_1, \dots, X_n\}$, и (0.1) утверждает, что при больших n распределение центра почти вырожденно.

Простейшим примером центра может служить функция

$$U_n(x_1, \dots, x_n) = u^{-1} \left(\frac{1}{n} (u(x_1) + \dots + u(x_n)) \right), \quad (0.3)$$

где $u(\cdot)$ — некоторая непрерывная функция, а u^{-1} — ее обращение.

Несколько более сложным примером является решение относительно c уравнения

$$v(x_1, c) + \dots + v(x_n, c) = 0, \quad (0.4)$$

где $v(x, y)$ — такая непрерывная возрастающая (убывающая) по первому (второму) аргументу функция, что $v(x, x) = 0$. В этих случаях (0.1) следует из закона больших чисел, причем в первом случае, очевидно, $Z_n \xrightarrow{P} u^{-1}(Eu(X_1))$, а во втором можно показать, что Z_n стремится по вероятности к решению уравнения $Ev(X_1, c) = 0$.¹⁾

¹⁾Приведенные в этих примерах центры широко используются в теории полезностей, где, в частности, рассматриваются аксиомы или требования к центру, приводящие к представлениям (0.3), (0.4) (см., например, [2]–[8]). Функция $u(x)$ в этой

Ниже мы рассматриваем общую схему с достаточно произвольными функциями U_n . В такой ситуации возможность использования обычного закона больших чисел для доказательства (0.1) представляется, по крайней мере, неочевидной. Особенно это касается случая несимметричных функций U_n .

1. Формулировка результата. Чтобы пояснить приводимые ниже предельно достаточные условия, обеспечивающие выполнение (0.1), остановимся сначала на хотя и излишне сильных, но более прозрачных условиях. Такие условия можно формулировать, используя следующий, также принадлежащий П. Леви, прием задания последовательности $\{U_n\}$.

Рассмотрим функционал $U(x(\cdot))$, определенный на некотором семействе $\mathcal{L}$ функций на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\mathcal{H}_n$ — семейство функций на $[0, 1]$, принимающих постоянные значения на полуинтервалах $((k-1)/n, k/n]$, $k = 1, \dots, n$. Предположим, что $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{L}$.

Ясно, что сужение $U(x(\cdot))$ на $\mathcal{H}_n$ можно рассматривать как функцию на $\mathbb{R}^n$, полагая

$$U_n(x_1, \dots, x_n) \equiv U(\bar{x}(\cdot)); \quad \bar{x}(t) = \sum_{k=1}^n x_k I_{\Delta_k}(t), \quad (1.1)$$

где $\Delta_k = ((k-1)/n, k/n]$ и $I_{\Delta}(\cdot)$ — индикаторная функция промежутка Δ . Таким образом, сужение U на $\mathcal{H}_n$ задает семейство $\{U_n\}$.

Так, функционал $U(z(\cdot)) = u^{-1}(\int_0^1 u(z(t)) dt)$ приводит к (0.3), а если в качестве $U(z(\cdot))$ взять решение относительно c уравнения $\int_0^1 v(z(t), c) dt = 0$, где функция $v(\cdot, \cdot)$ та же, что и во введении, то получаем (0.4).

Как будет ясно из дальнейшего, чтобы доказать (0.1), достаточно рассмотреть в качестве $\mathcal{L}$ пространство $L_2[0, 1]$ и предположить, что функционал $U(x(\cdot))$ равномерно непрерывен в окрестности каждой сферы с центром в нуле.

Вернемся к общей схеме. На самом деле, не нужно требовать, чтобы функции $U(\cdot)$ были порождены каким-то одним функционалом, а нужно только потребовать выполнения следующего условия, которое в случае функционала на $L_2[0, 1]$ является следствием упомянутого выше условия равномерной непрерывности.

Условие А. Для любых $\epsilon > 0$ и $\nu > 0$ существует такое $\delta = \delta(\epsilon, \nu)$, что для всех n и всех $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ из $\|x^i\| - \nu\sqrt{n} < \delta(\epsilon, \nu)\sqrt{n}$, $i = 1, 2$, и $\|x^1 - x^2\| < \delta(\epsilon, \nu)\sqrt{n}$ вытекает, что $|U_n(x^1) - U_n(x^2)| < \epsilon$, где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение F с конечной дисперсией, и пусть выполнено условие А. Тогда существует такая последовательность чисел $\mu_n(F)$, что

$$U_n(X_1, \dots, X_n) - \mu_n(F) \xrightarrow{P} 0. \quad (1.2)$$

При этом в качестве $\mu_n(F)$ можно взять медиану распределения величины $U_n(X_1, \dots, X_n)$.

