Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гапошкин, Точные оценки метрической энтропии множества средних некоторых классов стационарных последовательностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 1, 16–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:23:09

© 2008 г.

ГАПОШКИН В. Ф.*

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ МЕТРИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ МНОЖЕСТВА СРЕДНИХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Получены верхние и нижние оценки метрической ε -энтропии средних арифметических для классов стационарных последовательностей, совпадающие по порядку роста при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эти оценки существенно отличаются от оценок для аналогичных классов квазистационарных последовательностей.

Ключевые слова и фразы: стационарные и квазистационарные последовательности, средние арифметические, метрическая энтропия, верхние и нижние оценки.

Пусть (X_k) — стационарная последовательность в $L^2(\Omega)$, $\mathbf{E}X_k = 0$, $R_1(n)$ — ее корреляционная функция:

$$R_1(n) = \mathbf{E}X_k X_{k+n}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если A_n — средние арифметические последовательности (X_k) , т.е. $A_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k$, то обозначим

$$\|A_n\|^2 = n^{-2} \left\| \sum_{k=1}^n X_k \right\|^2 = R(n).$$

Очевидно, что

$$R(n) = n^{-1} R_1(0) + 2n^{-2} \sum_{k=1}^n (n-k) R_1(k).$$

Метрической энтропией $N(\varepsilon)$ множества $A = (A_n)_1^\infty$ называют наименьшее число замкнутых шаров радиуса $\varepsilon > 0$ в $L^2(\Omega)$, покрывающих множество A . В работе [1] показано, что для любой стационарной последовательности справедлива оценка $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и эта оценка неумлучшаема в классе всех стационарных последовательностей. Но при добавочных ограничениях на спектральную плотность или корреляционную функцию последовательности оценки энтропии могут быть

* Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), ул. Образцова, 15, 101475 Москва, Россия; e-mail: gaposhkin@hotmail.com

улучшены (см. [3]–[5]). В работах [4], [5] исследовались также квазистационарные последовательности. Последовательность (X_k) называется R -системой, если $\|n^{-1} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k\|^2 \leq R(n)$ ($m \geq 0$, $n \geq 1$), где $R(n)$ стремится к 0. Всюду далее используется обозначение $\log n = \log_2 n$.

Для R -систем в работе [5] получены следующие результаты:

- 1) если $\sum n^{-1} (R(n))^{1/2} < \infty$, то $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$;
- 2) если $R(n) = O((\log n)^{-\alpha})$, то $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1} \log \varepsilon^{-1})$ (при $\alpha = 2$) и $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2/\alpha})$ (при $0 < \alpha < 2$);
- 3) эти оценки неулучшаемы в соответствующих классах квазистационарных последовательностей.

В данной работе подробно исследуется более сложный случай стационарных последовательностей. Показано, что порядок роста энтропии $N(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ существенно отличается от квазистационарного случая.

Удобно ввести следующие функции:

$$F_0(n) = \sum_{k=1}^n R_1(k), \quad F_1(n) = \sum_{k=1}^n k R_1(k), \quad G(n) = n F_0(n) - F_1(n). \quad (1)$$

Тогда

$$R(n) = n^{-1} R_1(0) + 2n^{-2} G(n).$$

Лемма 1. При $1 \leq n < n+l$

$$\begin{aligned} \|A_n - A_{n+l}\|^2 = & \frac{l^2}{(n+l)^2} \left(\left(1 + \frac{l}{n}\right) (R(l) - R(n+l)) \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{n}{l}\right) (R(n) - R(n+l)) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство. Имеем:

$$A_n - A_{n+l} = \frac{l}{n+l} \left[n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k - l^{-1} \sum_{j=n+1}^{n+l} X_j \right].$$

В силу стационарности

$$\|A_n - A_{n+l}\|^2 = \frac{l^2}{(n+l)^2} \left[R(n) + R(l) - \frac{2}{nl} D_{n,l} \right]. \quad (3)$$

Здесь

$$D_{n,l} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+l} R_1(j-k).$$

Легко проверяется, что при $l < n$

$$D_{n,l} = \sum_{k=1}^l k R_1(k) + l \sum_{k=l+1}^n R_1(k) + \sum_{k=n+1}^{n+l} (n+l-k) R_1(k).$$

Используя обозначения (1), получаем:

$$D_{n,l} = F_1(l) + l(F_0(n) - F_0(l)) + (n+l)(F_0(n+l) - F_0(n)) - F_1(n+l) + F_1(n),$$

что можно переписать в виде

$$D_{n,l} = G(n+l) - G(n) - G(l) = \frac{1}{2} [(n+l)^2 R(n+l) - n^2 R(n) - l^2 R(l)].$$

Подставляя последнее выражение в формулу (3), получим утверждение леммы при $l < n$. При $l \geq n$ выражение $D_{n,l}$ записывается в виде

$$D_{n,l} = F_1(n) + n(F_0(l) - F_0(n)) + (n+l)(F_0(n+l) - F_0(l)) - F_1(n+l) + F_1(l),$$

что приводит к тому же результату.

1. Верхние оценки энтропии средних. Из формулы (2) следует, что для точной оценки норм $\|A_n - A_m\|$ (как сверху, так и снизу) недостаточно налагать ограничения только на скорость убывания $R(n)$ (как в случае квазистационарных последовательностей), а нужны еще некоторые условия на поведение разностей $R(n) - R(m)$. Через $C_0, C_1, D_0, D_1, \dots$ в тексте обозначаются некоторые положительные постоянные, не обязательно одни и те же в разных неравенствах. Всюду далее предполагается, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = 0$.

Будем использовать следующее основное предположение.

Пусть существует такая неубывающая функция $B(u)$, $u \geq 1$, $\lim_{u \rightarrow \infty} B(u) = \infty$, что при некоторой постоянной $D_1 > 0$ имеем

$$(I) \quad R(n) - R(m) \leq D_1 \left(\frac{1}{B(\log n)} - \frac{1}{B(\log m)} \right) \quad (m > n \geq 2).$$

Заметим, что из (I) также следует оценка:

$$(Ia) \quad R(n) \leq \frac{D_1}{B(\log n)}.$$

З а м е ч а н и е 1. Даже для квазистационарных последовательностей условие

$$R(n) = O((\log n)^{-2-\delta}), \quad \delta > 0,$$

влечет «предельно малую» скорость роста $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому нас, в основном, интересуют функции $B(u)$, удовлетворяющие условию

$$(II) \quad B(u) = u^\alpha (\log u)^\beta \quad (u \geq u_0),$$

где $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$ или $\alpha = 0$, $\beta > 0$.

Основные верхние оценки при $\varepsilon \rightarrow 0$ энтропии множества средних (A_n) содержатся в следующих теоремах. Пусть выполнены предположения (I) и (II).

Теорема 1. 1) Если $\alpha > 2$ или $\alpha = 2, \beta > 2$, то

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1}).$$

2) Если $\alpha = 2, \beta = 2$, то

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1} \log \log \log \varepsilon^{-1}).$$

3) Если $\alpha = 2, -\infty < \beta < 2$, то

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1} (\log \log \varepsilon^{-1})^{(2-\beta)/2}).$$

Теорема 2. Если $1 < \alpha < 2, \beta$ — любое, то

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1} (\log \varepsilon^{-1})^{(2-\alpha)/2} (\log \log \varepsilon^{-1})^{-\beta/2}).$$

Теорема 3. Пусть $\alpha = 1$. Тогда: 1) если $\beta > 2$, то

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1} (\log \varepsilon^{-1})^{1/2} (\log \log \varepsilon^{-1})^{1-\beta/2});$$

2) если $\beta = 2$, то

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1} (\log \varepsilon^{-1})^{1/2} (\log \log \varepsilon^{-1}));$$

3) если $-\infty < \beta < 2$, то

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1} (\log \varepsilon^{-1})^{(3-\beta)/2}).$$

Теорема 4. Если $0 < \alpha < 1, \beta$ — любое или $\alpha = 0, \beta > 0$, то

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2/(\alpha+1)} (\log \varepsilon^{-1})^{-\beta/(\alpha+1)}).$$

Случай 1) теоремы 1 следует из цитированного выше результата для квазистационарных последовательностей. Действительно, в этом случае $\sum (R(n))^{1/2} n^{-1} < \infty$ и справедлива оценка $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$. Впрочем, этот факт следует также из общей теоремы 5. Для доказательства остальных результатов нужен ряд лемм. В некоторых из них удобно формулировать оценки энтропии для общих функций $B(u)$ из условия (I). При этом будет использоваться одно из условий

$$(IIIa) \quad \frac{B'(u)}{B(u)} \leq \frac{C}{u}, \quad B'(u) \text{ не убывает при } u \geq u_0,$$

$$(IIIb) \quad B(u) = \frac{u}{\varphi(u)}, \quad \varphi(u) \text{ не убывает при } u \geq u_0.$$

Заметим, что если $B(u)$ имеет вид, указанный в условии (II), то выполнено условие (IIIa) (при $\alpha > 1$ или $\alpha = 1, \beta \geq 0$), либо условие (IIIb) (при $0 \leq \alpha < 1$ или $\alpha = 1, \beta < 0$).

