Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Запорожец, А. И. Назаров, Как мало бывает корней у случайного полинома в среднем?, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 1, 40–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:47:04

© 2008 г.

ЗАПОРОЖЕЦ Д. Н.*, НАЗАРОВ А. И.**

КАК МАЛО БЫВАЕТ КОРНЕЙ У СЛУЧАЙНОГО ПОЛИНОМА В СРЕДНЕМ?¹⁾

Пусть $\mathcal{N}(G_n)$ означает число вещественных корней случайного полинома G_n степени n с независимыми одинаково распределенными случайными коэффициентами. В работе изучается вопрос, насколько малой может быть величина $\sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E} \mathcal{N}(G_n)$ при разных условиях, наложенных на распределение коэффициентов G_n .

Ключевые слова и фразы: случайный полином, среднее число вещественных корней.

Введение. Пусть Θ — множество всех невырожденных (т.е. не сводящихся к одному атому) вероятностных распределений на $\mathbf{R}$. Возьмем последовательность $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ независимых случайных величин с распределением $\theta \in \Theta$ и рассмотрим полиномы одной переменной

$$G_n(t) = \xi_n t^n + \xi_{n-1} t^{n-1} + \dots + \xi_1 t + \xi_0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Обозначим $\mathcal{N}(G_n)$ число вещественных корней полинома G_n , посчитанных с учетом их кратности. Что можно сказать о среднем значении $\mathcal{N}(G_n)$?

Первые содержательные асимптотические оценки $\mathbf{E}_\theta \mathcal{N}(G_n)$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторых конкретных распределений θ были получены в работах [1]–[4]. Вскоре после этого М. Кац [5] получил первый асимптотически точный результат. Он доказал справедливость соотношения

$$\mathbf{E} \mathcal{N}(G_n) = \frac{2}{\pi} \log n \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

для стандартных гауссовских коэффициентов (см. также [6], [7] для других конкретных распределений ξ_0). Впоследствии И. А. Ибрагимов и

* С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, ул. Фонтанка, 27, 191023 С.-Петербург, Россия; e-mail: zap1979@gmail.com

** С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Старый Петергоф, Университетский пр-т, 28, 198504 С.-Петербург, Россия; e-mail: an@an4751.spb.edu

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 07-01-00159, 08-01-00098) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-4222.2006.1).

Н. Б. Маслова [8] обобщили этот результат на класс распределений, принадлежащих области притяжения произвольного невырожденного устойчивого закона (коэффициент $2/\pi$ при этом заменяется на константу, зависящую от параметров устойчивого закона).

Несмотря на большую общность данного результата, существуют распределения, дающие принципиально другое поведение среднего числа вещественных корней полинома. Так, в [9] было построено невырожденное симметричное распределение коэффициентов, при котором среднее число вещественных корней G_n ограничено равномерно по $n \in \mathbb{N}$ (а именно, $\mathbf{E} \mathcal{N}(G_n) < 9$). Возникает естественный вопрос: насколько можно улучшить оценку 9 в этом утверждении? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 1. Для $a, b \geq 0$ таких, что $0 < a + b \leq 1$, обозначим $\Theta_{a,b} \subset \Theta$ множество всех распределений случайной величины ξ_0 , для которых $\mathbf{P}\{\xi_0 > 0\} = a$, $\mathbf{P}\{\xi_0 < 0\} = b$. Справедливо следующее соотношение:

$$\inf_{\theta \in \Theta_{a,b}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_\theta \{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} = 1 + \frac{1 - |a - b|}{a + b}. \quad (1)$$

Статья посвящена доказательству теоремы 1 и организована следующим образом. В п. 1 доказываются несколько вспомогательных утверждений о полиномах. В п. 2 сначала выводятся асимптотические оценки вероятностей некоторых событий, которые потом используются для оценки $\mathbf{E} \mathcal{N}(G_n)$ снизу. Для оценки сверху в п. 3 применяется модификация конструкции из [9]. Совпадение верхней и нижней оценок и доказывает теорему. Пункт 4 содержит несколько простых следствий.

Наряду с обозначением $\mathcal{N}$ мы будем использовать $\mathcal{N}^+$ и $\mathcal{N}^-$ — число положительных и отрицательных корней соответственно. Также положим $c \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\xi_0 = 0\} = 1 - a - b$.

1. Вспомогательные утверждения о полиномах.

Лемма 1. Пусть дан полином $g(t) = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0$, $a_0 a_m \neq 0$.

