Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Е. Бродский, Б. С. Дарховский, Минимаксные последовательные тесты проверки многих сложных гипотез. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 1, 3–15

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:05:36

© 2008 г. БРОДСКИЙ Б. Е.*, ДАРХОВСКИЙ Б. С.**

МИНИМАКСНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕСТЫ
ПРОВЕРКИ МНОГИХ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ. II

В статье рассматривается задача последовательной проверки нескольких сложных гипотез. Каждая из гипотез описывается плотностью, зависящей от параметра, который может принадлежать одному из непересекающихся множеств. Предлагаются новые критерии качества для последовательных односторонних и многосторонних тестов и устанавливаются неасимптотические априорные нижние границы для предложенных критериев. Найдены последовательные тесты, использующие процедуру взятия минимакса по параметрическим множествам для последовательного отношения правдоподобия, на которых асимптотически достигаются априорные нижние границы критериев. Все доказательства отнесены в часть II.

Ключевые слова и фразы: проверка сложных гипотез, последовательные тесты.

5. Доказательства.

5.1. Односторонние тесты. Доказательство теоремы 1. Пусть $\nu_i(c_i)$ — невырожденный односторонний м.о. Пусть $N_i(c_i)$ — такое положительное целое число, что $N_i(c_i) \stackrel{\text{def}}{=} N_i = \min\{n: \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}_{u_i(\cdot)}\{\nu_i(c_i) = k\} \leq \Gamma_i(c_i)\}$. Положим $\tilde{\nu}_i(c_i) = \nu_i(c_i) \wedge N_i$. Тогда, в силу определения $\Gamma_i(c_i)$ и условия $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i$, получаем, используя неравенство Иенсена, что

$$\begin{aligned} \Gamma_i(c_i) N_i &\geq \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{P}_{u_i(\cdot)}(\tilde{\nu}_i(c_i) = k) = \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{E}_{\theta_i} \left\{ \mathbb{I}(\tilde{\nu}_i(c_i) = k) \prod_{i=1}^k \frac{f(u_i(\cdot), x_i)}{f(\theta_i, x_i)} \right\} \\ &= \mathbf{E}_{\theta_i} \exp \left(- \sum_{i=1}^{\tilde{\nu}_i(c_i)} \ln \frac{f(\theta_i, x_i)}{f(u_i(\cdot), x_i)} \right) \\ &\geq \exp \left(- \mathbf{E}_{\theta_i} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{\nu}_i(c_i)} \ln \frac{f(\theta_i, x_i)}{f(u_i(\cdot), x_i)} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

* Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский пр-т, 47, 117218 Москва, Россия; e-mail: bbrodsky@yandex.ru

** Институт системного анализа РАН, пр-т 60-летия Октября, 9, 117312 Москва, В-312, Россия; e-mail: darbor@isa.ru

Используя тождество Вальда, из (5.1) получаем

$$\Gamma_i(c_i) N_i \geq \exp(-\mathbf{E}_{\theta_i}(\nu_i(c_i) \wedge N_i) \mathbf{I}_i(\theta_i)). \quad (5.2)$$

Так как $\nu_i(c_i) \in \mathcal{M}$, то $\mathbf{E}_{\theta_i}(\nu_i(c_i) \wedge N_i) \leq \mathbf{E}_{\theta_i} \nu_i(c_i)$ и из (5.2), учитывая невырожденность теста, получаем

$$\frac{\mathbf{E}_{\theta_i} \nu_i(c_i)}{|\ln \Gamma_i(c_i)|} \geq \mathbf{I}_i^{-1}(\theta_i) \left(1 - \frac{\ln N_i}{|\ln \Gamma_i(c_i)|}\right), \quad (5.3)$$

что и требовалось.

Доказательство теоремы 2. Мы приведем доказательство асимптотической оптимальности м.о. $T_0(c_0)$ (для м.о. $T_i(c_i)$, $i \neq 0$, доказательство проводится аналогично). Для упрощения обозначений мы будем использовать символ c вместо c_0 .

Доказательство теоремы 2 разбито на несколько лемм. Для произвольного элемента $z_0 = (\theta_0, u)$, где $\theta_0 \in \Theta_0$ и $u \in \mathcal{U}_0 = \Theta \setminus \Theta_0$, и произвольного $\tilde{u} \in \mathcal{U}_0$ рассмотрим м.о.

$$\nu_c(z_0) = \inf \left\{ n: \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c \right\}$$

и положим

$$\delta_0(c, z_0, \tilde{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \mathbf{P}_{\tilde{u}} \left\{ \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c \right\}.$$

В частности, при $\tilde{u} = u_0(\cdot)$ получаем

$$\Gamma_0(c, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \left\{ \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c \right\}$$

(напомним, что θ_0 — это произвольная точка из Θ_0 и $u_0(\cdot)$ определяется по θ_0 так же, как в п. 3).

Лемма 1. Для любого $z_0 \in \mathcal{Z}_0$ и любого $\theta_0^* \in \Theta_0$ справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\nu_c(z_0)}{c} = \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} \quad \mathbf{P}_{\theta_0^*}\text{-п.н.}; \quad (5.4)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}_{\theta_0^*} \nu_c(z_0)}{c} = \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1}.$$

В силу условий 2.5 и 2.6 утверждение леммы следует из [34, с. 42–47].

