Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Пушкин, Эргодические свойства множеств, определяемых частотами цифр, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 672–677

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:14:09

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Levy P.* Problemes Concrets D'Analyse Fonctionnelle. 2^{eme} ed. Paris, 1951.
2. *Колмогоров А. Н.* Об определении среднего. — В кн.: Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985, с. 136–138.
3. *Kolmogorov A. N.* Sur la notion de la moyenne. — Atti Accad. naz. Lincei Rend., 1930, v. 12, № 9, p. 338–391.
4. *Nagumo M.* Uber Eine Klasse der Mittcewerte. — Japan J. Math., 1930, v. 7, p. 71–79.
5. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978, 352 с.
6. *Debreu G.* Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. — In: Decision Processes. / Ed. by R. V. Thrall, C. H. Coombs and R. L. Davis. Willy & Sons, 1954, № 4.
7. *Luce R. D.* Two extension of conjoint measurement. — J. Math. Psychology, 1966, v. 3, p. 348–370.
8. *Luce R. D., Tukey J. W.* Simultaneous Conjoint Measurement: A new Type of Fundamental Measurement. — J. Math. Psychology, 1964, v. 1, p. 1–27.
9. *Кирута А. Я., Рубинов А. М., Яновская Е. С.* Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Ленинград: Наука, 1980, 166 с.
10. *Смоляк С. А.* К вопросу об определении среднего. — Докл. АН СССР, 1991, т. 320, № 5, с. 1054–1057.
11. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987, 760 с.
12. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. 3-е изд. М.: Наука, 1974, 480 с.
13. *Milman V., Schechtman G.* Asymptotic theory of finite dimensional normal spaces. (Lecture Notes in Mathematics, V. 1200), Berlin: Springer-Verlag, 1986..

Поступила в редакцию
2.III.1994

© 1996 г.

ПУШКИН Л. Н.*

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЧАСТОТАМИ ЦИФР

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — случайная последовательность r -ичных цифр, $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, связанных в эргодическую цепь Маркова. Пусть $\beta > 1$ есть такое алгебраическое число, что отношение $\ln \beta / \ln r$ иррационально. Тогда с вероятностью 1 число $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j r^{-j}$ нормально по основанию β .

Доказательство основано на оценке Гельфонда–Бейкера для модуля линейной формы от логарифмов алгебраических чисел.

Ключевые слова и фразы: нормальные числа, теорема Касселса–Шмидта, оценки характеристических функций сингулярных распределений, теория Гельфонда–Бейкера, конечные цепи Маркова.

Вещественная последовательность x_n , $n \in \mathbb{N}$, называется *равномерно распределенной по модулю 1* (р. р. mod 1), если последовательность эмпирических мер, построенных по $\{x_1\}, \dots, \{x_N\}$, слабо сходится к мере Лебега λ на $[0, 1)$ при $N \rightarrow \infty$;

*Факультет ВМК, КГУ, ул. Ленина, 18, 420008 Казань, Россия.

здесь $\{x\} = x \bmod 1$. Число $x \in [0, 1)$ называется *нормальным по основанию $g > 1$* , если последовательность xg^{n-1} , $n \in \mathbb{N}$, р. р. mod 1. В случае $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеется эквивалентное определение в терминах частот g -ичных цифр x . (Для справок по теории р. р. mod 1 см. [1]). Число x называется *слабо нормальным по основанию $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$* , если в g -ичной записи x каждая g -ичная цифра встречается с асимптотической частотой g^{-1} ; $x \in [0, 1)$ называется *нормальным по основанию $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$* , если любая k -членная комбинация g -ичных цифр, $k \in \mathbb{N}$, встречается в g -ичной записи x с асимптотической частотой g^{-k} . Числа $g, r > 1$ называются *мультипликативно независимыми* ($g \not\sim r$), если отношение $\ln g / \ln r$ иррационально. Пусть $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Число $x \in [0, 1)$ назовем r -числом Касселса-Шмидта ($x \in CS_r$), если x , не будучи даже слабо нормальным по основанию r , нормально по всем основаниям $g \not\sim r$, $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Теорема Касселса-Шмидта [2, теорема 1 (в)] утверждает, что при любом $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ множество CS_r имеет мощность континуума.