Лемма 2. Пусть для стационарной последовательности (X_k) выполнено условие (I). Пусть $m_k < m_{k+1}$ — некоторые целые числа, $3m_k \geq m_{k+1}$, $l_k = m_{k+1} - m_k$; и пусть $m_k \leq n < m_{k+1}$. Обозначим для среднего A_n

$$\rho_k(n) = \min(\|A_n - A_{m_k}\|, \|A_n - A_{m_{k+1}}\|). \quad (4)$$

Справедлива оценка $\rho_k^2(n) \leq D_1 l_k^2 m_k^{-2} (F_k + G_k)$, где

$$F_k = \frac{1}{B(\log(l_k/2))} - \frac{1}{B(\log m_{k+1})},$$

$$G_k = \frac{m_{k+1}}{l_k} \left(\frac{1}{B(\log m_k)} - \frac{1}{B(\log m_{k+1})} \right).$$

Доказательство. Очевидно, что либо $n - m_k \geq l_k/2$, либо $m_{k+1} - n \geq l_k/2$. Рассмотрим для определенности первый случай (второй разбирается вполне аналогично).

По лемме 1

$$\rho_k^2(n) \leq \|A_n - A_{m_k}\|^2 = \frac{(n - m_k)^2}{n^2} \left(\left(1 + \frac{n - m_k}{m_k}\right) (R(n - m_k) - R(n)) + \left(1 + \frac{m_k}{n - m_k}\right) (R(m_k) - R(n)) \right).$$

Для завершения доказательства воспользуемся условием (I) и возрастанием функции $B(u)$, а также неравенствами

$$\frac{l_k}{2} \leq n - m_k \leq l_k, \quad 1 \leq \frac{n}{m_k} \leq 3, \quad n < m_{k+1}.$$

Лемма 3. Пусть выполнено условие (IIIa) или (IIIb). Тогда если k, p — действительные числа, $k_0 \leq k < k + p$ при некотором $k_0 \geq 1$, то

$$\Delta = \frac{1}{B(k)} - \frac{1}{B(k + p)} \leq \frac{Cp}{B(k)(k + p)}.$$

Доказательство. Действительно, при некотором $0 < \theta < 1$ имеем в случае (IIIa)

$$\Delta = \frac{pB'(k + \theta p)}{B(k)B(k + p)} \leq \frac{Cp}{B(k)(k + p)}.$$

В случае (IIIb)

$$\Delta = \frac{\varphi(k)(k + p) - k\varphi(k + p)}{k(k + p)} \leq \frac{p}{B(k)(k + p)}.$$

Следствие 1. Для функций $B(u)$, удовлетворяющих условию (II), утверждение леммы 3 выполнено.

Доказательство. Если $\alpha > 1$ или $\alpha = 1, \beta > 0$, то функция

$$B'(u) = \alpha u^{\alpha-1} (\log u)^\beta (1 + O((\log u)^{-1}))$$

возрастает при $u \geq u_0$; кроме того, при $u \geq u_0$

$$B'(u)(B(u))^{-1} = \alpha u^{-1} (1 + O((\log u)^{-1})) \leq Cu^{-1}.$$

В остальных случаях, очевидно, выполнено (IIIb).

Лемма 4. Пусть $n, m, n < m$, — натуральные числа. Положим $n = 2^k$, $m = 2^{k+p}$ (k, p — действительные числа, $k \geq 0, p \geq 1$). Если выполнены предположения (I) и (III), то при $k \geq k_0$ справедливы оценки:

$$R(2^k) - R(2^{k+p}) \leq \frac{C_2 p}{(k+p) B(k)}, \quad (5)$$

$$R(2^{k+p} - 2^k) - R(2^{k+p}) \leq \frac{C_2 2^{-p}}{(k+p) B(k)}, \quad (6)$$

$$\|A_{2^k} - A_{2^{k+p}}\|^2 \leq \frac{C_2 p}{(k+p) B(k)}. \quad (7)$$

Доказательство. В силу (I) имеем

$$R(2^k) - R(2^{k+p}) \leq D_1 \left(\frac{1}{B(k)} - \frac{1}{B(k+p)} \right),$$

$$R(2^{k+p} - 2^k) - R(2^{k+p}) \leq D_1 \left(\frac{1}{B(k+p-2^{-p+1})} - \frac{1}{B(k+p)} \right).$$

Во втором неравенстве использованы также соотношения

$$2^{k+p} - 2^k = 2^{k+p}(1 - 2^{-p}), \quad \log(2^{k+p} - 2^k) \geq k + p - 2^{-p+1}.$$

Из леммы 3 следуют неравенства (5) и (6). Неравенство (7) получается из этих оценок и леммы 1.

Лемма 5а. Пусть выполнены условия (I) и (IIIа). Множество средних

$$E_2 = \{A_n: 2^M \leq n < 2^{M^2}\}$$

покрывается ε_2 -сетью S_2 из не более чем $6M$ элементов $A_{n_1}, \dots, A_{n_t}$, $t \leq 6M$. Здесь $\varepsilon_2 = C_2/M$, $M \geq M_0$.

Доказательство. Положим сначала для удобства $M = 2^\nu$, $\nu \geq 1$. Образует сеть S_2 из элементов

$$n_s^{(j)} = 2^{M2^j + s2^{2j}}, \quad j = 0, \dots, \nu - 1, \quad 0 \leq s \leq 2^{\nu-j}.$$

Заметим, что $n_0^{(0)} = 2^M$; максимальное из чисел $n_s^{(j)}$ равно 2^{M^2} . Если $2^M \leq n < 2^{M^2}$, то при некоторых j, s

$$n_s^{(j)} = 2^{M2^j + s2^{2j}} \leq n < 2^{M2^j + (s+1)2^{2j}} = n_{s+1}^{(j)}.$$

Пусть для определенности $n - n_s^{(j)} \geq n_{s+1}^{(j)} - n$. Положим в лемме 4

$$k_0 = M_0, \quad k = M2^j + s2^{2j}, \quad k + p = \log n < M2^j + (s+1)2^{2j}.$$

Тогда $1 \leq p < 2^{2j}$. Так как $B'(u)$ возрастает, то $B(u) \geq D_3 u$ ($u \geq u_0$). В силу (7) имеем

$$\|A_n - A_{n_s^{(j)}}\|^2 \leq \frac{D_4 2^{2j}}{M2^j B(M2^j)} \leq \frac{C_2^2}{M^2}.$$

Всего элементов в сети S_2

$$\text{Card } S_2 \leq \sum_{j=0}^{\nu-1} (2^{\nu-j} + 1) \leq 3 \cdot 2^\nu.$$

Если $M \geq M_0$ — произвольное, $2^{\nu-1} < M \leq 2^\nu$, то строим $C_2/2^\nu$ -сеть S_2 из не более чем $3 \cdot 2^\nu$ элементов. Она, очевидно, будет и C_2/M -сетью из не более чем $6M$ элементов.

В лемме 6 исследуется базовый элемент конструкции ε -сетей, используемый далее в большинстве доказательств. В дальнейшем $]a[$ — наименьшее целое число, которое не меньше a .

Лемма 6. Пусть выполнены условия (I) и (III). Пусть $r \geq 2$ — целое число, $M > 8$; $H = H(r, M)$, $H \geq 4$. а) Если $H > M$, положим

$$m_0 = m_0^{(r)} =]M2^r[, \quad m_1 = m_1^{(r)} =]M2^{r+1}]. \quad (8a)$$

б) Если $H \leq M$, то рассмотрим индексы

$$m_k = m_k^{(r)} =]M2^{r+kH/M}[, \quad k = 0, \dots, K, \quad K = \left\lceil \frac{M}{H} \right\rceil + 1. \quad (8b)$$

(При фиксированном r эти индексы не убывают, $m_0 =]M2^r[, m_K >]M2^{r+1}[$.) Тогда при некотором $C > 0$ для средних A_{m_k} , $A_{m_{k+1}}$, A_n , $m_k < n < m_{k+1}$, справедлива оценка

$$\rho_k^2(n) \leq C^2 \frac{H^2 \log(M/H + 2)}{M^2 B(r)(\log M + r)}. \quad (9)$$

Доказательство. В случае а) из леммы 2 легко следует, что для $m_0 < n < m_1$

$$\rho_k^2(n) \leq C^2 \frac{1}{B(r)(\log M + r)},$$

и оценка (9) подавно верна. В случае б) также используем лемму 2. Здесь $m_k = M2^{r+kH/M} + \theta_k$, $m_{k+1} = M2^{r+(k+1)H/M} + \theta_{k+1}$, $0 \leq \theta_k$, $\theta_{k+1} < 1$. Далее используются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} l_k = m_{k+1} - m_k, \quad \log \frac{l_k}{2} \geq r + \log H - 2 \geq r, \quad 0 < \frac{kH}{M} < 1, \\ \log M + r + \frac{(k+1)H}{M} + \frac{1}{M} \geq \log m_{k+1}, \quad \log M + r + \frac{kH}{M} \leq \log m_k, \\ \frac{H}{3M} \leq \frac{l_k}{m_k} \leq 2 \frac{H}{M}, \quad \frac{m_{k+1}}{l_k} \leq \frac{6M}{H}. \end{aligned}$$