Лемма 2. Имеет место следующее соотношение:

$$\liminf_{c \rightarrow \infty} \frac{|\ln \delta_0(c, z_0, \tilde{u})|}{c} \geq t_0^*(z_0, \tilde{u}), \quad (5.5)$$

где функция $t_0^*(z_0, u^*)$ определена в условии 2.7. В частности,

$$\liminf_{c \rightarrow \infty} \frac{|\ln \Gamma_0(c, z_0)|}{c} \geq t_0^*(z_0, u_0(\cdot)).$$

Соотношение (5.5) выполняется равномерно по $z_0 \in \mathcal{Z}_0$ для любого $\tilde{u} \in \mathcal{U}_0$.

Доказательство этой леммы получается небольшой модификацией доказательства, приведенного в [30, с. 261]. Это доказательство использует условия 2.6, 2.7. Равномерность следует из условия 2.6.

Лемма 3. Для любого $\theta_0^* \in \Theta_0$ справедливы соотношения

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{T_0(c)}{c} = \max_{u \in \mathcal{U}_0} \min_{\theta_0 \in \Theta_0} \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} = \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) \quad \mathbf{P}_{\theta_0^*}\text{-п.н.} \quad (5.6)$$

Заметим, что второе равенство в правой части (5.6) следует из неравенства

$$\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0, \cdot)}{f(u, \cdot)} \leq \mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0^*, \cdot)}{f(u, \cdot)}$$

и определения точки $u_0^*(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} u_0(\theta_0^*)$.

Доказательство этой леммы разбито на несколько предложений. Для произвольного $u \in \mathcal{U}_0$ положим

$$\mathcal{N}_0(c, u) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ n: \max_{\theta_0 \in \Theta_0} \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c \right\}.$$

Предложение 1. Для любого $\theta_0^* \in \Theta_0$ следующее соотношение имеет место $\mathbf{P}_{\theta_0^*}$ -п.н.:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_0(c, u)}{c} \leq \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0^*, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1}. \quad (5.7)$$

Доказательство. В силу определения м.о. $\mathcal{N}_0(c, u)$ и $\nu_c(z_0)$ имеем

$$\mathcal{N}_0(c, u, \omega) \leq \nu_c(\theta_0, u, \omega)$$

для любых $\theta_0 \in \Theta_0$, ω (и любого $u \in \mathcal{U}_0$) и поэтому

$$\mathcal{N}_0(c, u) \leq \inf_{\theta_0 \in \Theta_0} \nu_c(\theta_0, u). \quad (5.8)$$

Из (5.8), принимая во внимание лемму 1, получаем, что $\mathbf{P}_{\theta_0^*}$ -п.н. для произвольной точки $\theta_0^* \in \Theta_0$

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_0(c, u)}{c} &\leq \lim_{c \rightarrow \infty} \inf_{\theta_0 \in \Theta_0} \frac{\nu_c(z_0)}{c} \leq \inf_{\theta_0 \in \Theta_0} \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\nu_c(z_0)}{c} \\ &= \inf_{\theta_0 \in \Theta_0} \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} = \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0^*, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Предложение 1 доказано.

Пусть $\tilde{\Theta} \subset \Theta$, $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}_0, \tilde{\mathcal{U}}_0)$, — счетное всюду плотное множество.

Предложение 2. Для любого ω существует элемент $\theta_0(\omega) \in \tilde{\Theta}_0$ такой, что

$$\nu_c(\theta_0(\omega), u, \omega) \leq \mathcal{N}_0(c, u, \omega). \quad (5.9)$$

Доказательство. Если $\mathcal{N}_0(c, u, \omega) = +\infty$, то результат тривиален, и мы можем в качестве $\theta_0(\omega)$ выбрать любую точку $\theta_0 \in \tilde{\Theta}_0$. Поэтому рассмотрим только те ω , для которых $\mathcal{N}_0(c, u, \omega) < \infty$. Допустим, что предположение неверно. Тогда для некоторого ω_0 , такого, что $\mathcal{N}_0(c, u, \omega_0) = k$, получаем для произвольного $\theta_0 \in \tilde{\Theta}_0$ неравенство

$$\nu_c(\theta_0, u, \omega_0) > \mathcal{N}_0(c, u, \omega_0).$$

Это означает, что (для последовательности $\{x_s\}$, соответствующей ω_0) $\sum_{s=1}^k \ln[f(\theta_0, x_s)/f(u, x_s)] \leq c$ для любого $\theta_0 \in \tilde{\Theta}_0$, и поэтому

$$\sup_{\theta_0 \in \tilde{\Theta}_0} \sum_{s=1}^k \ln \frac{f(\theta_0, x_s)}{f(u, x_s)} \leq c. \quad (5.10)$$

Но для произвольной непрерывной функции $g(\theta_0)$ имеем

$$\sup_{\theta_0 \in \tilde{\Theta}_0} g(\theta_0) = \sup_{\theta_0 \in \Theta_0} g(\theta_0).$$

Следовательно, из (5.10) вытекает, что $\mathcal{N}_0(c, u, \omega_0) > k$, а это противоречит предположению $\mathcal{N}_0(c, u, \omega_0) = k$. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Для любого $\theta_0^* \in \Theta_0$

$$\mathbf{P}_{\theta_0^*} \left\{ \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0^*, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} \leq \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_0(c, u)}{c} \right\} = 1. \quad (5.11)$$

Доказательство. Пусть θ_0^* — произвольная точка из Θ_0 . Тогда для каждого $\theta_0 \in \tilde{\Theta}_0$ существует множество нулевой $\mathbf{P}_{\theta_0^*}$ -меры, на котором нет сходимости в смысле леммы 1. Выбросим из множества Ω объединение по $\theta_0 \in \tilde{\Theta}_0$ всех таких нулевых множеств. В силу счетности $\tilde{\Theta}_0$ это объединение тоже имеет нулевую $\mathbf{P}_{\theta_0^*}$ -меру. Обозначим через Ω^* оставшееся множество. Очевидно, что $\mathbf{P}_{\theta_0^*}(\Omega^*) = 1$ и лемма 1 справедлива для всех точек множества Ω^* .