Таким образом, в окончательной формулировке мы не требуем существования единого функционала U на L_2 , что позволяет рассматривать и «нерегулярные» последовательности U_n . Это расширяет постановку задачи, однако следует подчеркнуть, что в этом случае уже нельзя надеяться на сходимость последовательности μ_n , то есть на замену μ_n каким-то одним числом. Вопрос о такой возможности остается открытым.

теории интерпретируется как «полезность» дохода x , а $v(x, y)$ — как «сравнительная полезность» дохода x по отношению к доходу y .

2. Доказательство теоремы. Введем в рассмотрение последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ со стандартным нормальным распределением Φ . Меру, отвечающую последовательности $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$, будем обозначать Q . Пусть

$$g(y) = F^{-1}(\Phi(y)), \quad (2.1)$$

где F — функция распределения с.в. X_i . Обратную функцию F^{-1} нам будет удобно понимать как точечно-множественное отображение, точнее, будем полагать $F^{-1}(y)$ равным замыканию множества $\{x: F(x) = y\}$. Положим

$$u_n(y_1, \dots, y_n) = U_n(g(y_1), \dots, g(y_n)). \quad (2.2)$$

Поскольку функция U_n непрерывна, а F монотонна, значения функции u_n не являются одноточечными множествами лишь для аргументов из множества нулевой лебеговой меры. Поэтому функцию $u_n(Y_1, \dots, Y_n)$ можно рассматривать как обычную случайную величину.

Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$u_n(Y_1, \dots, Y_n) - \mu_n(F) \xrightarrow{Q} 0. \quad (2.3)$$

Пусть

$$S_n^r = \left\{ (y_1, \dots, y_n): \sum_{i=1}^n y_i^2 = r \right\}, \quad S_n = S_n^n.$$

Обозначим через $\tilde{F} = \tilde{F}_n$ условное распределение случайной величины $Z_n = u_n(Y_1, \dots, Y_n)$ при условии $(Y_1, \dots, Y_n) \in S_n$, а через $\tilde{\mu}_n(F)$ — медиану распределения $\tilde{F}$. Если медиана не единственна, в качестве $\tilde{\mu}_n(F)$ мы выбираем, скажем, наименьшую. Пусть

$$B = B_n = \left\{ (y_1, \dots, y_n): \sum_{i=1}^n y_i^2 = n, u_n(y_1, \dots, y_n) \ni \tilde{\mu}_n(F) \right\}. \quad (2.4)$$

Нетрудно понять, что, в силу данного выше определения F^{-1} , множество B_n не пусто.

Для любого $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ символом $g(y)$ обозначим вектор $(g(y_1), \dots, g(y_n))$.

Теперь переопределим функцию $u_n(\cdot)$, полагая ее тождественно равной $\tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}_n(F)$ на множестве B_n . В остальных точках, где значение вектора $g(y)$ неоднозначно, в качестве $u_n(\cdot)$ можно взять любое из значений $u_n(g(y))$. Нетрудно проверить, что такая операция не меняет распределения с.в. $u_n(Y_1, \dots, Y_n)$.

Для любого множества $T \in \mathbb{R}^n$ и любого $\eta > 0$ положим

$$T^\eta = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n): \rho(y, T) < \eta\sqrt{n} \right\},$$

где ρ — обычная евклидова метрика.

Лемма 1. Для любого $\delta > 0$ найдется такая последовательность множеств $\tilde{B}_n = \tilde{B}_n(\delta) \subseteq \mathbb{R}^n$, что

- 1) $Q(\tilde{B}_n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) существует такое $\eta = \eta(\delta)$, что $\tilde{B}_n \subseteq B_n^\eta$ и

$$y', y'' \in \tilde{B}_n, \quad \|y' - y''\| < \eta(\delta)\sqrt{n} \Rightarrow \|g(y') - g(y'')\| < \delta\sqrt{n}. \quad (2.5)$$

Покажем, что из условия А и леммы 1 вытекает (2.3). Пусть $\varepsilon > 0$, $\nu_2 = (EX_1^2)^{1/2}$,

$$D_n^0 = \left\{ \|g(y)\| - \nu_2 n^{1/2} \right\} < \delta(\varepsilon, \nu_2) n^{1/2},$$

где $\delta(\epsilon, \nu)$ — функция, фигурирующая в условии А.