Применяя леммы 2 и 3, имеем

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{B(\log(l_k/2))} - \frac{1}{B(\log m_{k+1})} \leq \frac{1}{B(r + \log H - 2)} - \frac{1}{B(r + \log M + 2)} \\ &\leq \frac{C_1(\log(M/H) + 2)}{B(r)(r + \log M)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_k &= \frac{m_{k+1}}{l_k} \left(\frac{1}{B(\log m_k)} - \frac{1}{B(\log m_{k+1})} \right) \\
&\leq \frac{6M}{H} \left(\frac{1}{B(\log M + r + kH/M)} - \frac{1}{B(\log M + r + (k+1)H/M + 1/M)} \right) \\
&\leq \frac{C_2}{B(r)(\log M + r)}.
\end{aligned}$$

Поэтому при некоторой постоянной $C > 0$ справедлива требуемая оценка леммы 6.

Для неубывающей функции $B(r)$ и $k \geq 2$, $M \geq 4$ обозначим

$$\begin{aligned}
\Phi_1(k) &= \sum_{r=2}^k (B(r))^{-1/2}, \quad \Phi_2(k) = \sum_{r=2}^k (rB(r))^{-1/2}, \\
\tilde{\Phi}_2(M) &= \Phi_2([M]) - \Phi_2([\log M]), \\
G(M) &= \Phi_1([\log M]) + \sqrt{\log M} \tilde{\Phi}_2(M).
\end{aligned} \tag{10}$$

Лемма 7а. Пусть выполнены условия (I) и (III). Пусть функции Φ_1, Φ_2, G определены согласно (10). Тогда существуют такие константы $D, C_1, D_0, M_0 > 0$, что при $M \geq M_0$ для множества средних $E_1 = \{A_n: D_0M < n < 2^M\}$ найдется ε_1 -сеть S_1 (с $\varepsilon_1 = C_1/M$) такая, что

$$\text{Card } S_1 \leq DMG(M). \tag{11}$$

Доказательство. Выберем $r_0 \geq 2$ так, чтобы при $r \geq r_0$ выполнялось неравенство $B(r) \geq 2^4$. Положим $D_0 = 2^{r_0}$. Составим нужную сеть S_1 из двух частей. При целых r , $r_0 \leq r \leq \log M$, сеть S'_1 состоит из A_n с индексами $m_k^{(r)}$ вида (8), где $H = H(r) = (B(r))^{1/2}$.

При $\log M < r \leq M$ сеть S''_1 состоит из A_n с индексами вида (8), где

$$H(r) = (rB(r)(\log M)^{-1})^{-1/2}.$$

Индексы $m_k^{(r)}$ не убывают с ростом k и r ; все они расположены между $]D_0M[$ и $m_K^{(M)} > M2^M$.

Пусть A_n — некоторое среднее, $D_0M < n < 2^M$. Фиксируем такие k, r , что

$$m_k = m_k^{(r)} \leq n \leq m_{k+1}^{(r)} = m_{k+1}.$$

По лемме 6 при $M \geq M_0$

$$\rho_k^2(n) \leq C_1^2 \frac{H^2(r) \log(M/H + 2)}{B(r)(r + \log M) M^2}. \tag{12}$$

При $r_0 \leq r \leq \log M$

$$H^2(r) = B(r), \quad \log \left(\frac{M}{H} + 2 \right) \leq \log M \leq \log M + r,$$

и правая часть в (12) не больше, чем C_1^2/M^2 . При $\log M < r \leq M$ имеем

$$H^2(r) = \frac{rB(r)}{\log M}, \quad \log \left(\frac{M}{H} + 2 \right) \leq \log M,$$

и снова правая часть в (12) не превосходит C_1^2/M^2 .

Составим при $M \geq M_0$ сеть S_1 из сети S'_1 и из сети S''_1 ; $\varepsilon_1 = C_1/M$. Мы показали, что множество S_1 есть ε_1 -сеть для E_1 . Оценим $\text{Card } S_1$. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{Card } S'_1 &\leq \sum_{r=2}^{[\log M]} \left(\frac{M}{H(r)} + 2 \right) \leq M\Phi_1([\log M]) + 2\log M, \\ \text{Card } S''_1 &\leq M\sqrt{\log M} (\Phi_2([M]) - \Phi_2([\log M])) + 2M. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка (11) при некоторой постоянной $D > 0$.

Из лемм 5а, 7а вытекает следующая общая верхняя оценка энтропии.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (I) и (IIIа), и пусть функции Φ_1, Φ_2, G определены согласно (10). Тогда при $M \geq M_0$ и некоторых $C_0 > 0, \bar{D} > 0$ для $\varepsilon = C_0/M$ справедлива оценка

$$N(\varepsilon) \leq \bar{D}MG(M). \quad (13)$$

Доказательство. Построим при $M \geq M_0$ сети S_2, S_1 по леммам 5а и 7а для множеств средних $E_2 = \{A_n: 2^M \leq n < 2^{M^2}\}$, $\varepsilon_2 = C_2/M$, и $E_1 = \{A_n: D_0M < n < 2^M\}$, $\varepsilon_1 = C_1/M$. Так как $B(u) \geq D_3u$, то при $n \geq 2^{M^2}$ в силу условия (Iа)

$$\|A_n\|^2 \leq R(n) \leq \frac{D_1}{B(\log n)} \leq \frac{C_3^2}{M^2},$$

т.е. множество $E_3 = \{A_n: n \geq 2^{M^2}\}$ содержится в шаре радиуса C_3/M с центром в 0. Следовательно, множество

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \{0\} \cup (A_1, A_2, \dots, A_{[D_0M]})$$

является C_0/M -сетью для множества $\{A_n: n \geq 1\}$, если положить $C_0 = \max(C_1, C_2, C_3)$. Мощность сети не больше, чем

$$DMG(M) + D_2M \leq \bar{D}MG(M).$$

Доказательство теорем 1, 2 и 3. Пусть $B(u)$ удовлетворяет условию (II). Если $\alpha > 2$ или $\alpha = 2, \beta > 2$, то $G(M) = O(1)$. Это дает случай 1) теоремы 1. Пусть теперь $1 < \alpha \leq 2$. Согласно теореме 5, нужно оценить функции Φ_1, Φ_2, G . Имеем:

$$\Phi_1(k) = \sum_{r=2}^k r^{-\alpha/2} (\log r)^{-\beta/2} = O(\Psi(k)),$$

где при $\alpha = \beta = 2$, при $\alpha = 2, \beta < 2$ и при $1 < \alpha < 2$ и любом β функция $\Psi(k)$ равна соответственно

$$\log \log k, \quad (\log k)^{(2-\beta)/2}, \quad k^{(2-\alpha)/2} (\log k)^{-\beta/2}.$$

Так как при $\alpha > 1$ ряд сходится, то

$$\tilde{\Phi}_2(M) \leq \sum_{r=\lfloor \log M \rfloor}^{\infty} r^{-(1+\alpha)/2} (\log r)^{-\beta/2} = O((\log M)^{(1-\alpha)/2} (\log \log M)^{-\beta/2}).$$

Поэтому для функции $MG(M)$ получаются оценки теорем 1 и 2. Теорему 5 можно применить и при $\alpha = 1$, $\beta \geq 0$ (так как функция $B'(u)$ не убывает). В этом случае

$$\begin{aligned} \Phi_1(\log M) &= O((\log M)^{1/2} (\log \log M)^{-\beta/2}), \\ \tilde{\Phi}_2(M) &\leq \sum_{r=\lfloor \log M \rfloor}^M r^{-1} (\log r)^{-\beta/2} = O(\Psi_1(M)), \end{aligned}$$

где функция $\Psi_1(M)$ при $\beta > 2$, $\beta = 2$, $\beta < 2$ равна

$$(\log \log M)^{1-\beta/2}, \quad \log \log M, \quad (\log M)^{1-\beta/2}$$

соответственно. Итак, порядок величины $G(M)$ определяется слагаемым $\sqrt{\log M} \tilde{\Phi}_2(M)$. Отсюда получаются утверждения теоремы 3 (кроме случая $\alpha = 1$, $\beta < 0$, который исследуется далее).

Для доказательства оставшихся утверждений используем вместо лемм 5а и 7а приводимые ниже леммы 5б и 7б.