Из (5.4) и (5.9) получаем, что для всех точек $\omega \in \Omega^*$ и $\theta_0(\omega) \in \tilde{\Theta}_0$

$$\begin{aligned} \min_{\theta_0 \in \tilde{\Theta}_0} \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} &\leq \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0(\omega), \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\nu_c(\theta_0(\omega), u, \omega)}{c} \\ &\leq \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_0(c, u, \omega)}{c}, \end{aligned}$$

т.е. имеет место (5.11). Предложение 3 доказано.

Предложение 4. Для любых точек $\theta_0^* \in \Theta_0$, $u \in \mathcal{U}_0$ следующее соотношение имеет место $\mathbf{P}_{\theta_0^*}$ -п.н.:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_0(c, u)}{c} = \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0^*, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1}.$$

Доказательство немедленно следует из (5.7) и (5.11).

Предложение 5. Для любого $\theta_0^* \in \Theta_0$ следующее соотношение имеет место $\mathbf{P}_{\theta_0^*}$ -п.н.:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{T_0(c)}{c} \geq \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0^*, \cdot)}{f(u_0^*(\cdot), \cdot)} \right)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*). \quad (5.12)$$

Доказательство. В силу определения м.о. $\mathcal{N}_0(c, u)$ и $T_0(c)$ имеем

$$\mathcal{N}_0(c, u, \omega) \leq T_0(c, \omega)$$

для любых $u \in \mathcal{U}_0$, ω , и поэтому

$$\sup_{u \in \mathcal{U}_0} \mathcal{N}_0(c, u) \leq T_0(c). \quad (5.13)$$

Из (5.13), учитывая предложение 4, получаем, что $\mathbf{P}_{\theta_0^*}$ -п.н. для любой точки $\theta_0^* \in \Theta_0$

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{T_0(c)}{c} &\geq \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathcal{U}_0} \frac{\mathcal{N}_0(c, u)}{c} \geq \sup_{u \in \mathcal{U}_0} \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_0(c, u)}{c} \\ &= \sup_{u \in \mathcal{U}_0} \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0^*, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*). \end{aligned}$$

Предложение 5 доказано.

Предложение 6. Для любого ω существует $u(\omega) \in \widetilde{\mathcal{U}}_0$ такой, что

$$\mathcal{N}_0(c, u(\omega), \omega) \geq T_0(c, \omega). \quad (5.14)$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.

Предложение 7. Для любого $\theta_0^* \in \Theta_0$

$$\mathbf{P}_{\theta_0^*} \left\{ \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) \geq \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{T_0(c)}{c} \right\} = 1. \quad (5.15)$$

Доказательство. Пусть $\theta_0^* \in \Theta_0$. Тогда для каждого $u \in \widetilde{\mathcal{U}}_0$ существует множество нулевой $\mathbf{P}_{\theta_0^*}$ -меры, на котором нет сходимости в смысле предложения 4. Выбросим из Ω объединение по $u \in \widetilde{\mathcal{U}}_0$ всех таких множеств. В силу счетности $\widetilde{\mathcal{U}}_0$ такое объединение тоже имеет $\mathbf{P}_{\theta_0^*}$ -меру нуль. Обозначим Ω^{**} оставшееся множество. Тогда $\mathbf{P}_{\theta_0^*}(\Omega^{**}) = 1$ и для всех точек из Ω^{**} выполняется соотношение из предложения 4.

Из (5.14) и предложения 4 следует, что для всех точек $\omega \in \Omega^{**}$ и $u(\omega) \in \widetilde{\mathcal{U}}_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) &= \max_{u \in \widetilde{\mathcal{U}}_0} \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0^*, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} \geq \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0^*, \cdot)}{f(u(\omega), \cdot)} \right)^{-1} \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_0(c, u(\omega), \omega)}{c} \geq \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{T_0(c, \omega)}{c}, \end{aligned}$$

т.е. мы получили (5.15). Предложение 7 доказано.

Лемма 3 следует из предложений 5 и 7.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу условий 2.1, 2.4 и 2.7 существует $a(\varepsilon)$ такое, что для соответствующих конечных множеств $\Theta_0(a(\varepsilon)) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_0(\varepsilon)$, $\#\Theta_0(\varepsilon) \leq R(\varepsilon)$ и $\mathcal{U}_0(a(\varepsilon)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_0(\varepsilon)$, $\#\mathcal{U}_0(\varepsilon) \leq R(\varepsilon)$, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \left| \max_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \min_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} - \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) \right| \leq \varepsilon, \\ & \left| \max_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \min_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} t_0^*(z_0, u_0^*) - \max_{u \in \mathcal{U}_0} \min_{\theta_0 \in \Theta_0} t_0^*(z_0, u_0^*) \right| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Рассмотрим м.о.

$$T_0(c, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ n: \min_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \max_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c \right\}. \quad (5.17)$$

Лемма 4. Для момента остановки (5.17) и любого $\theta_0^* \in \Theta_0$ имеют место соотношения

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}_{\theta_0^*} T_0(c, \varepsilon)}{c} = \max_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \min_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} \leq \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) + \varepsilon. \quad (5.18)$$

Доказательство. В силу условия 2.5 семейство (по c) случайных величин $\{\nu_c(z_0)/c\}$ равномерно интегрируемо для любого z_0 (см. [34, с. 47]). Поскольку множества $\Theta_0(\varepsilon)$, $\mathcal{U}_0(\varepsilon)$ конечны, семейство случайных величин $\{T_0(c, \varepsilon)/c\}$ также равномерно интегрируемо. Отсюда следует существование предела в (5.18) и утверждение леммы следует из леммы 3 и соотношений (5.16). Лемма 4 доказана.