Пусть ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, — случайная последовательность r -ичных цифр. Равенство

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r^{-n} = 0, \xi_1, \xi_2, \dots \quad (1)$$

стандартным образом определяет вероятностную меру μ на $[0, 1)$. Если ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, — последовательность стохастически независимых одинаково распределенных случайных (н.о.р.с.) цифр с невырожденным распределением $P = (p_0, \dots, p_{r-1})$, где $p_j = P\{\xi_n = j\}$, $j = 0, \dots, r-1$, то вероятностная мера $\mu = \mu_P$, определяемая равенством (1), непрерывна; $\mu_E = \lambda$, где $E = (r^{-1}, \dots, r^{-1})$. Множество невырожденных вероятностных r -векторов обозначим через $\mathcal{P}_r$. В [3] автором доказана

Теорема 1. Если ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, — последовательность н.о.р.с. r -ичных цифр с невырожденным распределением, то с вероятностью 1 случайное число ξ , определяемое равенством (1), нормально по любому основанию $g \not\sim r$, $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Иными словами, μ_P -почти все $x \in [0, 1)$ нормальны по всем основаниям $g \not\sim r$, $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, если $P \in \mathcal{P}_r$. Отсюда и из усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) следует теорема Касселса-Шмидта.

Заметка имеет две цели: показать, что многие уточнения теоремы Касселса-Шмидта являются простыми следствиями теоремы 1, и продемонстрировать устойчивость утверждения теоремы 1 (и метода [3] ее доказательства) относительно нарушения условий.

Пусть $M(P)$ — такое подмножество $[0, 1)$, что $P = (p_0, \dots, p_{r-1}) \in \mathcal{P}_r$ является вектором асимптотических частот цифр $0, \dots, r-1$ в r -ичной записи чисел $M(P)$. Согласно УЗБЧ, $\mu_P(M(P)) = 1$. Сужение μ_P на $M(P)$ есть *равномерная мера на $M(P)$* .

Следствие 1. Если $P \in \mathcal{P}_r$, $P \neq E$, то почти все, по равномерной мере, числа $M(P)$ являются CS_r -числами. В частности, множество $M(P) \cap CS_r$ имеет мощность континуума (ср. с [4]).

Следствие 2 (ср. с [5]). Хаусдорфова размерность множества CS_r равна единице.

Следствие 3 (ср. с [2, теорема 2]). При любом $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ любое $x \in [0, 1)$ представимо в виде суммы mod 1 четырех CS_r -чисел.

Пусть $C \subset [0, 1)$ есть канторово множество, состоящее из чисел, допускающих r -ичную запись цифрами из $S = \{j_1, \dots, j_s\} \subset \{0, \dots, r-1\}$, где $1 < s < r$, $r \geq 3$. Положим $p_j = s^{-1}$, если $j \in S$, и $p_j = 0$ в противном случае; $P = (p_0, \dots, p_{r-1})$. Сужение μ_P на C есть *мера Кантора*.

Следствие 4. Почти все, по мере Кантора, числа множества C являются r -числами Касселса-Шмидта.

При $r \geq 7$ и $S = \{0, r-1\}$ этот результат доказан в [6].

Теорема 2. Пусть последовательность ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, случайных r -ичных цифр является эргодической марковской со значениями в множестве $Q = \{j_1, \dots, j_q\} \subset \{0, \dots, r-1\}$, $2 \leq q \leq r$. Тогда с вероятностью 1 случайное число ξ , определяемое равенством (1), нормально по всем алгебраическим основаниям $\beta \neq r$, $\beta > 1$.