Обозначим при $0 < \alpha \leq 1$ или при $\alpha = 0$, $\beta > 0$ через M_1 корень уравнения $M_1 B(M_1) = M^2$, а через M_2 — корень уравнения $B(M_2) = M^2$, $M \geq 2$. Очевидно, что при $\alpha > 0$ и при $M \rightarrow \infty$

$$M_1 \sim C_{\alpha,\beta} M^{2/(1+\alpha)} (\log M)^{-\beta/(1+\alpha)}, \quad M_2 \sim D_{\alpha,\beta} M^{2/\alpha} (\log M)^{-\beta/\alpha}. \quad (14)$$

Если же $\alpha = 0$, $\beta > 0$, то

$$M_1 \sim \overline{M}_1 = \frac{M^2}{(\log M^2)^\beta}, \quad \overline{M}_1 < M_1, \quad M_2 = 2^{M^{2/\beta}}. \quad (15)$$

Лемма 5б. Пусть выполнены предположения (I), (II), где $0 < \alpha \leq 1$ или $\alpha = 0$, $\beta > 0$. Тогда для множества средних $F_2 = \{A_n: 2^{M_1} \leq n \leq 2^{M_2}\}$ существует ε_2 -сеть, где $\varepsilon_2 = C_2/M$, причем

$$\text{Card } S_2 = O(M_1) \quad (M \rightarrow \infty). \quad (16)$$

Доказательство. Пусть сначала $\alpha > 0$ и β — любое. Положим

$$n_s^{(j)} = [2^{M_1 2^j + s 2^{j(\alpha+1)}}],$$

$$s = 0, 1, \dots, s_j, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad s_j = \left\lceil \frac{M_1}{2^{j\alpha}} \right\rceil, \quad J = \left\lceil \log \frac{M_2}{M_1} \right\rceil \sim \frac{\log M_1}{\alpha}.$$

Составим сеть S_2 из средних A_n с этими номерами. Заметим, что наименьший из них равен $[2^{M_1}]$, а наибольший превосходит 2^{M_2} . Далее,

$$\text{Card } S_2 \leq \sum_{j=0}^J \left(\frac{M_1}{2^{j\alpha}} + 1 \right) \leq M_1 C_\alpha + J + 1 = O(M_1).$$

Пусть $n_s^{(j)} \leq n \leq n_{s+1}^{(j)}$. Считая для определенности, что $n - n_s^{(j)} \geq n_{s+1}^{(j)} - n$, обозначим в лемме 4 $n_s^{(j)} = 2^k$, $n = 2^{k+p}$. Тогда при $M \geq M_0$ имеем

$$\|A_n - A_{n_s^{(j)}}\|^2 \leq \frac{C_0 p}{B(k)(k+p)} \leq \frac{C_1^2}{M_1^{1+\alpha}(\log M_1)^\beta} \leq \frac{C_2^2}{M^2}.$$

Здесь использованы неравенства

$$1 \leq p \leq 2^{j(\alpha+1)}, \quad B(k) \geq B(M_1 2^j), \quad k+p \geq M_1 2^j, \\ C_3(\log M_1)^\beta \leq \log^\beta(M_1 2^j) = (\log M_1 + j)^\beta \leq C_4(\log M_1)^\beta.$$

Рассмотрим случай $\alpha = 0$, $\beta > 0$. Положим при $M \geq M_0$

$$k_M = \left\lfloor \frac{M^2}{\log^\beta(M^2 / \log^\beta M)} \right\rfloor.$$

Пусть при $k = 1, \dots, k_M$

$$m_k = \lfloor 2^{n_k} \rfloor, \quad n_k = 2^{p_k}, \quad p_k = \left(\frac{M^2}{k} \right)^{1/\beta}.$$

Числа m_k подобраны так, чтобы $(\log \log m_k)^{-\beta} \sim k M^{-2}$. Покажем, что $(A_1, \dots, A_{m_{k_M}})$ есть ε_2 -сеть S_2 для $F_2 = \{A_n: 2^{M_1} < n < 2^{M_2}\}$ при некотором $C_2 > 0$ и $\varepsilon_2 = C_2/M$, M_1, M_2 удовлетворяют (15). При этом $\text{Card } S_2 = k_M = O(M_1)$. Заметим, что здесь удобна нумерация

$$m_1 > m_2 > \dots > m_{k_M}, \quad m_1 \geq [2^{M_2}], \quad m_{k_M} = [2^{M_1}].$$

Для $m_k < n < m_{k-1}$, $l_k = m_{k-1} - m_k$, снова для определенности, считаем, что $n - m_k \geq l_k/2$, и оценим по лемме 1

$$\|A_n - A_{m_k}\|^2 = \left(\frac{n - m_k}{n} \right)^2 \\ \times \left[\frac{n}{m_k} (R(n - m_k) - R(n)) + \frac{n}{n - m_k} (R(m_k) - R(n)) \right]. \quad (15')$$

Легко проверяется, что $1 \leq m_{k-1}/l_k \leq 2$. По условию (I)

$$\frac{n}{n - m_k} (R(m_k) - R(n)) \leq D_1 \frac{m_{k-1}}{l_k} (B^{-1}(\log m_k) - B^{-1}(\log m_{k-1})) \\ = O(M^{-2}),$$

так как

$$(\log \log m_k)^{-\beta} - (\log \log m_{k-1})^{-\beta} = O\left(\frac{k}{M^2} - \frac{k-1}{M^2}\right) = O(M^{-2}).$$

Остается оценить первое слагаемое в правой части (15'). Имеем:

$$\frac{n}{n - m_k} \leq 4, \quad \log \frac{l_k}{2} \sim \log m_{k-1} \sim n_{k-1}, \quad \log \log \frac{l_k}{2} \sim p_{k-1}.$$

По условию (I) и теореме Лагранжа при $1 \leq k \leq k_M$ и некоторых $0 < \theta_k < 1$, $u_k = n - m_k \theta_k$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{n}{m_k} (R(n - m_k) - R(n)) \\ & \leq D_1 \frac{n}{m_k} \left((\log \log(n - m_k))^{-\beta} - (\log \log n)^{-\beta} \right) \\ & \leq \frac{D_2 n}{u_k \log u_k (\log \log u_k)^{\beta+1}} = O(n_{k-1}^{-1} p_{k-1}^{-\beta-1}) = O(M^{-2} (\log M)^{-1}). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из оценки: при $M \geq M_0$

$$p_{k-1}^{\beta+1} n_{k-1} \geq p_{k_M}^{\beta+1} n_{k_M} \geq C_\beta \left(\log \frac{M^2}{\log^\beta M} \right)^{\beta+1} \frac{M^2}{\log^\beta M} \geq d_\beta M^2 \log M.$$

Поэтому из (15') при некоторой постоянной $C_2 > 0$ получается нужная оценка:

$$\|A_n - A_{m_k}\| \leq \frac{C_2}{M}, \quad k \leq k_M, \quad m_k < n < m_{k-1}.$$

Лемма 7б. Пусть выполнены условия (I) и (II), где $0 < \alpha \leq 1$, β — любое или $\alpha = 0$, $\beta > 0$. Рассмотрим множество средних

$$F_1 = \{A_n: 4M \leq n \leq 2^{M_1}\}.$$

Существует ε_1 -сеть S_1 для F_1 , $\varepsilon_1 = C_1/M$ и $\text{Card } S_1 = O(L_M)$. При $\alpha = 1$, $\beta < 2$ или $0 \leq \alpha < 1$ функция L_M равна соответственно

$$M(\log M)^{(3-\beta)/2}, \quad M^{2/(1+\alpha)}(\log M)^{-\beta/(1+\alpha)}.$$

Доказательство. Пусть $2 \leq r \leq r_M$, $r_M =]M_1 - \log M[$, $M \geq M_0$, и пусть $H = H(r)$ определено по формуле

$$H(r) = B_1(r) \left(\log \frac{M}{B_1(r)} + 1 \right)^{-1/2} + 4, \quad B_1(r) = (rB(r))^{1/2}.$$

Рассмотрим индексы $m_k^{(r)}$, образованные по формулам (8) с этой функцией $H(r)$. Множество этих индексов расположено между $]4M[$ и $]M2^{r_M+1}[> 2^{M_1}$. Так как $(\log x + 1)^{1/2} \leq x$ при $x \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{M}{B_1} & \geq 1, \quad \frac{M}{H} \leq \frac{M}{B_1} \left(\log \frac{M}{B_1} + 1 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{M}{B_1} \right)^2, \\ \log \left(\frac{M}{H} + 2 \right) & \leq 4 \left(\log \frac{M}{B_1} + 1 \right). \end{aligned}$$

По лемме 6, используя обозначения (4), имеем

$$\rho_k^2(n) \leq \frac{C^2}{M^2} A(r),$$

где

$$A(r) = \frac{rB(r) \log(M/H + 2)}{(r + \log M) B(r) (\log(M/B_1) + 1)} \leq 4.$$