Напомним, что $u_0^*(\cdot) = u_0(\theta_0^*)$ определяется по $\theta_0^* \in \Theta_0$ так, как описано в п. 3, и

$$\begin{aligned} \Gamma_0^\varepsilon(c) &= \sup_n \mathbf{P}_{u_0^*(\cdot)} \{ \tilde{d}_0(n, c, \varepsilon) = 0 \} \\ &= \sup_n \mathbf{P}_{u_0^*(\cdot)} \left\{ \min_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \max_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 5. Справедливо неравенство

$$\liminf_{c \rightarrow \infty} \frac{|\ln \Gamma_0^\varepsilon(c)|}{c} \geq \max_{u \in \mathcal{U}_0} \min_{\theta_0 \in \Theta_0} t_0^*(z_0, u_0^*(\cdot)) - \varepsilon \quad (5.19)$$

(напомним, что $z_0 = (\theta_0, u)$).

Доказательство. Пусть $\xi_i, \eta_j, i, j = 1, \dots, N$, — неотрицательные случайные величины. Воспользуемся элементарным неравенством

$$\mathbf{P} \left\{ \min_{1 \leq j \leq N} \max_{1 \leq i \leq N} \xi_i \eta_j > c \right\} \leq N \min_{1 \leq j \leq N} \max_{1 \leq i \leq N} \mathbf{P} \{ \xi_i \eta_j > c \}. \quad (5.20)$$

Из (5.20) и условия непрерывности 2.3 получаем

$$\begin{aligned} & \ln R(\varepsilon) + \min_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \max_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \ln \mathbf{P}_{u_0^*(\cdot)} \left\{ \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c \right\} \\ & \geq \ln \mathbf{P}_{u_0^*(\cdot)} \left\{ \min_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \max_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c \right\}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Поскольку (5.20) справедливо для любого N , из леммы 2 получаем

$$\liminf_{c \rightarrow \infty} \frac{|\ln \Gamma_0^\varepsilon(c)|}{c} \geq \max_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \min_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} t_0^*(z_0, u_0^*(\cdot)). \quad (5.22)$$

Из (5.22) и (5.16) вытекает требуемый результат. Лемма 5 доказана.

З а м е ч а н и е 5.1. Если положить (напомним, что $\tilde{u} \in \mathcal{U}_0$)

$$\begin{aligned} \delta_0^\varepsilon(c, \tilde{u}) &= \sup_n \mathbf{P}_{\tilde{u}} \{ \tilde{d}_0(n, c, \varepsilon) = 0 \} \\ &= \sup_n \mathbf{P}_{\tilde{u}} \left\{ \min_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \max_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c \right\}, \end{aligned}$$

то аналогичным образом устанавливается, что

$$\liminf_{c \rightarrow \infty} \frac{|\ln \delta_0^\varepsilon(c, \tilde{u})|}{c} \geq \max_{u \in \mathcal{U}_0} \min_{\theta_0 \in \Theta_0} t_0^*(z_0, \tilde{u}) - \varepsilon.$$

Теперь мы можем завершить доказательство первого утверждения теоремы 2 для $i = 0$. Очевидно, что тест $\tilde{d}_0(n, c, \varepsilon)$ невырожден. Покажем, что условие (A) выполняется для $T_0(c, \varepsilon)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{u_0^*(\cdot)} \{ T_0(c, \varepsilon) = n \} &\leq \mathbf{P}_{u_0^*(\cdot)} \{ \tilde{d}_0(n, c, \varepsilon) = 0 \} \\ &= \mathbf{P}_{u_0^*(\cdot)} \left\{ \min_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \max_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u, x_k)} > c_i \right\} \\ &\leq \mathbf{P}_{u_0^*(\cdot)} \left\{ \max_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u_0^*(\cdot), x_k)} > c_i \right\} \\ &\leq R(\varepsilon) \max_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \mathbf{P}_{u_0^*(\cdot)} \left\{ \sum_{k=1}^n \ln \frac{f(\theta_0, x_k)}{f(u_0^*(\cdot), x_k)} > c_i \right\}. \end{aligned}$$

Последняя вероятность в этом неравенстве может быть оценена так же, как в (3.2), если учесть, что, в силу условия 2.6, $\mathbf{E}_{u_0^*(\cdot)} \ln[f(\theta_0, x_k)/f(u_0^*(\cdot), x_k)] \leq m < 0$. Таким образом, для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ условие (A) выполнено для м.о. $T_0(c, \varepsilon)$. Поэтому

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathcal{K}_0(T_0(c, \varepsilon), \theta_0^*) \geq \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*).$$