1. $\mathcal{N}^+(g)$ оценивается снизу следующим образом:

	$a_0 g(1) > 0$	$a_0 g(1) < 0$
$a_0 a_m > 0$	$\mathcal{N}^+(g) \geq 0$	$\mathcal{N}^+(g) \geq 2$
$a_0 a_m < 0$	$\mathcal{N}^+(g) \geq 1$	

2. $\mathcal{N}^-(g)$ оценивается снизу следующим образом:

	$a_0 g(-1) > 0$	$a_0 g(-1) < 0$
$a_0 a_m > 0$	$\mathcal{N}^-(g) \geq \frac{1}{2} [1 - (-1)^m]$	$\mathcal{N}^-(g) \geq 1 + \frac{1}{2} [1 + (-1)^m]$
$a_0 a_m < 0$	$\mathcal{N}^-(g) \geq \frac{1}{2} [1 + (-1)^m]$	$\mathcal{N}^-(g) \geq 1 + \frac{1}{2} [1 - (-1)^m]$

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из теоремы Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Второе утверждение получается из первого заменой $t \rightarrow -t$.

Лемма 2. Пусть дан полином $g(t) = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0$, причем $|a_m|, |a_0| \geq 1$ и $a_m a_0 > 0$. Если существует коэффициент a_k такой, что $a_k a_0 > 0$ и

$$|a_k| \geq \left(m \max_{i \neq k} \{|a_i|\} \right)^{2m},$$

то полином $g(t)$ не имеет положительных корней.

Доказательство. Введем обозначение $K \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \neq k} \{|a_i|\}$. Очевидно, что $K \geq 1$. Представим $g(t)$ в следующем виде:

$$g(t) = (a_m t^m + a_k t^k + a_0) + \sum_{i \neq 0, k, m} a_i t^i \quad (2)$$

(здесь мы предположили, что $k \neq 0, m$; случаи равенства разбираются совершенно аналогично). Для того чтобы доказать, что g не имеет положительных корней, достаточно проверить, что при $t > 0$ выражение в скобках в правой части (2) строго больше оставшейся суммы по абсолютной величине. Действительно, при $0 < t \leq (mK)^{-1}$ выполнено

$$|a_m t^m + a_k t^k + a_0| > |a_0| \geq 1 \geq m \cdot K t \geq \sum_{i \neq 0, k, m} |a_i| t \geq \left| \sum_{i \neq 0, k, m} a_i t^i \right|;$$

при $(mK)^{-1} \leq t \leq mK$ выполнено

$$\begin{aligned} |a_m t^m + a_k t^k + a_0| &> |a_k t^k| \geq (mK)^{2m} (mK)^{-k} \\ &\geq m \cdot K (mK)^{m-1} \geq \left| \sum_{i \neq 0, k, m} a_i t^i \right|; \end{aligned}$$

при $t \geq mK$ выполнено

$$|a_m t^m + a_k t^k + a_0| > |a_m t^m| \geq t^m \geq m \cdot K t^{m-1} \geq \left| \sum_{i \neq 0, k, m} a_i t^i \right|.$$

Лемма 3. Пусть дан полином $g(t) = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0$, $a_0 a_m \neq 0$, с коэффициентами, среди которых есть как положительные, так и отрицательные. Пусть l есть минимальный индекс, для которого выполнено $a_0 a_l < 0$. Тогда

$$\mathcal{N}^+(g) \leq \mathcal{N}^+(g^{(l)}) + 1.$$

Доказательство. Для удобства изложения будем считать, что $a_0 > 0$, $a_l < 0$. Пусть s обозначает максимальный индекс такой, что $s < l$ и $a_s \neq 0$ (тем самым, $a_s > 0$). По теореме Ролля

$$\mathcal{N}^+(g^{(s)}) \leq \mathcal{N}^+(g^{(s+1)}) + 1. \quad (3)$$

Далее, для любого $i = 0, \dots, s-1$ у полинома $g^{(i)}$ свободный член неотрицателен, а самый младший из ненулевых коэффициентов, за исключением свободного члена, положителен. Поэтому, как легко видеть, между минимальным положительным корнем $g^{(i)}$ (если он есть) и началом координат найдется по меньшей мере один корень $g^{(i+1)}$. Это выполняется также и при $i = s+1, \dots, l-1$, так как в этом случае в начале координат лежит корень $g^{(i)}$. Следовательно, по теореме Ролля выполнено

$$\mathcal{N}^+(g^{(i)}) \leq \mathcal{N}^+(g^{(i+1)}), \quad i = 0, \dots, s-1, s+1, \dots, l-1. \quad (4)$$

Объединение неравенств (3) и (4) доказывает лемму.