Итак, для множества F_1 построена ε_1 -сеть с $\varepsilon_1 = C_1/M$, $C_1 = 2C$. При этом

$$\text{Card } S_1 \leq M\Sigma_M + 2r_M. \quad (17)$$

Здесь

$$\Sigma_M = \sum_{r=2}^{r_M} r^{-(1+\alpha)/2} (\log r)^{-\beta/2} \left(\log \frac{M}{B_1(r)} + 1 \right)^{1/2}.$$

Если $\alpha = 1$, $\beta < 2$, то воспользуемся оценками

$$\log \frac{M}{B_1(r)} + 1 = O(\log M), \quad r_M = O(M(\log M)^{-\beta/2})$$

и получим

$$\Sigma_M = O((\log M)^{(3-\beta)/2}), \quad \text{Card } S_1 = O(M(\log M)^{(3-\beta)/2}).$$

Если же $0 < \alpha < 1$, то нужна более точная оценка суммы Σ_M . Положим для удобства $\gamma = (1 + \alpha)/2$, $\lfloor \log M_1 \rfloor = \nu$. Тогда $M_1 \leq 2^\nu$, $r_M \leq 2^\nu$, и в силу (14) при $\nu \rightarrow \infty$

$$M \sim D_{\alpha,\beta} M_1^\gamma (\log M_1)^{\beta/2}, \quad \log M \sim \gamma \nu + \frac{\beta \log \nu}{2}, \quad B_1(r) = r^\gamma (\log r)^{\beta/2}.$$

Представим сумму Σ_M в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_M &= \sum_{r=2}^{r_M} r^{-\gamma} (\log r)^{-\beta/2} (\log M - \log B_1(r) + 1)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=2^{j-1}+1}^{2^j} \dots \\ &\leq D_1 2^{\nu(1-\gamma)} \sum_{j=1}^{\nu} 2^{-(\nu-j)(1-\gamma)} j^{-\beta/2} (\nu - j + 1)^{1/2} = D_1 \Sigma'_M. \end{aligned}$$

Здесь использована оценка при $2^{j-1} < r \leq 2^j$:

$$(\log M - \log B_1(r) + 1)^{1/2} \leq D_2 (\nu - j + 1)^{1/2}.$$

Сумма Σ'_M оценивается так:

$$\Sigma'_M \leq 2^{\nu(1-\gamma)} \left(\sum_{j \leq \nu/2} + \sum_{j > \nu/2} \right) \leq D_3 2^{\nu(1-\gamma)} \nu^{-\beta/2} = O(M_1^{1-\gamma} (\log M_1)^{-\beta/2}).$$

Теперь из (17) получается нужная оценка $\text{Card } S_1$.

Доказательство теоремы 4. Пусть $M \geq 2$. Выберем M_1 , M_2 согласно (14), (15). При $n \geq 2^{M_2}$ имеем по условию (Ia)

$$\|A_n\|^2 \leq \frac{D_1}{B(\log n)} \leq \frac{D_1}{B(M_2)} \leq \frac{C_3^2}{M^2},$$

т.е. множество средних $F_3 = \{A_n : n \geq 2^{M_2}\}$ содержится в шаре радиуса $\varepsilon_3 = C_3/M$ с центром в 0. Далее, по лемме 5б для множества $F_2 = \{A_n : 2^{M_1} < n < 2^{M_2}\}$ построим сеть S_2 с $\varepsilon_2 = C_2/M$, $\text{Card } S_2 = O(M_1)$, а по лемме 7б для множества $F_1 = \{A_n : 4M \leq n \leq 2^{M_1}\}$

построим сеть S_1 с $\varepsilon_1 = C_1/M$, $\text{Card } S_1 = O(M_1)$. Положим $\varepsilon = C_0/M$, $C_0 = \max\{C_1, C_2, C_3\}$. Очевидно, что тогда все множество средних $\{A_n: n \geq 1\}$ содержится в объединении k_M шаров радиуса ε с центрами в элементах сетей S_1 и S_2 , а также в элементах $0, A_1, \dots, A_{[4M]}$. При этом

$$k_M = O(M^{2/(1+\alpha)}(\log M)^{-\beta/(1+\alpha)}).$$

Подставляя $M = C_0/\varepsilon$, получим оценку энтропии при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2/(1+\alpha)}(\log \varepsilon^{-1})^{-\beta/(1+\alpha)}).$$

С помощью лемм 56 и 76 разбирается и оставшийся в теореме 3 случай $\alpha = 1$, $\beta < 0$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4, строим C_0/M -сеть, в соответствии с (14) здесь $M_1 \sim C_\beta M(\log M)^{-\beta/2}$, $M_2 \sim D_\beta M^2(\log M)^{-\beta/2}$. По леммам 56 и 76 мощность сети не превосходит

$$D_0 M + D_1 M(\log M)^{(3-\beta)/2} + D_2 M(\log M)^{-\beta/2} = O(M(\log M)^{(3-\beta)/2}).$$

2. Нижние оценки энтропии средних. При оценках энтропии $N(\varepsilon)$ снизу естественно наложить некоторые «нижние» ограничения на функцию $R(n)$. Основным будет следующее условие.

Существует неубывающая функция $B(u)$ при $u \geq 1$ такая, что $\lim_{u \rightarrow \infty} B(u) = \infty$ и при $m > n \geq 2$ справедлива оценка

$$(I') \quad R(n) - R(m) \geq D_2 \left(\frac{1}{B(\log n)} - \frac{1}{B(\log m)} \right).$$

Хотя некоторые нижние оценки можно получать также при «общих» функциях $B(u)$ (в терминах Φ_1, Φ_2, G , как в теореме 5), мы ограничимся более конкретным случаем, когда для $B(u)$ выполнено условие (II). Покажем, что в этой логарифмической шкале все оценки предыдущего пункта являются точными по порядку. Получим сначала несколько вспомогательных утверждений. Следующая лемма очевидна и хорошо известна.

Лемма 8. Пусть K — некоторое множество в нормированном пространстве X и $\varepsilon > 0$. Если в X существуют такие элементы $x_1, \dots, x_l$, что $\|x_i - x_j\| > 2\varepsilon$ ($i \neq j$), то энтропия $N(K, \varepsilon) \geq l$.

Следующая лемма будет нужна для оценки расстояния между A_n и A_m при большой разнице номеров n, m .

Лемма 9. Пусть выполнены условия (I') и (II) для стационарной последовательности (X_k) . Тогда при $1 \leq n < m$, $2n \leq m$, $\delta > \alpha + 1$, $m \geq m_0$ справедлива оценка

$$\|A_n - A_m\|^2 \geq \frac{D_\delta}{(\log m)^\delta}.$$

Доказательство. По лемме 1 и свойству (I') имеем

$$\|A_n - A_m\|^2 \geq D^2 \frac{(m-n)^2}{m^2} (B^{-1}(\log n) - B^{-1}(\log m)). \quad (18)$$

Здесь $(m-n)/m \geq \frac{1}{2}$,

$$B^{-1}(\log n) = (\log n)^{-\alpha} (\log \log n)^{-\beta} \geq (\log m - 1)^{-\alpha} (\log(\log m - 1))^{-\beta},$$

$$B^{-1}(\log m) = (\log m)^{-\alpha} (\log \log m)^{-\beta}.$$

Подставим в (18) и воспользуемся тем, что для любого $\eta > 0$ при $m \geq m_0$ справедливо неравенство $\log \log m \leq D_3(\log m)^\eta$.

Лемма 10. Если $B(k)$ удовлетворяет условию (II) при $\alpha > 0$, то при $k+p > k \geq k_0$ справедлива оценка

$$\frac{1}{B(k)} - \frac{1}{B(k+p)} \geq C_{\alpha,\beta} \frac{p}{B(k)(k+p)}.$$

Легко разбираются два случая — когда $B'(k)$ убывает и когда $B(k) = k\varphi(k)$, где функция $\varphi(k)$ при $k \geq k_0$ возрастает.

Лемма 11. Пусть $B(k)$ удовлетворяет условию (II) при $\alpha > 0$. Пусть $r \geq 2$ фиксировано, $3 \leq H < M/8$, $M \geq 32$. Рассмотрим индексы

$$m_k = m_k^{(r)} =]M2^{r+kHM^{-1}}[, \quad k = 0, 1, \dots, k_1, \quad k_1 = [M(8H)^{-1}]. \quad (19)$$

Тогда справедлива оценка при целых $k < k+s \leq k_1$:

$$\rho_{k,s}^2 = \|A_{m_k} - A_{m_{k+s}}\|^2 \geq D_0^2 \frac{s^2 H^2 \log(M/(4sH))}{M^2 B(r + \log(4sH))(r + \log M)}.$$

Доказательство. По лемме 1, где $l_k = m_{k+s} - m_k$, имеем

$$\rho_{k,s}^2 \geq l_k^2 m_{k+s}^{-2} (B^{-1}(\log l_k) - B^{-1}(\log m_{k+s})). \quad (20)$$

Оценка этого выражения снизу аналогична оценке сверху в лемме 6. Очевидно, что

$$l_k \geq m_{k+s}(1 - 2^{-sHM^{-1}}) - 1 \geq sH(3M)^{-1}m_{k+s},$$

$$l_k m_{k+s}^{-1} \geq sH(3M)^{-1},$$

$$\log l_k \leq r + \log(sH) + 2, \quad \log M + r + 2 \geq \log m_{k+s} \geq \log M + r,$$

$$M \geq 8sH.$$

Подставляя в выражение (20) и используя лемму 10, получим нужную оценку.