Используя это неравенство, а также соотношения (5.18) и (5.19), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) &\leq \limsup_{c \rightarrow \infty} \mathcal{K}_0(T_0(c, \varepsilon), \theta_0^*) \leq \frac{\limsup_{c \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\theta_0^*} T_0(c, \varepsilon)/c}{\liminf_{c \rightarrow \infty} |\ln \Gamma_0^\varepsilon(c)|/c} \\ &\leq \frac{\mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) + \varepsilon}{\max_{u \in \mathcal{U}_0} \min_{\theta_0 \in \Theta_0} t_0^*(z_0, u_0^*(\cdot)) - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Но для $z_0 = (\theta_0, u_0^*)$ имеем (см. определение в условии 2.7)

$$t_0^*(\theta_0, u_0^*(\cdot), u_0^*(\cdot)) \equiv 1,$$

и поэтому

$$\max_{u \in \mathcal{U}_0} \min_{\theta_0 \in \Theta_0} t_0^*(z_0, u_0^*(\cdot)) \geq \min_{\theta_0 \in \Theta_0} t_0^*(\theta_0, u_0^*(\cdot), u_0^*(\cdot)) = 1. \quad (5.24)$$

Первое утверждение теоремы 2 для $i = 0$ следует теперь из (5.23) и (5.24).

Второе утверждение теоремы 2 было уже установлено в лемме 5.

5.2. Многосторонние тесты. Доказательство теоремы 3. Без ограничения общности рассмотрим случай трех сложных гипотез: $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$. Пусть $\theta_0 \in \Theta_0$ — произвольная (но фиксированная) точка и $u_0(\theta_0) = u_0(\cdot) \in \Theta_1 \cup \Theta_2$ — точка из определения (3.1).

Рассмотрим событие $R_0 = \{\text{принять } \mathbf{H}_0\}$ (другими словами, $R_0 = \{\text{отвергнуть } \mathbf{H}_1 \text{ и } \mathbf{H}_2\}$). Через R_0^r обозначим событие $\{\text{отвергнуть } \mathbf{H}_0\}$.

Пусть $d_c(n)$ — решающее правило произвольного невырожденного теста, $\tau_c \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{n: d_c(n) \neq -1\}$.

Пусть $M_0(c) \stackrel{\text{def}}{=} M_0$ — такое положительное целое число, что $M_0 = \min\{n: \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}_{u_0(\cdot)}\{\tau_c = k\} \leq \gamma_0(c)\}$. Тогда, в силу определения $\gamma_0(c)$, получаем

$$\begin{aligned} M_0 \gamma_0(c) &\geq \sum_{k=1}^{M_0} \mathbf{P}_{u_0(\cdot)}(\{\tau_c \wedge N = k\} \cap R_0) \\ &= \sum_{k=1}^{M_0} \mathbf{E}_{\theta_0} \left(\mathbb{I}(\tau_c \wedge M_0 = k) \mathbb{I}(R_0) \prod_{i=1}^k \frac{f(u_0(\cdot), x_i)}{f(\theta_0, x_i)} \right) \\ &= \mathbf{E}_{\theta_0} \left(\prod_{i=1}^{\tau_c \wedge M_0} \frac{f(u_0(\cdot), x_i)}{f(\theta_0, x_i)} \mathbb{I}(R_0) \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_{\theta_0}\{d_c(\tau_c \wedge M_0) = 0\} \\ &= 1 - [\mathbf{P}_{\theta_0}\{d_c(\tau_c \wedge M_0) = 1\} + \mathbf{P}_{\theta_0}\{d_c(\tau_c \wedge M_0) = 2\}] \\ &\geq 1 - \alpha_{01}(c) - \alpha_{02}(c) \end{aligned}$$

и тест невырожден, из (5.25) и неравенства Иенсена имеем

$$\begin{aligned}
 M_0 \gamma_0(c) &\geq \mathbf{E}_{\theta_0} \left\{ \exp \left(- \sum_{i=1}^{\tau_c \wedge M_0} \ln \frac{f(\theta_0, x_i)}{f(u_0(\cdot), x_i)} \right) \middle| R_0 \right\} (1 - \alpha_{01}(c) - \alpha_{02}(c)) \\
 &\geq \exp \left\{ - \mathbf{E}_{\theta_0} \left(\sum_{i=1}^{\tau_c \wedge M_0} \ln \frac{f(\theta_0, x_i)}{f(u_0(\cdot), x_i)} \mathbb{I}(R_0) \right) (1 - \alpha_{01}(c) - \alpha_{02}(c))^{-1} \right\} \\
 &\quad \times (1 - \alpha_{01}(c) - \alpha_{02}(c)).
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Из (5.26) следует, что

$$\begin{aligned}
 (1 - \alpha_{01}(c) - \alpha_{02}(c)) &\left[- \ln(M_0 \gamma_0(c)) + \ln(1 - \alpha_{01}(c) - \alpha_{02}(c)) \right] \\
 &\leq \mathbf{E}_{\theta_0} \left(\sum_{i=1}^{\tau_c \wedge M_0} \ln \frac{f(\theta_0, x_i)}{f(u_0(\cdot), x_i)} \mathbb{I}(R_0) \right).
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Далее,

$$\mathbf{P}_{u_0(\cdot)}(\{\tau_c \wedge M_0 = k\} \cap R_0^r) = \mathbf{P}_{u_0(\cdot)}(\{\tau_c = k\} \cap R_0^r) \geq \rho_0(c),$$