В силу закона больших чисел, $P(D_n^0) \rightarrow 1$. С другой стороны, в силу условия А, $P\{|u_n(y_1, \dots, y_n) - \tilde{\mu}_n(F)| \leq \epsilon\} \geq P\{D_n^0 \cap \bar{B}_n(\delta(\epsilon, \nu_2))\}$, что влечет за собой (2.3).

Из сказанного следует, что теорема справедлива, если в качестве $\mu_n(F)$ взять значение $\tilde{\mu}_n(F)$. Возможность замены $\tilde{\mu}_n(F)$ на медиану величины $U_n(X_1, \dots, X_n)$ вытекает из определения медианы и свойств 1) и 2), фигурирующих в лемме 1.

3. Доказательство леммы 1. Пусть

$$A = A_n = \left\{ (y_1, \dots, y_n): u_n(Y_1, \dots, Y_n) < \tilde{\mu}_n(F); \sum_{i=1}^n Y_i^2 = n \right\},$$

$$C = C_n = \left\{ (y_1, \dots, y_n): u_n(Y_1, \dots, Y_n) > \tilde{\mu}_n(F); \sum_{i=1}^n Y_i^2 = n \right\}.$$

Таким образом, сфера S_n разбита на три непересекающихся множества A, B, C , причем на множестве A (или C) значения функции u_n меньше (или больше) заданной константы, а на множестве B — равны той же константе. При этом

$$\text{mes}(A) \leq \frac{1}{2} \text{mes}(S_n), \quad \text{mes}(C) \leq \frac{1}{2} \text{mes}(S_n),$$

$$\text{mes}(A \cup B) \geq \frac{1}{2} \text{mes}(S_n), \quad \text{mes}(C \cup B) \geq \frac{1}{2} \text{mes}(S_n).$$

Иначе говоря, множество B_n «делит сферу пополам», причем любая непрерывная кривая, соединяющая две точки из множеств A и C соответственно, проходит и через точки множества B . Этим же свойством обладает множество

$$B_{n1} = \left\{ (y_1, \dots, y_n): \sum_{i=1}^n y_i^2 = n, y_1 = 0 \right\}. \quad (3.1)$$

Хорошо известно (см., например, [11, гл. 5]), что в этом случае при малых η

$$\text{mes}(B_n^\eta \cap S_n) \geq \text{mes}(B_{n1}^\eta \cap S_n), \quad (3.2)$$

то есть B_{n1} — «наименьшее» из указанных множеств. Нам понадобится элементарное усиление (3.2).

Лемма 2. Справедливо неравенство

$$Q(B_n^\eta) \geq Q(B_{n1}^\eta). \quad (3.3)$$

Доказательство леммы 2. Пусть $f_n(r)$ — плотность вероятностей длины случайного вектора $(Y_1, \dots, Y_n)$. Тогда

$$Q(B_n^\eta) = \int_0^\infty f_n(r) \frac{\text{mes}(B_n^\eta \cap S_n^r)}{\text{mes} S_n^r} dr. \quad (3.4)$$

Аналогичное равенство верно для $Q(B_{n1}^\eta)$.

Очевидно, что для множеств $B_n^\eta \cap S_n^r$ справедливы неравенства, аналогичные (3.2), поскольку множество $B_n^\eta \cap S_n^r$ подобно множеству $B_{n1}^{\eta'} \cap S_n^r$ при некотором η' . Поэтому при каждом r выражение под интегралом в (3.4) достигает минимума при замене B_n^η на B_{n1}^η . Отсюда следует (3.3).

Обратимся к непосредственному доказательству леммы 1. Положим

$$g_a(y) = \begin{cases} g(a) & \text{при } y > a, \\ g(y) & \text{при } |y| \leq a, \\ g(-a) & \text{при } y < -a, \end{cases} \quad \bar{g}_a(y) = g(y) - g_a(y).$$

Зафиксируем $\delta > 0$. Поскольку дисперсия распределения F конечна, найдется такое $a = a(\delta)$, что

$$\mathbb{E} \bar{g}_{a(\delta)}^2(Y) < \frac{\delta^2}{128}, \quad (3.5)$$

причем, без ограничения общности, можно считать $g(a) \neq g(-a)$.