Теорема 6. Пусть для стационарной последовательности (X_k) выполнены условия (I'), (II). Тогда энтропия множества средних (A_n) допускает при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ нижние оценки, такие же по порядку, что и верхние оценки теорем 1–4.

Например, при $\alpha = 2, \beta = 2$

$$N(\varepsilon) \geq D_{2,2}\varepsilon^{-1} \log \log \log \varepsilon^{-1},$$

а при $\alpha = 2, \beta < 2$

$$N(\varepsilon) \geq D_{2,\beta}\varepsilon^{-1} (\log \log \varepsilon^{-1})^{(2-\beta)/2}.$$

Доказательство. Пусть фиксировано $M \geq M_0$, $\varepsilon = C_0/M$ (постоянные C_0, M_0 будут выбраны потом). Для оценки снизу $N(\varepsilon) \geq L_M$ по лемме 8 достаточно найти L_M ε -изолированных элементов последовательности (A_n) . Эти элементы будут иметь номера $m_k^{(r)}$, образованные согласно формуле (19), где $r_M \leq r \leq R_M$, r — четные числа. Для разных значений α, β выбор $H(r), r_M, R_M$ будет различным. Рассмотрим сначала подробно случай $\alpha = 2, \beta \leq 2$, а потом укажем необходимые изменения в доказательстве для остальных случаев.

В рассматриваемом случае положим

$$H(r) = (B(r))^{1/2} = r(\log r)^{\beta/2}, \quad r_M = 2[\log \log M], \quad R_M = [\log M].$$

Упорядочим индексы $m_k^{(r)}$ из формулы (19) по возрастанию: $n_1 < n_2 < \dots < n_{L_M}$, при этом для числа L_M получается оценка

$$L_M \geq CM \sum r^{-1} (\log r)^{-\beta/2},$$

где сумма берется по четным числам r , удовлетворяющим неравенствам $2 \log \log M \leq r < [\log M]$. Поэтому L_M при $\beta = 2$ превосходит выражение $DM \log \log \log M$, а при $\beta < 2$ — выражение $DM(\log \log M)^{(2-\beta)/2}$. Покажем, что

$$\|A_{n_i} - A_{n_j}\| > \frac{2C_0}{M} \quad (i \neq j). \quad (21)$$

а) Пусть сначала n_i, n_j из одной r -й серии,

$$n_i = m_k^{(r)} = m_k, \quad n_j = m_{k+s}^{(r)} = m_{k+s}, \quad s \geq 1, \quad l_k = m_{k+s} - m_k.$$

По лемме 11

$$\rho_{k,s}^2 \geq D_0^2 A^2 M^{-2},$$

где

$$A^2 = A^2(r, s, M) = \frac{s^2 H^2(r) \log(M/(4sH))}{B(r + \log(4sH) + 2)(r + \log M)}. \quad (22)$$

Оценим A^2 снизу. Если $M/2 \geq 4sH \geq \log^2 M$, то при $M \geq M_0$

$$A^2 \geq \frac{D_2 \log^4 M}{B(2 \log M) \cdot 2 \log M} \geq D_1^2,$$

так как $B(2 \log M) \sim (2 \log M)^2 (\log \log M)^\beta \leq C(\log M)^{5/2}$.

Если $4sH < \log^2 M$, то

$$\log \frac{M}{4sH} \sim \log M, \quad \frac{B(r)}{B(r + 2 \log \log M)} \geq \frac{1}{5}, \quad \frac{\log M}{r + \log M} \geq \frac{1}{2},$$

и снова при $M \geq M_0$ имеем $A^2 \geq D_1^2$. Итак, при $M \geq M_0$

$$\rho_{k,s}^2 > \frac{C_1^2}{M^2}. \quad (23)$$

б) Пусть индексы n_i, n_j из разных серий,

$$n = n_i = m_{k_1}^{(r_1)}, \quad m = n_j = m_{k_2}^{(r_2)}, \quad r_2 \geq r_1 + 2.$$

Тогда $m \geq 2n$ и по лемме 9, где можно взять $\delta = 4 > \alpha + 1$, имеем

$$\|A_{n_i} - A_{n_j}\|^2 \geq \frac{D_4}{\log^4 m} \geq \frac{D_3}{\log^4 M} > \frac{C_2^2}{M^2} \quad (M \geq M_0), \quad (24)$$

так как в конструкции (19) $m \leq 2M^2$. Неравенства (23) и (24) означают ε -изолированность элементов $(n_i: 1 \leq i \leq L_M)$, $\varepsilon = C_0/M$, $2C_0 = \min(C_1, C_2)$. По лемме 8 из (21) следует теорема 6 при $\alpha = 2$, $\beta \leq 2$.

Укажем небольшие изменения в доказательстве для остальных случаев.

Если $1 < \alpha < 2$, β — любое, то берем в (19)

$$H(r) = (B(r))^{1/2}, \quad r_M = [\log M], \quad R_M = 2[\log M].$$

Если $\alpha = 1$, β — любое, то полагаем

$$H(r) = (rB(r))^{1/2}(\log M)^{-1/2}, \quad r_M = [\log M], \quad R_M = [\sqrt{M}].$$

При $0 < \alpha < 1$ и любом β проще всего рассмотреть множество средних

$$S = \left\{ A_{2^k}: \frac{M_1}{2} < k < M_1 \right\}, \quad M_1 = M^{2/(1+\alpha)}(\log M)^{-\beta/(1+\alpha)},$$

$$\text{Card } S \sim \frac{M_1}{2}.$$

Тогда по лемме 1 при $M_1/2 < k < j < M_1$ имеем

$$\begin{aligned} \|A_{2^k} - A_{2^j}\|^2 &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k^\alpha (\log k)^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\alpha (\log(k+1))^\beta} \right) \\ &\geq C_{\alpha,\beta} \frac{1}{k^{\alpha+1} (\log k)^\beta} \geq \frac{C_2^2}{M^2}. \end{aligned}$$

Наконец, при $\alpha = 0$, $\beta > 0$ образуем множество S из элементов A_n с номерами m_k , $k = 1, \dots, K_M$, где

$$K_M = \left\lfloor \frac{M^2}{\log^\beta M^2} \right\rfloor, \quad m_k = [2^{n_k}], \quad n_k = 2^{p_k}, \quad p_k = \left(\frac{M^2}{k} \right)^{1/\beta},$$

$$\text{Card } S = K_M.$$

Проводя такие же оценки, как в доказательстве леммы 5б, получим, что для $1 \leq k < j \leq K_M$

$$\|A_{m_k} - A_{m_j}\|^2 \geq \frac{1}{2} [R(m_k) - R(m_j)] \geq \frac{C_2^2}{M^2}.$$

Это заканчивает доказательство теоремы 6.

3. Один класс стационарных последовательностей. В этом пункте построены примеры стационарных последовательностей, для которых реализуются оценки (I), (I'), (II) и, таким образом, справедливы точные по порядку оценки энтропии $N(\varepsilon)$.

Начнем со следующей леммы. Пусть (X_k) — стационарная последовательность с корреляционной функцией $R_1(n)$, пусть функции $F_0(n)$, $F_1(n)$, $R(n)$ определены по формуле (1) п. 1. В настоящем пункте удобнее использовать натуральные логарифмы, положим также

$$L_n = \ln n \quad (n \geq 2), \quad L_n = 1 \quad (n = 1).$$

Лемма 12. Пусть при некоторых $A > 0$, $\alpha > 0$ и B выполнено соотношение

$$R_1(n) = AL_n^{-\alpha} + BL_n^{-\alpha-1} + O(L_n^{-\alpha-2}). \quad (25)$$

Тогда

$$F_0(n) = AnL_n^{-\alpha} + (A\alpha + B)nL_n^{-\alpha-1} + O(nL_n^{-\alpha-2}), \quad (26)$$

$$F_1(n) = \frac{An^2}{2} L_n^{-\alpha} + \left(\frac{A\alpha}{4} + \frac{B}{2} \right) n^2 L_n^{-\alpha-1} + O(n^2 L_n^{-\alpha-2}), \quad (27)$$

$$R(n) = R_1(0)n^{-1} + AL_n^{-\alpha} + \left(\frac{3A\alpha}{2} + B \right) L_n^{-\alpha-1} + O(L_n^{-\alpha-2}), \quad (28)$$

$$R(n) - R(n+1) = A\alpha n^{-1} L_n^{-\alpha-1} (1 + O(L_n^{-1})). \quad (29)$$

Доказательство. Формулы (26)–(28) получаются суммированием по частям в суммах

$$\sum_{k=1}^n L_k^{-\alpha}, \quad \sum_{k=1}^n k L_k^{-\alpha}, \quad \sum_{k=1}^n L_k^{-\alpha-1}.$$

Обозначим $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$. Легко проверяется, что

$$\Delta(n^2 R(n)) = R_1(0) + 2F_0(n).$$

С другой стороны, это выражение равно $(n+1)^2 \Delta R(n) + (2n+1) R(n)$. Поэтому

$$\Delta R(n) = 2(n+1)^{-2} (F_0(n) - nR(n)) + O(n^{-2}),$$

и формула (29) получается подстановкой формул (26) и (28).