при $k = 1, \dots, M_0 - 1$ и

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{u_0(\cdot)}(\{\tau_c \wedge M_0 = M_0\} \cap R_0) &= \mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \left(\bigcup_{k=M_0}^{\infty} (\{\tau_c = k\} \cap R_0) \right) \\
 &\geq \mathbf{P}_{u_0(\cdot)}(\{\tau_c = M_0\} \cap R_0) \geq \rho_0(c),
 \end{aligned}$$

и, поэтому,

$$\mathbf{P}_{u_0(\cdot)}(\{\tau_c \wedge M_0 = k\} \cap R_0^r) \leq 1 - \mathbf{P}_{u_0(\cdot)}(\{\tau_c \wedge M_0 = k\} \cap R_0) \leq (1 - \rho_0(c)),$$

$k = 1, \dots, M_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 M_0(1 - \rho_0(c)) &\geq \sum_{k=1}^{M_0} \mathbf{P}_{u_0(\cdot)}(\{\tau_c \wedge M_0 = k\} \cap R_0^r) \\
 &= \sum_{k=1}^{M_0} \mathbf{E}_{\theta_0} \left(\mathbb{I}(\tau_c \wedge M_0 = k) \mathbb{I}(R_0^r) \prod_{i=1}^k \frac{f(u_0(\cdot), x_i)}{f(\theta_0, x_i)} \right) \\
 &= \mathbf{E}_{\theta_0} \left(\mathbb{I}(R_0^r) \prod_{i=1}^{\tau_c \wedge M_0} \frac{f(u_0(\cdot), x_i)}{f(\theta_0, x_i)} \right).
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{d_c(\tau_c \wedge M_0) = 1\} \geq \beta_{01}(c), \quad \mathbf{P}_{\theta_0}\{d_c(\tau_c \wedge M_0) = 2\} \geq \beta_{02}(c),$$

то

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_{\theta_0} \left(\mathbb{I}(R_0^r) \prod_{i=1}^{\tau_c \wedge M_0} \frac{f(u_0(\cdot), x_i)}{f(\theta_0, x_i)} \right) \\
& \geq \mathbf{E}_{\theta_0} \left\{ \exp \left(- \sum_{i=1}^{\tau_c \wedge M_0} \ln \frac{f(\theta_0, x_i)}{f(u_0(\cdot), x_i)} \right) \middle| \mathbb{I}(R_0^r) \right\} (\beta_{01}(c) + \beta_{02}(c)) \\
& \geq \exp \left\{ - \mathbf{E}_{\theta_0} \left(\sum_{i=1}^{\tau_c \wedge M_0} \ln \frac{f(\theta_0, x_i)}{f(u_0(\cdot), x_i)} \mathbb{I}(R_0^r) \right) (\beta_{01}(c) + \beta_{02}(c))^{-1} \right\} \\
& \quad \times (\beta_{01}(c) + \beta_{02}(c)). \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Из (5.28) и (5.29) имеем

$$\begin{aligned}
& (\beta_{01}(c) + \beta_{02}(c)) \left[-\ln(M_0(1 - \rho_0(c))) + \ln(\beta_{01}(c) + \beta_{02}(c)) \right] \\
& \leq \mathbf{E}_{\theta_0} \left(\mathbb{I}(R_0^r) \prod_{i=1}^{\tau_c \wedge M_0} \frac{f(\theta_0, x_i)}{f(u_0(\cdot), x_i)} \right). \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Суммируя (5.27) и (5.30) и используя тождество Вальда и соотношение $\mathbf{E}_{\theta_0}(\tau_c \wedge M_0) \leq \mathbf{E}_{\theta_0} \tau_c$, получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{I}_0(\theta_0) \mathbf{E}_{\theta_0} \tau_c \geq (1 - \alpha_{01}(c) - \alpha_{02}(c)) \\
& \quad \times \left[-\ln(M_0 \gamma_0(c)) + \ln(1 - \alpha_{01}(c) - \alpha_{02}(c)) \right] + (\beta_{01}(c) + \beta_{02}(c)) \\
& \quad \times \left[-\ln(M_0(1 - \rho_0(c))) + \ln(\beta_{01}(c) + \beta_{02}(c)) \right]. \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Из (5.31) получаем результат, соответствующий утверждению теоремы 3 для рассматриваемой ситуации.

Доказательство теоремы 4. Без ограничения общности вновь рассмотрим три сложные гипотезы $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$. Определим м.о. $T_1(c_1, \varepsilon), T_2(c_2, \varepsilon)$ аналогично (5.17) и рассмотрим м.о. $T(c, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} T_0(c_0, \varepsilon) \wedge T_1(c_1, \varepsilon) \wedge T_2(c_2, \varepsilon)$ и соответствующее решающее правило $d_c^*(n, \varepsilon)$.

Пусть $\theta_i^* \in \Theta_i$, $i = 0, 1, 2$, — произвольные (но фиксированные) точки.

Выберем число $\varepsilon > 0$ из (5.16) и аналогичных соотношений для функций $\mathbf{I}_i^{-1}(\theta_i^*)$, $i = 1, 2$, и $t_i^*(z_i, u_i)$, $i = 1, 2$.