Доказательства следствий 1 и 4 тривиальны. Для доказательства следствия 2 применим следствие 1 и следующее утверждение, содержащееся в [7, гл. 4, п. 14]: если $A \subset M(P)$ и $\mu_P(A) > 0$, то $\dim A = \mathcal{E}(P)$, где $\dim A$ — хаусдорфова размерность множества A , $\mathcal{E}(P) = -\sum_{n=0}^{r-1} p_n \log_r p_n$ ($p \ln p = 0$ при $p = 0$). Утверждение следствия 2 вытекает теперь из элементарных свойств хаусдорфовой размерности (см., например, [7, гл. 4, п. 14]), поскольку $\sup_{P \in \mathcal{P}_r \setminus \{E\}} \mathcal{E}(P) = 1$.

Докажем следствие 3. Аналогично (1), определим вероятностную меру $\mu^{(1)}$ на $[0, 1)$ равенством

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r^{-2n} = 0, \xi_1 \xi_2 \dots, \quad (2)$$

в котором $\xi_1 = \xi_1^{(1)}$, $\xi_2 = \xi_2^{(1)}$, ... есть н.о.р.с. r^2 -ичные цифры с распределением $P^{(1)} \in \mathcal{P}_{r^2}$, где $p_j^{(1)} = r^{-1}$ при $j = 0, \dots, r-1$ и $p_j^{(1)} = 0$ при $j = r, \dots, r^2-1$. Определим также вероятностную меру $\mu^{(2)}$ на $[0, 1)$ равенством (2), в котором $\xi_1 = \xi_1^{(2)}$, $\xi_2 = \xi_2^{(2)}$, ... есть н.о.р.с. r^2 -ичные цифры с распределением $P^{(2)} \in \mathcal{P}_{r^2}$, где $p_{nr}^{(2)} = r^{-1}$ при $n = 0, 1, \dots, r-1$, а остальные компоненты $P^{(2)} \in \mathcal{P}_{r^2}$ — нулевые. При таком выборе $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ сверткой мер $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ является мера Лебега на $[0, 1)$: $\mu^{(1)} * \mu^{(2)} = \lambda$. Согласно УЗБЧ, $\mu^{(i)}$ -почти все $x \in [0, 1)$, $i = 1, 2$, имеют в r -ичной записи следующие асимптотические частоты r -ичных цифр: $p_0 = (r+1)/(2r)$, $p_1 = \dots = p_{r-1} = 1/(2r)$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что $\mu^{(1)}(\text{CS}_r) = \mu^{(2)}(\text{CS}_r) = 1$. Доказательство следствия 3 завершается теперь применением следующей леммы, абстрагированной из [2, п. 4].

Лемма 1. Пусть B — борелевское подмножество $[0, 1)$, λ_1 и λ_2 — вероятностные меры на $[0, 1)$, такие, что $\lambda_1 * \lambda_2 = \lambda$ и $\lambda_1(B) = \lambda_2(B) = 1$. Тогда любое $x \in [0, 1)$ представимо в виде суммы mod 1 четырех чисел из множества B .

Лемма 2. Пусть η — случайная величина (с.в.) со значениями в $[0, 1)$, $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — ее характеристическая функция (х.ф.). Пусть $g > 1$ вещественно. Если

$$\sup_{\gamma \geq 1} \sum_{n=0}^{N-1} |\varphi(2\pi\gamma g^n)| = O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right), \quad N \rightarrow \infty, \quad (3)$$

то с вероятностью 1 число η нормально по основанию g .

Доказательство. Согласно теореме Давенпорта-Эрдёша-Лебека [1, гл. I, теорема 4.2], если при любом $h \in \mathbb{N}$ сходится ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{-1} \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2\pi i h g^n \eta) \right|^2 = \sum_{N=1}^{\infty} N^{-3} \sum_{m,n=0}^{N-1} \varphi(2\pi h (g^m - g^n)), \quad (4)$$