Лемма 13. Если выполнено условие (25), то при $n_0 \leq n < m$ справедливы неравенства

$$D_1(L_n^{-\alpha} - L_m^{-\alpha}) \leq R(n) - R(m) \leq D_2(L_n^{-\alpha} - L_m^{-\alpha}).$$

Действительно, по лемме 12

$$B_1 n^{-1} L_n^{-\alpha-1} \leq R(n) - R(n+1) \leq B_2 n^{-1} L_n^{-\alpha-1} \quad (n \geq n_0).$$

Кроме того,

$$C_1(L_n^{-\alpha} - L_{n+1}^{-\alpha}) \leq n^{-1} L_n^{-\alpha-1} \leq C_2(L_n^{-\alpha} - L_{n+1}^{-\alpha}) \quad (n \geq 2).$$

Записывая $R(n) - R(m) = \sum_{k=n}^{m-1} (R(k) - R(k+1))$ и используя эти оценки, получим утверждение леммы 13.

Леммы 12 и 13 показывают, что если корреляционная функция стационарной последовательности (X_k) удовлетворяет условию (25), то выполнены предположения (I), (I'), (II) из пп. 1 и 2 при $B(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$. Поэтому для системы (X_k) справедливы как верхние, так и нижние оценки энтропии средних $N(\varepsilon)$, полученные выше.

Наша следующая цель — показать, что существует класс стационарных последовательностей, для которых предположение (25) действительно выполняется.

Рассмотрим стационарную последовательность (X_n) , образованную процессом скользящего суммирования

$$X_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_{k+n}, \quad (30)$$

где (Φ_n) — произвольная ортонормированная система в $L^2(\Omega)$, $\mathbf{E}\Phi_n = 0$, $(c_n) \in l^2$. Корреляционная функция $R_1(n)$ имеет вид

$$R_1(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k c_{k+n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Нас интересует асимптотика $R_1(n)$ в зависимости от скорости убывания коэффициентов (c_n) . Оценить порядок убывания $R_1(n)$ можно по следующей лемме. Пусть $f(k)$ — медленно меняющаяся положительная функция, т.е. $f(ck)/f(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $c > 0$.

Лемма 14. *Предположим, что*

$$c_k = (kf(k))^{-1/2}, \quad \sum c_k^2 < \infty, \quad c_k \downarrow 0, \quad g(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2.$$

Тогда

$$g(n) \leq R_1(n) \leq g(n) + C(f(n))^{-1}. \quad (31)$$

Действительно, в силу монотонного убывания коэффициентов левое неравенство очевидно. Далее,

$$R_1(n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 + c_{n+1} \sum_{k=1}^n c_k,$$

и для медленно меняющейся функции $f(k)$ второе слагаемое есть $O((f(n))^{-1})$. В частности, для главного интересующего нас случая, когда $f(1) = 1$, $f(k) = (\ln k)^{2\beta}$ ($k \geq 2$), $\beta > \frac{1}{2}$, из (31) получаем оценку

$$R_1(n) \sim A_\alpha (\ln n)^{-\alpha}, \quad \alpha = 2\beta - 1 > 0.$$

Однако нам нужна более точная асимптотика функции $R_1(n)$.

Лемма 15. Если (X_k) — стационарная последовательность, образованная по формуле (30), где $c_k = k^{-1/2} L_k^{-\beta}$, $\beta > \frac{1}{2}$, то для корреляционной функции $R_1(n)$ справедлива формула (25), где $\alpha = 2\beta - 1$, $A = \alpha^{-1}$, $B = \ln 4$.

Доказательство. При оценке выражения $R_1(n)$ заменим сумму $\sum_{k=1}^{\infty} c_k c_{k+n}$ интегралом

$$J_n = \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+n)} (\ln x)^{\beta} (\ln(x+n))^{\beta}},$$

с погрешностью $O(n^{-1/2})$, что заведомо меньше остаточного члена в формуле (25). Обозначим

$$J_n = I_n + K_n, \quad I_n = \int_2^{n/2}, \quad K_n = \int_{n/2}^{\infty}.$$

Покажем, что

$$I_n = B_1 L_n^{-2\beta} + O(L_n^{-2\beta-1}), \quad (32)$$

$$K_n = \alpha^{-1} L_n^{-2\beta+1} + B_2 L_n^{-2\beta} + O(L_n^{-2\beta-1}), \quad (33)$$

где $B_1 + B_2 = \ln 4$.

Оценка I_n . Представим $I_n = I'_n + I''_n$, где I'_n — интеграл от 2 до $\sqrt{n}$, I''_n — интеграл от $\sqrt{n}$ до $n/2$. Очевидно, что $I'_n = O(n^{-1/4})$. Замена $x = ny$ дает:

$$I''_n = L_n^{-2\beta} \left(\int_{n^{-1/2}}^{1/2} (y(y+1))^{-1/2} dy + \int_{n^{-1/2}}^{1/2} G(y)(y(y+1))^{-1/2} dy \right).$$

Здесь

$$G(y) = (1 + L_n^{-1} \ln y)^{-\beta} (1 + L_n^{-1} \ln(y+1))^{-\beta} - 1 = O\left(L_n^{-1} (|\ln y| + |\ln(y+1)|)\right),$$

так как при $n^{-1/2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ имеем $L_n^{-1} |\ln y| \leq \frac{1}{2}$, $L_n^{-1} |\ln(y+1)| \leq \frac{1}{2}$. Далее,

$$\int_0^{1/2} (y(y+1))^{-1/2} dy = \int_{1/2}^1 \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1/2} dt = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Собирая эти оценки, получим соотношение (32), где $B_1 = \ln(2 + \sqrt{3})$.

Оценка K_n . Замены $x = ny$, $t = y + \frac{1}{2}$ дают

$$K_n = \int_1^{\infty} \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1/2} \left(\ln\left(t - \frac{1}{2}\right) + L_n\right)^{-\beta} \left(\ln\left(t + \frac{1}{2}\right) + L_n\right)^{-\beta} dt.$$

Для оценки скобок, содержащих логарифмы, представим их в виде $(\ln t + L_n)^{-2\beta} (1 + O(t^{-1} L_n^{-1}))$.

Поэтому

$$K_n = K'_n + K''_n, \quad K''_n = O(L_n^{-2\beta-1}), \quad K'_n = \int_1^{\infty} \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1/2} (\ln t + L_n)^{-2\beta} dt.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \ln \left(t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \right) - \ln(2t), \quad \Phi(\infty) = 0, \\ \Phi(1) &= \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln 4, \quad \Phi(t) = O(t^{-2}) \quad (t \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned}K'_n &= \int_1^\infty t^{-1}(\ln t + L_n)^{-2\beta} dt + \int_1^\infty (\ln t + L_n)^{-2\beta} d\Phi(t) \\ &= \alpha^{-1} L_n^{-2\beta+1} - \Phi(1) L_n^{-2\beta} + O(L_n^{-2\beta-1}),\end{aligned}$$

и для K_n верна формула (33), где $B_2 = \ln 4 - \ln(2 + \sqrt{3})$.

Поэтому справедлива асимптотика (25) для $J_n = I_n + K_n$.

Применяя леммы 12–15 и результаты пп. 1 и 2, получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Рассмотрим стационарную последовательность, определенную формулой (30), где $c_1 = 1$, $c_k = k^{-1/2}(\ln k)^{-\beta}$ ($k \geq 2$), (Φ_k) — произвольная ортонормированная система, $\alpha = 2\beta - 1 > 0$. Для энтропии множества средних A_n этой последовательности справедливы точные по порядку оценки*

$$C_\alpha \Psi_\alpha(\varepsilon) \leq N(\varepsilon) \leq D_\alpha \Psi_\alpha(\varepsilon),$$

где при $\alpha > 2$, $\alpha = 2$, $1 < \alpha < 2$, $\alpha = 1$, $0 < \alpha < 1$ функция $\Psi_\alpha(\varepsilon)$ равна соответственно

$$\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon(\log \log \varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon^{-1}(\log \varepsilon^{-1})^{(2-\alpha)/2}, \quad \varepsilon^{-1}(\log \varepsilon^{-1})^{3/2}, \quad \varepsilon^{-2/(\alpha+1)}.$$

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно проверить, что правое неравенство леммы 13 справедливо при более общем предположении

$$R_1(n) = AL_n^{-\alpha}(1 + O(L_n^{-1})).$$

Таким образом, уже при этом предположении верны верхние оценки энтропии средних $N(\varepsilon)$, полученные в п. 1 (при $\alpha > 0$, $\beta = 0$). Однако для двусторонних оценок энтропии приходится использовать более точную асимптотику корреляционной функции.