По определению м.о. $T(c, \varepsilon)$ и из леммы 4 следует, что для любого $\theta_0^* \in \Theta_0$

$$\begin{aligned}
\lim_{c_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}_{\theta_0^*} T(c, \varepsilon)}{c_0} & \leq \lim_{c_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}_{\theta_0^*} T_0(c_0, \varepsilon)}{c_0} = \max_{u \in \mathcal{U}_0(\varepsilon)} \min_{\theta_0 \in \Theta_0(\varepsilon)} \left(\mathbf{E}_{\theta_0^*} \ln \frac{f(\theta_0, \cdot)}{f(u, \cdot)} \right)^{-1} \\
& \leq \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) + \varepsilon. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Пусть ζ — случайная величина, не зависящая от наблюдений $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и принимающая равновероятные значения на множестве индексов $I(T(c, a))$. Тогда решающее правило $d_c^*(n, a)$ можно записать следующим образом:

$$d_c^*(n, a) = \begin{cases} i, & \text{если } n = T(c, a) = T_i(c_i, a) < T_j(c_j, a), \\ & j \neq i, \quad i, j \in I, \\ j, & \text{если } n = T(c, a), \#I(T(c, a)) > 1, \\ & \zeta = j, \quad j \in I(T(c, a)), \\ -1, & \text{если } T(c, a) > n. \end{cases}$$

Из определения вероятности ложного решения имеем

$$\begin{aligned} \gamma_0^*(c_0, \varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \{d_c^*(n, \varepsilon) = 0\} \\ &= \sup_n \mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \{T(c, \varepsilon) = n, I(T(c, \varepsilon)) = \{0\} \text{ или } T(c, \varepsilon) = n, \\ &\quad 0 \in I(T(c, \varepsilon)), \#I(T(c, \varepsilon)) > 1 \text{ и } \zeta = 0\} \\ &\leq \sup_n (\mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \{n = T(c, \varepsilon) = T_0(c, \varepsilon), I(T(c, \varepsilon)) = \{0\}\} \\ &\quad + \mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \{n = T(c, \varepsilon) = T_0(c, \varepsilon), I(T(c, \varepsilon)) = \{0, 1, 2\}, \zeta = 0\} \\ &\quad + \mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \{n = T(c, \varepsilon) = T_0(c, \varepsilon), I(T(c, \varepsilon)) = \{0, 1\}, \zeta = 0\} \\ &\quad + \mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \{n = T(c, \varepsilon) = T_0(c, \varepsilon), I(T(c, \varepsilon)) = \{0, 2\}, \zeta = 0\}) \\ &\leq \frac{7}{3} \sup_n \mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \{n = T(c, \varepsilon) = T_0(c, \varepsilon)\} \\ &= \frac{7}{3} \sup_n \mathbf{P}_{u_0(\cdot)} \{\mathcal{L}_0(n, \varepsilon) > c_0\}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Поэтому, аналогично лемме 5 и (5.24), отсюда получаем

$$\liminf_{c_0 \rightarrow \infty} \frac{|\ln \gamma_0^*(c_0, \varepsilon)|}{c_0} \geq \max_{u \in \mathcal{U}_0} \min_{\theta_0 \in \Theta_0} t_0^*(z_0, u_0^*(\cdot)) - \varepsilon \geq 1 - \varepsilon. \tag{5.34}$$

Возвращаясь к доказательству леммы 5, мы видим, что неравенство типа (5.19) справедливо также для вероятностей ложных решений $\alpha_{01}(c_1, \varepsilon)$, $\alpha_{02}(c_2, \varepsilon)$ при $c_1 \rightarrow \infty$, $c_2 \rightarrow \infty$ (см. замечание 5.1).

Поэтому из (5.34) и аналогичных соотношений для $\alpha_{01}(c_1, \varepsilon)$, $\alpha_{02}(c_2, \varepsilon)$ вытекает, что решающее правило $d_c^*(n, \varepsilon)$ невырождено и вероятности ложных решений в (4.2) стремятся к нулю при $c = (c_0, c_1, c_2) \rightarrow \infty$. Кроме того, для этого теста выполнено условие (B), что устанавливается так же, как и при доказательстве справедливо-

сти условия (А) в теореме 2. Отсюда и из (5.34) получаем (аналогично (5.23))

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) &\leq \limsup_{c \rightarrow \infty} \mathcal{K}_0(T(c, \varepsilon), \theta_0^*) \leq \limsup_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}_{\theta_0^*} T_0(c_0, \varepsilon)/c_0}{|\ln \gamma_0^*(c_0, \varepsilon)|/c_0} \\
 &\leq \frac{\limsup_{c_0 \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\theta_0^*} T_0(c_0, \varepsilon)/c_0}{\liminf_{c_0 \rightarrow \infty} |\ln \gamma_0^*(c_0, \varepsilon)|/c_0} \leq \frac{\mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) + \varepsilon}{\max_{u \in \mathcal{U}_0} \min_{\theta_0 \in \Theta_0} t_0^*(z_0, u_0^*(\cdot)) - \varepsilon} \\
 &\leq \frac{\mathbf{I}_0^{-1}(\theta_0^*) + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Аналогичные неравенства для $\mathcal{K}_1(T(c, \varepsilon), \theta_1^*)$, $\mathcal{K}_2(T(c, \varepsilon), \theta_2^*)$ можно получить таким же способом. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение теоремы вытекает из проведенного доказательства (см. (5.34) и аналогичные соотношения для $\alpha_{01}(c_1, \varepsilon)$, $\alpha_{02}(c_2, \varepsilon)$).