Лемма 4. Пусть дан полином $g(t) = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0$, $a_0 a_m \neq 0$, причем все ненулевые коэффициенты удовлетворяют неравенству $|a_i| \geq 1$. Если существует коэффициент a_k , для которого

$$|a_k| \geq \left((m!)^m \max_{i \neq k} \{|a_i|\} \right)^{2m}, \quad (5)$$

то количество положительных корней полинома $g(t)$ оценивается сверху следующим образом:

	$a_0 a_k > 0$	$a_0 a_k < 0$
$a_0 a_m > 0$	$\mathcal{N}^+(g) = 0$	$\mathcal{N}^+(g) \leq 2$
$a_0 a_m < 0$	$\mathcal{N}^+(g) \leq 1$	

Доказательство. При $a_0 a_m > 0$, $a_0 a_k > 0$ отсутствие положительных корней непосредственно следует из леммы 2.

Пусть $a_0 a_m < 0$. Можно считать, что $a_0 a_k < 0$: в противном случае надо вместо $g(t)$ рассмотреть полином

$$\tilde{g}(t) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 t^m + \dots + a_{m-1} t + a_m,$$

после чего воспользоваться очевидным равенством $\mathcal{N}^+(g) = \mathcal{N}^+(\tilde{g})$. Обозначим l минимальный индекс, для которого $a_0 a_l < 0$. Тогда $1 \leq l \leq k$ и

$$g^{(l)}(t) = \sum_{i=0}^{m-l} \frac{(l+i)!}{i!} a_{l+i} t^i.$$

При $i \neq k-l$ имеем

$$\left((m-l) \frac{(l+i)!}{i!} |a_{l+i}| \right)^{2(m-l)} \leq ((m!)^m |a_{l+i}|)^{2m} \leq |a_k| \leq \frac{k!}{(k-l)!} |a_k|,$$

следовательно, $g^{(l)}$ удовлетворяет условию леммы 2, и $\mathcal{N}^+(g^{(l)}) = 0$. По лемме 3 получаем $\mathcal{N}^+(g) \leq \mathcal{N}^+(g^{(l)}) + 1 = 1$.

Пусть, наконец, $a_0 a_m > 0$, $a_0 a_k < 0$. Снова воспользовавшись введенным обозначением l , при $i \neq k - l$ имеем

$$\left(((m-l)!)^{m-l} \frac{(l+i)!}{i!} |a_{l+i}| \right)^{2(m-l)} \leq ((m!)^m |a_{l+i}|)^{2m} \leq |a_k| \leq \frac{k!}{(k-l)!} |a_k|,$$

следовательно, $g^{(l)}$ удовлетворяет условию настоящей леммы и подпадает под предыдущий, уже доказанный, случай, поэтому $\mathcal{N}^+(g^{(l)}) \leq 1$. По лемме 3 получаем $\mathcal{N}^+(g) \leq \mathcal{N}^+(g^{(l)}) + 1 \leq 2$.

Следствие. В условиях леммы 4 количество вещественных корней полинома оценивается следующим образом:

	$a_0 a_k > 0$	$a_0 a_k < 0$
$a_0 a_m > 0$	$\mathcal{N}(g) \leq 1 - \frac{1}{2} (-1)^k [1 + (-1)^m]$	$\mathcal{N}(g) \leq 3 + \frac{1}{2} (-1)^k [1 + (-1)^m]$
$a_0 a_m < 0$	$\mathcal{N}(g) \leq 2 - \frac{1}{2} (-1)^k [1 - (-1)^m]$	$\mathcal{N}(g) \leq 2 + \frac{1}{2} (-1)^k [1 - (-1)^m]$

Доказательство. Применяя лемму 4 к полиному $G(-t)$, получаем оценку числа отрицательных корней:

	$a_0 a_k > 0$	$a_0 a_k < 0$
$a_0 a_m > 0$	$\mathcal{N}^-(g) \leq 1 - \frac{1}{2} (-1)^k [1 + (-1)^m]$	$\mathcal{N}^-(g) \leq 1 + \frac{1}{2} (-1)^k [1 + (-1)^m]$
$a_0 a_m < 0$	$\mathcal{N}^-(g) \leq 1 - \frac{1}{2} (-1)^k [1 - (-1)^m]$	$\mathcal{N}^-(g) \leq 1 + \frac{1}{2} (-1)^k [1 - (-1)^m]$

Осталось ее объединить с оценкой числа положительных корней, полученной в лемме (нулевых корней нет, так как $a_0 \neq 0$).