то η почти наверное нормально по основанию g . Двойная сумма в (4) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{m,n=0}^{N-1} \varphi(2\pi h (g^m - g^n)) \leq N + 2 \sum_{m>n=0}^{N-1} |\varphi(2\pi h g^n (g^{m-n} - 1))| \\ &\leq N + 2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^{N-1} |\varphi(2\pi h g^n (g^m - 1))| \leq N + 2N \sup_{\gamma \geq g-1} \sum_{n=0}^{N-1} |\varphi(2\pi \gamma g^n)|. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $N_0 = N_0(g) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таково, что $(g-1)g^{N_0} \geq 1$. Тогда

$$\sup_{\gamma \geq g-1} \sum_{n=0}^{N-1} |\varphi(2\pi\gamma g^n)| \leq N_0 + \sup_{\gamma \geq 1} \sum_{n=0}^{N-1} |\varphi(2\pi\gamma g^n)|$$

и из (5) и (3) следует сходимость ряда (4). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\beta > 1$ есть алгебраическое, а $d > 1$ есть целое рациональное число, $\beta \not\sim d$. Пусть неотрицательная функция $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такова, что при некоторых $D > 0$ и $\theta \in (0, 1)$

$$1 - Dt^2 \leq \psi(t) \leq \psi(0) = 1, \quad (6)$$

$$\psi(2\pi t) \leq \theta \quad \text{при } \{t\} \in [d^{-2}, d^{-1}]. \quad (7)$$

Тогда при некотором $\delta \in (0, 1)$

$$\sup_{\gamma \geq 1} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{j=1}^{\infty} \psi(2\pi\gamma\beta^n d^{-j}) = O(N^{1-\delta}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Доказательство. Условие (6) обеспечивает сходимость произведения в (8). Для упорядоченного набора d -ичных цифр $(\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ с $\kappa_1 \neq 0$ обозначим через $\mathcal{N}(\kappa_1, \dots, \kappa_m; N)$ количество чисел $n \in \{0, \dots, N-1\}$, таких, что $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ являются цифрами m старших разрядов d -ичного разложения $\gamma\beta^n$:

$$\gamma\beta^n = \varepsilon_1 d^q + \varepsilon_2 d^{q-1} + \dots + \varepsilon_{q+1} + \varepsilon_{q+2} d^{-1} + \dots, \quad (9)$$

где $\varepsilon_1 \neq 0$, $q = q(n, \gamma) = [\log_d \gamma\beta^n] \geq 0$ при $\gamma \geq 1$, $\beta > 1$. Сформулированное условие $\kappa_1 = \varepsilon_1, \dots, \kappa_m = \varepsilon_m$ эквивалентно попаданию числа $\{\log_d \gamma + n \log_d \beta\}$ в промежуток $[\log_d \sum_{k=1}^m \kappa_k d^{-k+1}, \log_d (d^{-m+1} + \sum_{k=1}^m \kappa_k d^{-k+1}))$, длина которого не превосходит $d^{1-m} \ln^{-1} d$. Из справедливой в условиях леммы 3 оценки (17) [2] отклонения р. р. mod 1 последовательности $n \log_d \beta$, $n \in \mathbb{N}$, следует существование постоянных $c > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$, зависящих только от β и d , таких, что

$$\mathcal{N}(\kappa_1, \dots, \kappa_m; N) \leq Nd^{1-m} \ln^{-1} d + cN^{1-\varepsilon}. \quad (10)$$

(Независимость c и ε от γ следует из теоремы 1.3 и задач 2.9 и 2.10 гл. 2 [1].) Для $n \geq n_0 = n_0(m) = [m/\log_d \beta]$ обозначим через $\mathcal{M}(n)$ число пар вида $\varepsilon_{2j} = 0$, $\varepsilon_{2j+1} \neq 0$ в упорядоченном наборе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ цифр m старших разрядов разложения (9). Так как $q \geq m$ при $n \geq n_0$, то $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ — старшие цифры разложения целой части числа $\gamma\beta^n$, $n \geq n_0$. Поэтому каждой паре $\varepsilon_{2j} = 0$, $\varepsilon_{2j+1} \neq 0$ из набора $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ соответствует, согласно (7), неотрицательный сомножитель в бесконечном произведении из (8), не превосходящий θ . Следовательно, учитывая (6),

$$\sum_{n=0}^{N-1} \prod_{j=1}^{\infty} \psi(2\pi\gamma\beta^n d^{-j}) \leq n_0 + \sum_{n=n_0}^{N-1} \theta^{\mathcal{M}(n)}. \quad (11)$$