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю признательность А. Н. Ширяеву за поддержку. Мы также благодарны Ю. А. Давыдову, С. Гошу (S. Ghosh) и А. Г. Тартаковскому, проявившим внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wald A. Sequential tests of statistical hypotheses. — Ann. Math. Statist., 1945, v. 16, p. 117–186.
2. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.
3. Wald A., Wolfowitz J. Optimum character of the sequential probability ratio test. — Ann. Math. Statist., 1948, v. 19, p. 326–339.
4. Kiefer J., Weiss L. Some properties of generalized sequential probability ratio tests. — Ann. Math. Statist., 1957, v. 28, p. 57–74.
5. Lai T. L. Optimal stopping and sequential tests which minimize the maximum expected sample size. — Ann. Statist., 1973, v. 1, p. 659–673.
6. Lai T. L. Nearly optimal sequential tests of composite hypotheses. — Ann. Statist., 1988, v. 16, № 2, p. 856–886.
7. Драгалин В. П., Новиков А. А. Асимптотическое решение задачи Кифера–Вейса для процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 4, с. 679–690.
8. Hoeffding W. Lower bounds for the expected sample size and the average risk of a sequential procedure. — Ann. Math. Statist., 1960, v. 31, p. 352–368.
9. Lorden G. 2-SPRT's and the modified Kiefer–Weiss problem of minimizing an expected sample size. — Ann. Statist., 1976, v. 4, № 2, p. 281–291.
10. Bartlett M. S. The large-sample theory of sequential tests. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1946, v. 42, p. 239–244.
11. Cox D. R. Large sample sequential tests for composite hypotheses. — Sankhyā, 1963, v. 25, p. 5–12.
12. Joanes D. N. Sequential tests of composite hypotheses. — Biometrika, 1972, v. 59, p. 633–637.

13. *Gombay E.* Sequential testing of composite hypotheses. — Limit Theorems in Probability and Statistics (1999, Balatonlelle), v. II. Budapest: János Bolyai Math. Soc., 2002, p. 107–125.
14. *Cox C. P., Roseberry T. D.* A large sample sequential test, using concomitant information, for discrimination between two composite hypotheses. — J. Amer. Statist. Assoc., 1966, v. 61, p. 357–367.
15. *Айвазян С. А.* Сравнение оптимальных свойств критериев Неймана–Пирсона и Вальда. — Теория вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, в. 1, с. 86–93.
16. *Dragalin V. P., Novikov A. A.* Adaptive sequential tests for composite hypotheses. — Обзорение прикл. промышл. матем., 1999, т. 6, в. 2, с. 387–398.
17. *Lorden G.* Nearly-optimal sequential tests for finitely many parameter values. — Ann. Statist., 1977, v. 5, № 1, p. 1–21.
18. *Павлов И. В.* Последовательная процедура различения многих сложных гипотез. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 1, с. 149–153.
19. *Dragalin V. P., Tartakovsky A. G., Veeravalli V. V.* Multihypothesis sequential probability ratio tests. I. Asymptotic optimality. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1999, v. 45, p. 2448–2461.
20. *Dragalin V. P., Tartakovsky A. G., Veeravalli V. V.* Multihypothesis sequential probability ratio tests. II. Accurate asymptotic expansions for the expected sample size. — IEEE Trans. Inform. Theory, 2000, v. 46, № 4, p. 1366–1383.
21. *Фишман М. М.* Асимптотически оптимальные многоальтернативные последовательные процедуры для различения процессов, минимизирующие среднюю длительность наблюдений. — Радиотехника и электроника, 1984, т. 29, № 8, с. 1516–1524.
22. *Голубев Г. К., Хасьминский Р. З.* О последовательном различении нескольких сигналов в гауссовском белом шуме. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 3, с. 544–554.
23. *Baum C. W., Veeravalli V. V.* A sequential procedure for multihypothesis testing. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1994, v. 40, № 6, p. 1994–2007.
24. *Armitage P.* Sequential analysis with more than two alternative hypotheses, and its relation to discriminant function analysis. — J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1950, v. 12, p. 137–144.
25. *Tartakovsky A. G.* Asymptotic optimality of certain multihypothesis sequential tests: non-i.i.d. case. — Stat. Inference Stoch. Process., 1998, v. 1, № 3, p. 265–295.
26. *Tartakovsky A. G., Li X. R., Yaralov G.* Sequential detection of targets in multichannel systems. — IEEE Trans. Inform. Theory, 2003, v. 49, № 2, p. 425–445.
27. *Lai T. L.* Sequential multiple hypothesis testing and efficient fault detection-isolation in stochastic systems. — IEEE Trans. Inform. Theory, 2000, v. 46, № 2, p. 595–608.
28. *Simons G.* Lower bounds for average sample number of sequential multihypothesis tests. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, p. 1343–1364.
29. *Бродский Б. Е., Дарховский Б. С.* Сравнительный анализ некоторых непараметрических методов скорейшего обнаружения момента «разладки» случайной последовательности. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 4, с. 655–668.
30. *Brodsky B. E., Darkhovsky B. S.* Non-parametric Statistical Diagnosis: Problems and Methods. Dordrecht: Kluwer, 2000, 452 p.
31. *Дарховский Б. С., Бродский Б. Е.* Непараметрический метод скорейшего обнаружения изменения среднего случайной последовательности. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 4, с. 703–711.
32. *Бродский Б. Е., Дарховский Б. С.* Асимптотически оптимальные методы последовательной проверки сложных гипотез. — Докл. РАН, 2006, № 1, с. 11–15.
33. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
34. *Woodroffe M.* Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis. Philadelphia: SIAM, 1982, 119 p.