2. Оценка снизу. Сначала получим асимптотические оценки вероятностей некоторых событий, которые потом будут нами использованы для вывода оценки величины $\mathbf{E} \mathcal{N}(G_n)$ снизу. Для этого нам понадобятся следующие обозначения:

$$S_n^+ \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \xi_i = G_n(1) - G_n(0), \quad S_n^- \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^i \xi_i = G_n(-1) - G_n(0).$$

Лемма 5. Для любого $A > 0$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|S_n^-| < A\} = 0; \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|S_n^+| < A\} = 0. \quad (7)$$

Доказательство. Данные соотношения следуют из того, что при сложении независимых случайных величин функция концентрации не возрастает, а функция концентрации произвольного невырожденного случайного блуждания стремится к нулю (см., например, [10, гл. 4]).

Лемма 6. *Выполнены следующие соотношения:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_0(\xi_0 + S_{n-1}^-) \leq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0\} = 0; \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^+) \geq 0\} = 0. \quad (9)$$

Доказательство. Докажем (8). Для этого зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $A > 0$ такое, что $\mathbf{P}\{|\xi_0| + |\xi_n| \geq A\} < \varepsilon$. Получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_0(\xi_0 + S_{n-1}^-) \leq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0\} &\leq \mathbf{P}\{|S_{n-1}^-| \leq |\xi_0| + |\xi_n|\} \\ &= \mathbf{P}\{|S_{n-1}^-| \leq |\xi_0| + |\xi_n| \mid |\xi_0| + |\xi_n| \geq A\} \mathbf{P}\{|\xi_0| + |\xi_n| \geq A\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{|S_{n-1}^-| \leq |\xi_0| + |\xi_n| \mid |\xi_0| + |\xi_n| < A\} \mathbf{P}\{|\xi_0| + |\xi_n| < A\} \\ &\leq \varepsilon + \mathbf{P}\{|S_{n-1}^-| < A\}. \end{aligned}$$

По лемме 5 второе слагаемое стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому, в силу произвольности ε , (8) доказано. Соотношение (9) доказывается аналогично с использованием (7).

Лемма 7. *Выполнены следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^+) < 0\} \\ \geq \frac{1}{2} [\mathbf{P}\{\xi_0 > 0\}]^2 + [\mathbf{P}\{\xi_0 < 0\}]^2 - |\mathbf{P}\{\xi_0 > 0\}|^2 - |\mathbf{P}\{\xi_0 < 0\}|^2); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n \neq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n \neq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^-) < 0\} = \frac{1}{2} \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n \neq 0\}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0, \xi_n(\xi_0 + S_n^-) > 0\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0, \xi_n(\xi_0 + S_n^-) < 0\} = \frac{1}{2} \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n \neq 0\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (10) зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Используя (9), получаем, что при всех достаточно больших n выполнено

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^+) < 0\} &\geq \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0\} \\ &\quad - \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^+) \geq 0\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0\} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_0 > 0, \xi_n > 0, S_{n-1}^+ \leq 0\} + \mathbf{P}\{\xi_0 < 0, \xi_n < 0, S_{n-1}^+ \geq 0\} \\ &= [\mathbf{P}\{\xi_0 > 0\}]^2 \mathbf{P}\{S_{n-1}^+ \leq 0\} + [\mathbf{P}\{\xi_0 < 0\}]^2 \mathbf{P}\{S_{n-1}^+ \geq 0\} \\ &\geq \frac{1}{2} ([\mathbf{P}\{\xi_0 > 0\}]^2 + [\mathbf{P}\{\xi_0 < 0\}]^2 - |\mathbf{P}\{\xi_0 > 0\}|^2 - |\mathbf{P}\{\xi_0 < 0\}|^2), \end{aligned}$$

таким образом, (10) доказано.