Положим

$$g^\delta(y) = g_{a(\delta)}(y), \quad \bar{g}^\delta(y) = \bar{g}_{a(\delta)}(y), \quad (3.6)$$

так что

$$g(y) = g^\delta(y) + \bar{g}^\delta(y). \quad (3.7)$$

Пусть

$$D_n^1 = D_n^1(\delta) = \left\{ y: \sum_{i=1}^n (\bar{g}^\delta(y_i))^2 - n \mathbb{E}(\bar{g}^\delta(Y_1))^2 < \frac{n\delta^2}{128} \right\}. \quad (3.8)$$

По закону больших чисел, при $n \rightarrow \infty$

$$Q(D_n^1) \rightarrow 1. \quad (3.9)$$

При этом, если $y', y'' \in D_n^1$, то, в силу (3.5) и (3.8),

$$\begin{aligned} \|\bar{g}^\delta(y') - \bar{g}^\delta(y'')\|^2 &:= \sum_{i=1}^n [\bar{g}_1^\delta(y'_i) - \bar{g}_1^\delta(y''_i)]^2 \\ &\leq 2 \left\{ \sum_{i=1}^n (\bar{g}^\delta(y'_i))^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{g}^\delta(y''_i))^2 \right\} \leq \frac{n\delta^2}{16}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Согласно [12, гл. 8, теорема 4], монотонная функция $g^\delta(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, имеет почти всюду конечную производную. Поэтому для любого L существует такое открытое множество $A(L)$, что вне этого множества функция $g^\delta(t)$ имеет производную, которая не превосходит L . Можно всегда выбрать $L = L(\delta)$ так, что

$$p := Q\{Y_1 \in A(L(\delta))\} \leq \frac{\delta^2}{96[g(a(\delta)) - g(-a(\delta))]^2}. \quad (3.11)$$

Открытое множество $A(L(\delta))$ представимо в виде суммы не более чем счетного числа непересекающихся интервалов. Пусть G — сумма приращений функции g^δ на этих интервалах. Ясно, что

$$G \leq g(a(\delta)) - g(-a(\delta)). \quad (3.12)$$

Далее, существует такое конечное число указанных интервалов, что сумма приращений g^δ на этих интервалах отличается от G не более, чем на $\delta/4$. Объединение соответствующих интервалов из упомянутого конечного числа обозначим $A_{1\delta}$, объединение оставшихся интервалов из $A(L(\delta))$ обозначим $A_{2\delta}$, а дополнение множества $A(L(\delta))$ обозначим $A_{3\delta}$. Тогда

$$g^\delta(t) = g_1^\delta(t) + g_2^\delta(t) + g_3^\delta(t), \quad (3.13)$$

где точки роста функции $g_i^\delta(t)$ сосредоточены на множестве $A_{i\delta}$, $i = 1, 2, 3$.

Из определения $g_3^\delta(t)$ вытекает, что для любых $t, t' \in \mathbb{R}^1$ справедливо неравенство $|g_3^\delta(t) - g_3^\delta(t')| \leq L(\delta) |t - t'|$, а поэтому для любых $y', y'' \in \mathbb{R}^n$

$$\|g_3^\delta(y') - g_3^\delta(y'')\|^2 \leq (L(\delta))^2 \|y' - y''\|^2. \quad (3.14)$$

Из определения $g_2^\delta(y)$ вытекает, что для любых $y', y'' \in \mathbb{R}^n$

$$\|g_2^\delta(y') - g_2^\delta(y'')\|^2 < \frac{n\delta^2}{16}. \quad (3.15)$$

Для фиксированного вектора $y = (y_1, \dots, y_n)$ обозначим через $M_n(y_1, \dots, y_n)$ число таких индексов i , что $y_i \in A_{1\delta}$, а для фиксированных $y' = (y'_1, \dots, y'_n)$, $y'' = (y''_1, \dots, y''_n)$ обозначим через $R_n(y', y'')$ число таких индексов i , что найдется интервал из числа тех, которые составляют множество $A_{1\delta}$, что y'_i, y''_i лежат по разную сторону от этого интервала.

Очевидно, что

$$\|g_1^\delta(y') - g_1^\delta(y'')\|^2 \leq G^2 [M_n(y') + M_n(y'') + R_n(y', y'')]. \quad (3.16)$$

Заметим, что

$$\|y' - y''\|^2 \geq z^2 R_n(y', y''), \quad (3.17)$$

где z — длина минимального интервала из тех, которые составляют множество $A_{1\delta}$.