З а м е ч а н и е 3. Мы ограничились здесь «чисто логарифмической» шкалой для $R_1(n)$ и $R(n)$. Аналогичные результаты можно получить и в шкале с повторными логарифмами, взяв

$$c_k = k^{-1/2}(\ln k)^{-\beta}(\ln \ln k)^{-\gamma}, \quad k \geq 3.$$

З а м е ч а н и е 4. Как известно, спектральная плотность $f(\lambda)$ последовательности (X_k) имеет вид

$$f(\lambda) = \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\lambda} \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\lambda \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\lambda \right)^2.$$

Для рассматриваемого случая, когда

$$c_k = k^{-1/2}(\ln k)^{-(\alpha+1)/2}, \quad \alpha > 0, \quad k \geq 2,$$

известные результаты по асимптотике тригонометрических рядов (см. [6, с. 300]) дают следующую оценку:

$$f(\lambda) \leq C_1 |\lambda|^{-1} \left(\ln \frac{2\pi}{|\lambda|} \right)^{-(\alpha+1)}, \quad 0 < |\lambda| \leq \pi. \quad (34)$$

В заключение получим оценки энтропии $N(\varepsilon)$ при ограничениях на спектральную плотность последовательности (X_k) типа условия (34). Известна следующая связь функции $R(n)$ и спектральной плотности:

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad K_n(\lambda) = \frac{\sin^2 n\lambda/2}{\pi n^2 \sin^2 \lambda/2}.$$

Поэтому скорость убывания $R(n)$ связана с ограничениями на поведение спектральной плотности при $\lambda \rightarrow 0$. Подробнее об этой связи см., например, работы [7]–[9].

Будем говорить, что стационарная последовательность принадлежит классу $S_{\gamma, \delta}$, если она имеет спектральную плотность, удовлетворяющую условию

$$f(\lambda) \leq C |\lambda|^{-1} \left(\ln \frac{2\pi}{|\lambda|} \right)^{-\gamma} \left(\ln \ln \frac{4\pi}{|\lambda|} \right)^{-\delta} \quad (0 < |\lambda| \leq \pi).$$

Так как $f(\lambda) \in L(\Omega)$, то естественно считать, что либо $\gamma > 1$, δ — любое, либо $\gamma = 1$, $\delta > 1$. Обозначим в первом случае $\alpha = \gamma - 1$, $\beta = \delta$, а во втором $\alpha = 0$, $\beta = \delta - 1$.

Лемма 16. Если $(X_k) \in S_{\gamma, \delta}$, то выполнены условия (I), (II) п. 1, т.е. при $2 < n < m$

$$|R(n) - R(m)| \leq D_1 \left((\ln n)^{-\alpha} (\ln \ln n)^{-\beta} - (\ln m)^{-\alpha} (\ln \ln m)^{-\beta} \right). \quad (35)$$

Обозначим $L_n(\lambda) = K_n(\lambda) - K_{n+1}(\lambda)$. Для доказательства леммы 16 нужны следующие оценки ядер $L_n(\lambda)$.

Лемма 17. Справедливы следующие неравенства: $|L_n(\lambda)| \leq C_1 n \lambda^2$ при $|\lambda| n \leq 1$, $|L_n(\lambda)| \leq C_2 n^{-2} |\lambda|^{-1}$ при $|\lambda| n > 1$.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} |L_n(\lambda)| &\leq C \lambda^{-2} |M_n(\lambda)|, \\ M_n(\lambda) &= n^{-2} \sin^2 \frac{n\lambda}{2} - (n+1)^{-2} \sin^2 \frac{(n+1)\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Для оценки $M_n(\lambda)$ применим формулу Лагранжа:

$$M_n(\lambda) = \frac{\partial}{\partial u} \left(u^{-2} \sin^2 \frac{u\lambda}{2} \right) \Big|_{u=n+\theta}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Поэтому $|M_n(\lambda)|$ равен значению при $u = n + \theta$ функции

$$\frac{|u\lambda \sin u\lambda - 2(1 - \cos u\lambda)|}{2u^3}. \quad (37)$$

Легко проверяется, что при $u|\lambda| \leq 1$ числитель есть $O((u\lambda)^4)$, при $u|\lambda| > 1$ он не превосходит $5u|\lambda|$. Из (36), (37) получаем нужные оценки.

Доказательство леммы 16. Оценим сначала разность $\Delta R(n) = R(n+1) - R(n)$. Для $f(\lambda) \in S_{\gamma, \delta}$ имеем:

$$\begin{aligned} |\Delta R(n)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) |L_n(\lambda)| d\lambda \leq C_1 \int_{n|\lambda| < 1} n|\lambda| \left(\ln \frac{2\pi}{|\lambda|} \right)^{-\gamma} \left(\ln \ln \frac{4\pi}{|\lambda|} \right)^{-\delta} d\lambda \\ &\quad + C_2 \int_{n|\lambda| > 1} n^{-2} \lambda^{-2} \left(\ln \frac{2\pi}{|\lambda|} \right)^{-\gamma} \left(\ln \ln \frac{4\pi}{|\lambda|} \right)^{-\delta} d\lambda \\ &= O(n^{-1} (\ln n)^{-\gamma} (\ln \ln n)^{-\delta}). \end{aligned} \quad (38)$$

Так как $|R(n) - R(m)| \leq \sum_{k=m}^n |\Delta R(k)|$, то из (38) вытекает утверждение леммы.

Поэтому к стационарным последовательностям класса $S_{\gamma, \delta}$ применимы верхние оценки энтропии из теорем 1–4. Ограничимся случаем $\gamma = \alpha + 1$, $\alpha > 0$, $\beta = 0$, будем обозначать $S_{\alpha+1, 0} = S_{\alpha+1}$.

Теорема 8. а) Если $(X_k) \in S_{\alpha+1}$, то справедливы оценки

$$N(\varepsilon) \leq C_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\varepsilon),$$

где функция $\Psi_{\alpha}(\varepsilon)$ та же самая, что в теореме 7.

б) Для любого $\alpha > 0$ существует стационарная последовательность $(X_k) \in S_{\alpha+1}$ такая, что

$$N(\varepsilon) \geq D_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\varepsilon). \quad (39)$$

Доказательство. Первая часть теоремы — переформулировка теорем 1–4 в случае $\alpha = \gamma - 1$, $\beta = 0$ (с использованием леммы 16). Далее, в силу замечания 2, стационарная последовательность (X_k) , образованная по формуле (30), где

$$c_k = k^{-1/2} (\ln k)^{-(\alpha+1)/2} \quad (k \geq 2), \quad \alpha > 0,$$

имеет спектральную плотность класса $S_{\alpha+1}$. В то же время по теореме 7 для нее справедливы нижние оценки (39).

З а м е ч а н и е 5. Это утверждение дает более точные оценки энтропии для $(X_k) \in S_{\alpha+1}$, чем теорема из работы [3]. Действительно, для $(X_k) \in S_{\alpha+1}$ выполнено соотношение

$$\int_{|\lambda| \leq \lambda_0} (\log \lambda^{-1})^{\eta} f(\lambda) d\lambda < \infty$$

при $\eta < \alpha$, т.е. по теореме из [3] получалась бы оценка

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2}(\log \varepsilon^{-1})^{-\eta}).$$

Порядок этой оценки для всех α сильно отличается от порядка функции $\Psi_\alpha(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Talagrand M.* Applying a theorem of Fernique. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1996, v. 32, № 6, p. 779–799.
2. *Weber M.* Entropie métrique et convergence presque partout. Paris: Hermann, 1998, 151 p.
3. *Gamet C., Weber M.* Entropy numbers of some ergodic averages. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, т. 44, в. 4, с. 776–795.
4. *Гапошкин В. Ф.* Оценки энтропии множества средних некоторых классов стационарных и квазистационарных последовательностей. — *Матем. заметки*, 2005, т. 78, № 1, с. 52–58.
5. *Гапошкин В. Ф.* Точные оценки метрической энтропии множества средних квазистационарных процессов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, в. 4, с. 785–793.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т. I. М.: ИЛ, 1965, 615 с.
7. *Гапошкин В. Ф.* Оценки средних для почти всех реализаций стационарных процессов. — *Сиб. матем. журн.*, 1979, т. 20, № 5, с. 978–989.
8. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах. — *Успехи матем. наук*, 1996, т. 51, № 4, с. 73–124.
9. *Гапошкин В. Ф.* О скорости убывания вероятностей ε -уклонений средних стационарных процессов. — *Матем. заметки*, 1998, т. 64, № 3, с. 366–372.

Поступила в редакцию
22.XII.2005

Исправленный вариант
31.I.2007