Перейдем к доказательству соотношений (11). Заметим, что, в силу (8) и независимости ξ_n от ξ_0 и S_{n-1}^- , соотношения (11) равносильны следующим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_0(\xi_0 + S_n^-) < 0\} = \frac{1}{2} \mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0\}. \quad (13)$$

Для доказательства (13) зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем такое $B > 0$, для которого выполнено $\mathbf{P}\{|\xi_0| < B\} > 1 - \varepsilon$. Если n четно, то S_n^- является симметрично распределенной случайной величиной. Поэтому в силу (6) существует такое N , что при четном $n \geq N - 1$ выполнено $\mathbf{P}\{S_n^- > 2B\} > 1/2 - \varepsilon$. Если же n нечетно, то, ввиду четности $n - 1$, при $n \geq N$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n^- > B\} &= \mathbf{P}\{S_{n-1}^- - \xi_n > B\} \geq \mathbf{P}\{S_{n-1}^- > 2B, \xi_n < B\} \\ &\geq \mathbf{P}\{S_{n-1}^- > 2B\} - \mathbf{P}\{\xi_n \geq B\} \geq \frac{1}{2} - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В результате при любом $n \geq N$ имеем

$$\mathbf{P}\{\xi_0 > -B, S_n^- > B\} \geq \mathbf{P}\{S_n^- > B\} - \mathbf{P}\{\xi_0 \leq -B\} \geq \frac{1}{2} - 3\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_0 < 0, \xi_0 + S_n^- > 0\} &\geq \mathbf{P}\{\xi_0 < 0, \xi_0 + S_n^- > 0 \mid \xi_0 > -B, S_n^- > B\} \mathbf{P}\{\xi_0 > -B, S_n^- > B\} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) \mathbf{P}\{\xi_0 < 0, \xi_0 + S_n^- > 0 \mid \xi_0 > -B, S_n^- > B\} \\ &= \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) \mathbf{P}\{\xi_0 < 0 \mid \xi_0 > -B, S_n^- > B\}. \end{aligned}$$

В силу независимости ξ_0 и S_n^- ,

$$\mathbf{P}\{\xi_0 < 0 \mid \xi_0 > -B, S_n^- > B\} = \mathbf{P}\{\xi_0 < 0 \mid \xi_0 > -B\},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_0 < 0, \xi_0 + S_n^- > 0\} &\geq \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) \mathbf{P}\{\xi_0 < 0 \mid \xi_0 > -B\} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) (\mathbf{P}\{\xi_0 < 0\} - \varepsilon). \end{aligned}$$

Точно так же доказывается, что при всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}\{\xi_0 > 0, \xi_0 + S_n^- < 0\} \geq \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) (\mathbf{P}\{\xi_0 > 0\} - \varepsilon).$$

Складывая эти два неравенства и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_0(\xi_0 + S_n^-) < 0\} \geq \frac{1}{2} \mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0\}.$$

Аналогично получается соотношение

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0\} \geq \frac{1}{2} \mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0\}.$$

Осталось заметить, что

$$\mathbf{P}\{\xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0\} + \mathbf{P}\{\xi_0(\xi_0 + S_n^-) < 0\} \leq \mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0\}.$$

Последние три неравенства доказывают (13) и, следовательно, (11). Соотношение (12) доказывается аналогично.

Теперь перейдем к доказательству основного утверждения этого пункта.

Лемма 8. Для любого распределения $\theta \in \Theta_{a,b}$ выполнено

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}_\theta\{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} \geq 1 + \frac{1 - |a - b|}{a + b}. \quad (14)$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем, в соответствии с леммой 7, такое N , что при $n \geq N$ выполнены соотношения

$$\mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0\} \geq \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - |a^2 - b^2|) - \varepsilon \quad (15)$$

и

$$\begin{aligned} & \left| (a + b)^{-2} \mathbf{P}\{\xi_n \neq 0, \xi_0 G_n(-1) > 0\} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon, \\ & \left| (a + b)^{-2} \mathbf{P}\{\xi_n \neq 0, \xi_0 G_n(-1) < 0\} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon, \\ & \left| (a + b)^{-2} \mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0, \xi_n G_n(-1) > 0\} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon, \\ & \left| (a + b)^{-2} \mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0, \xi_n G_n(-1) < 0\} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим сначала среднее число корней полинома G_n в предположении, что $\xi_0 \xi_n \neq 0$. Для положительной полуоси, в соответствии с первой таблицей из леммы 1, при $n \geq N$ получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\mathcal{N}^+(G_n) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} &= [\mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n \neq 0\}]^{-1} \\ &\times \left(\mathbf{E}\{\mathcal{N}^+(G_n) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) \geq 0\} \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) \geq 0\} \right. \\ &\quad + \mathbf{E}\{\mathcal{N}^+(G_n) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0\} \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0\} \\ &\quad \left. + \mathbf{E}\{\mathcal{N}^+(G_n) \mid \xi_0 \xi_n < 0\} \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n < 0\} \right) \\ &\geq (a + b)^{-2} \left(2 \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0\} + 1 \cdot \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n < 0\} \right). \end{aligned}$$