Используя (10), оценим правую часть (11), проводя суммирование по возможным значениям величины $\mathcal{M}(n)$, соответствующим различным наборам $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$. Имеем, полагая $K = [(m-1)/2]$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{j=1}^{\infty} \psi(2\pi\gamma\beta^n d^{-j}) &\leq n_0 + \left(\frac{Nd^{1-m}}{\ln d} + cN^{1-\varepsilon} \right) \sum_{j=0}^K \theta^j d(d-1) \binom{K}{j} \\ &\quad \times (d-1)^j (d^2 - d + 1)^{K-j} \\ &\leq \frac{m}{\log_d \beta} + \left(\frac{Nd^3}{\ln d} + cN^{1-\varepsilon} d^m \right) \left(1 - \frac{(1-\theta)(d-1)}{d^2} \right)^{m/2} \end{aligned}$$

равномерно по $\gamma \geq 1$. Полагая здесь $m = [\epsilon \log_d N]$, получаем (8) с $\delta = \epsilon(1 - \theta)/(2d^2)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — х.ф. с.в. ξ , удовлетворяющей условиям теоремы 2; $p_{s,t} = P\{\xi_{n+1} = t \mid \xi_n = s\}$, $s, t \in Q$, — переходные вероятности марковской цепи ξ_n , $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\nu \in \mathbb{N}$ таково, что все переходные вероятности $p_{s,t}^{(\nu)}$, $s, t \in Q$, цепи ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, за ν шагов положительны. Тогда найдется неотрицательная функция $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (6) и (7) с $d = r^{2\nu}$, такая, что

$$|\varphi(t)| \leq \prod_{j=1}^{\infty} \psi(tr^{-2\nu j}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Имеем в стандартных обозначениях для условного математического ожидания:

$$\begin{aligned} & E_{\xi_1 \xi_{2\nu+1} \dots \xi_{2\nu n+1}} \exp \left(it \sum_{m=1}^{2\nu n+1} \xi_m r^{-m} \right) \\ &= \exp \left(it \sum_{j=0}^n \xi_{2\nu j+1} r^{-2\nu j-1} \right) \prod_{j=1}^n \varphi(\xi_{2\nu(j-1)+1}, \xi_{2\nu j+1}; tr^{-2\nu j}), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_n, \xi_{n+2\nu}; t) &= \frac{1}{P_{\xi_n, \xi_{n+2\nu}}^{(2\nu)}} \sum_{k_2, k_3, \dots, k_{2\nu} \in Q} P_{\xi_n, k_2} P_{k_2, k_3} \dots P_{k_{2\nu-1}, k_{2\nu}} P_{k_{2\nu}, \xi_{n+2\nu}} \\ &\times \exp \left(it \sum_{m=2}^{2\nu} k_m r^{2\nu-m} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

— случайная, зависящая от с.в. ξ_n и $\xi_{n+2\nu}$ со значениями в Q , х.ф. некоторого решетчатого распределения с максимальным шагом (случайным) $H_{\xi}(n, n+2\nu) \in \{1, 2, \dots, r^{2\nu-1} - 1\}$, невырожденность которого следует из (13) и условия $p_{s,t}^{(\nu)} > 0$, $s, t \in Q$. Обозначим через $\varphi_{km}(t)$ значение $\varphi(\xi_{2\nu(j-1)+1}, \xi_{2\nu j+1}; t)$ при $\xi_{2\nu(j-1)+1} = k$, $\xi_{2\nu j+1} = m$ и через H_{km} — соответствующее значение $H_{\xi}(2\nu(j-1)+1, 2\nu j+1)$. Так как (см. [3, с. 65, (3)]) $|\varphi_{km}(2\pi t)| \leq \theta_{km} < 1$ при $\{tH_{km}\} \in [r^{-4\nu}, r^{-1})$, и, тем более, при $\{t\} \in [r^{-4\nu}, r^{-2\nu})$, то функция

$$\psi(t) := \max_{k, m \in Q} |\varphi_{km}(t)| \geq |\varphi(\xi_n, \xi_{n+2\nu}; t)|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