Пусть

$$D_n^2 = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n): M_n(y_1, \dots, y_n) < \frac{3}{2} np \right\}, \quad (3.18)$$

где p определено в (3.11). Из закона больших чисел для схемы Бернулли вытекает, что

$$Q(D_n^2) \rightarrow 1. \quad (3.19)$$

Из (3.16), (3.17), (3.18), (3.11) и (3.12) следует, что если $y', y'' \in D_n^2$, то

$$\|g_1^\delta(y') - g_1^\delta(y'')\|^2 \leq \frac{n\delta^2}{32} + \frac{G^2}{z^2} \|y' - y''\|^2. \quad (3.20)$$

Положим теперь

$$\eta^2 = \eta^2(\delta) = \frac{\delta^2}{32(L^2 + G^2/z^2)}, \quad \tilde{B}_n = B_n^\eta \cap D_n^1 \cap D_n^2. \quad (3.21)$$

Хорошо известно, что

$$Q(B_{n1}^\eta) \rightarrow 1. \quad (3.22)$$

Из (3.9), (3.19), (3.22) и леммы 2 вытекает, что $Q(\tilde{B}_n) \rightarrow 1$.

Из (3.7), (3.10), (3.13), (3.14), (3.15), (3.20) и (3.21) следует, что если $\|y' - y''\| < \eta n^{1/2}$, то $\|g(y') - g(y'')\| < \delta n^{1/2}$, что завершает доказательство леммы 1, а, значит, и теоремы.

П р и м е ч а н и е. После того, как статья была сдана в печать, проф. М. Talagrand (Ohio State University) в частной переписке предложил другое доказательство нашей теоремы. Оно также использует урезание случайных величин и закон больших чисел, но вместо применяемого нами экстремального свойства аппелирует к некоторым оценкам для концентрации мер из работы [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Levy P.* Problemes Concrets D'Analyse Fonctionnelle. 2^{eme} ed. Paris, 1951.
2. *Колмогоров А. Н.* Об определении среднего. — В кн.: Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985, с. 136–138.
3. *Kolmogorov A. N.* Sur la notion de la moyenne. — Atti Accad. naz. Lincei Rend., 1930, v. 12, № 9, p. 338–391.
4. *Nagumo M.* Uber Eine Klasse der Mittcewerte. — Japan J. Math., 1930, v. 7, p. 71–79.
5. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978, 352 с.
6. *Debreu G.* Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. — In: Decision Processes. / Ed. by R. V. Thrall, C. H. Coombs and R. L. Davis. Willy & Sons, 1954, № 4.
7. *Luce R. D.* Two extension of conjoint measurement. — J. Math. Psychology, 1966, v. 3, p. 348–370.
8. *Luce R. D., Tukey J. W.* Simultaneous Conjoint Measurement: A new Type of Fundamental Measurement. — J. Math. Psychology, 1964, v. 1, p. 1–27.
9. *Кирута А. Я., Рубинов А. М., Яновская Е. С.* Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Ленинград: Наука, 1980, 166 с.
10. *Смоляк С. А.* К вопросу об определении среднего. — Докл. АН СССР, 1991, т. 320, № 5, с. 1054–1057.
11. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987, 760 с.
12. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. 3-е изд. М.: Наука, 1974, 480 с.
13. *Milman V., Schechtman G.* Asymptotic theory of finite dimensional normal spaces. (Lecture Notes in Mathematics, V. 1200), Berlin: Springer-Verlag, 1986..

Поступила в редакцию
2.III.1994

© 1996 г.

ПУШКИН Л. Н.*

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЧАСТОТАМИ ЦИФР

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — случайная последовательность r -ичных цифр, $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, связанных в эргодическую цепь Маркова. Пусть $\beta > 1$ есть такое алгебраическое число, что отношение $\ln \beta / \ln r$ иррационально. Тогда с вероятностью 1 число $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j r^{-j}$ нормально по основанию β .

Доказательство основано на оценке Гельфонда–Бейкера для модуля линейной формы от логарифмов алгебраических чисел.

Ключевые слова и фразы: нормальные числа, теорема Касселса–Шмидта, оценки характеристических функций сингулярных распределений, теория Гельфонда–Бейкера, конечные цепи Маркова.

Вещественная последовательность x_n , $n \in \mathbb{N}$, называется *равномерно распределенной по модулю 1* (р. р. mod 1), если последовательность эмпирических мер, построенных по $\{x_1\}, \dots, \{x_N\}$, слабо сходится к мере Лебега λ на $[0, 1)$ при $N \rightarrow \infty$;

*Факультет ВМК, КГУ, ул. Ленина, 18, 420008 Казань, Россия.