удовлетворяет условию (7) с $\theta = \max_{k, m \in Q} \theta_{km}$ и $d = r^{2\nu}$. Симметризуя х.ф. $\varphi_{km}(t)$, легко убедиться, следуя доказательству теоремы 3.7.3 [8], что $\psi(t)$ удовлетворяет условию (6) с $D = \max_{k, m \in Q} D_{km}$, где $D_{km} > 0$ есть дисперсия распределения с х.ф. $\varphi_{km}(t)$. Согласно (12), (13) и (14),

$$\left| E_{\xi_1 \xi_{2\nu+1} \dots \xi_{2\nu n+1}} \exp \left(it \sum_{m=1}^{2\nu n+1} \xi_m r^{-m} \right) \right| \leq \prod_{j=1}^n \psi(tr^{-2\nu j}). \quad (15)$$

Из (1) и (15) следует, что

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} E \exp \left(it \sum_{m=1}^{2\nu n+1} \xi_m r^{-m} \right) \right| \\ &\leq \left| \lim_{n \rightarrow \infty} E \left| E_{\xi_1 \xi_{2\nu+1} \dots \xi_{2\nu n+1}} \exp \left(it \sum_{m=1}^{2\nu n+1} \xi_m r^{-m} \right) \right| \right| \leq \prod_{j=1}^{\infty} \psi(tr^{-2\nu j}). \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 2 есть непосредственное следствие лемм 2–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985, 408 с.
2. Brown G., Moran W., Pearce C.E.M. Riesz products and normal numbers. — J. London Math. Soc. (2), 1985, v. 32, p. 12–18.
3. Пушкин Л.Н. Метрический вариант теоремы Касселса–Шмидта. — Матем. заметки, 1989, т. 46, в. 1, с. 60–66.
4. Volkmann B. On the Cassels–Schmidt theorem, I. — Bull. Sc. Math., 2^e série, 1984, t. 108, p. 321–336.
5. Nagasaka K. La dimension de Hausdorff de certains ensembles dans $[0, 1]$. — Proc. Japan Acad., Ser. A, 1978, v. 54, p. 109–112.
6. Pearce C.E.M., Keane M.S. On normal numbers. — J. Austral. Math. Soc., Ser. A, 1982, v. 32, № 1, p. 79–87.
7. Биллингслий П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969, 240 с.
8. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979, 424 с.

Поступила в редакцию
6.X.1993

© 1996 г.

РАДЧЕНКО В. Н.*

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА ОТ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Рассматривается интеграл от измеримой случайной функции $\xi(x)$ по неотрицательной мере m . Показано, что такой интеграл может вводиться как предел по вероятности интегралов от простых случайных функций. Доказан аналог теоремы Лебега для сходимости по вероятности $\int \xi_n(x) dm$, $n \rightarrow \infty$. Получен критерий того, чтобы случайная мера представлялась в виде такого интеграла.

Ключевые слова и фразы: случайная функция, теорема Лебега, случайная функция множеств.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, X — метрическое сепарабельное пространство, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра подмножеств X , m — конечная неотрицательная мера на $\mathcal{B}$. Пусть $\xi(x) = \xi(x, \omega): X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — случайная функция (с.ф.), $\mathcal{F}$ -измеримая при каждом фиксированном x . Для случайных величин η положим $\|\eta\| = E(|\eta|/(1 + |\eta|))$. Известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n\| = 0 \iff p \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0.$$

Интеграл от $\xi(x)$ по m может быть определен для $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ -измеримой $\xi(x, \omega)$ как обычный интеграл Лебега при каждом фиксированном ω . Интеграл, определенный

*Киевский национальный университет, мех.-мат. факультет, кафедра теории вероятностей, ул. Владимирская, 64, 252017 Киев, Украина.