Применение (15) приводит к неравенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\mathcal{N}^+(G_n) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} &\geq (a + b)^{-2} (a^2 + b^2 - |a^2 - b^2| - 2\varepsilon + 2ab) \\ &\geq 1 - \frac{|a - b|}{a + b} - \frac{2\varepsilon}{(a + b)^2}. \end{aligned}$$

Для отрицательной полуоси, в соответствии со второй таблицей из леммы 1, при $n \geq N$ получаем:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\{\mathcal{N}^-(G_n) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} \geq [\mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n \neq 0\}]^{-1} \\
& \times \left(\mathbf{E}\{\mathcal{N}^-(G_n) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(-1) > 0\} \cdot \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) > 0\} \right. \\
& + \mathbf{E}\{\mathcal{N}^-(G_n) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(-1) < 0\} \cdot \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0\} \\
& + \mathbf{E}\{\mathcal{N}^-(G_n) \mid \xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(-1) > 0\} \cdot \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(1) > 0\} \\
& \left. + \mathbf{E}\{\mathcal{N}^-(G_n) \mid \xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(-1) < 0\} \cdot \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(1) < 0\} \right) \\
& \geq (a+b)^{-2} \left(\frac{1}{2} [1 - (-1)^n] \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) > 0\} \right. \\
& \quad + \left[1 + \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] \right] \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0\} \\
& \quad + \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(1) > 0\} \\
& \quad \left. + \left[1 + \frac{1}{2} [1 - (-1)^n] \right] \mathbf{P}\{\xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(1) < 0\} \right) \\
& = (a+b)^{-2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{P}\{\xi_n \neq 0, \xi_0 G_n(-1) > 0\} + \frac{3}{2} \mathbf{P}\{\xi_n \neq 0, \xi_0 G_n(-1) < 0\} \right. \\
& \quad \left. + (-1)^n [\mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0, \xi_n G_n(-1) < 0\} - \mathbf{P}\{\xi_0 \neq 0, \xi_n G_n(-1) > 0\}] \right).
\end{aligned}$$

Применение (16) приводит к неравенству

$$\mathbf{E}\{\mathcal{N}^-(G_n) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} \geq 1 - 4\varepsilon.$$

Откажемся теперь от предположения $\xi_0 \xi_n \neq 0$. Рассмотрим случайные величины

$$\zeta_n \stackrel{\text{def}}{=} \min\{i = 0, \dots, n \mid \xi_{n-i} \neq 0\}, \quad \eta_n \stackrel{\text{def}}{=} \min\{j = 0, \dots, n \mid \xi_j \neq 0\}.$$

Поскольку при $\eta_n = j$ полином G_n имеет нулевой корень кратности j , при $n \geq N$ и $M = \{0 \leq i, j \leq (n - N)/2\}$ получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} \\
& \geq \sum_{(i,j) \in M} \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \zeta_n = i, \eta_n = j\} \mathbf{P}\{\zeta_n = i, \eta_n = j\} \\
& = \sum_{(i,j) \in M} \left(\mathbf{E}\{\mathcal{N}^-(G_{n-i-j}) + \mathcal{N}^+(G_{n-i-j}) \mid \xi_0 \xi_{n-i-j} \neq 0\} + j \right) \\
& \quad \times c^{i+j} (1 - c)^2 \\
& \geq \left(1 - \frac{|a - b|}{a + b} - \frac{2\varepsilon}{(a + b)^2} + 1 - 4\varepsilon \right) \sum_{(i,j) \in M} c^{i+j} (1 - c)^2 + \sum_{(i,j) \in M} j c^{i+j} (1 - c)^2.
\end{aligned}$$

Поскольку при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{(i,j) \in M} c^{i+j} (1-c)^2 \rightarrow 1, \quad (17)$$

$$\sum_{(i,j) \in M} j c^{i+j} (1-c)^2 \rightarrow \frac{c}{1-c} = \frac{1}{a+b} - 1, \quad (18)$$

ввиду произвольности ε приходим к (14).

3. Оценка сверху. Для получения оценки сверху мы будем пользоваться результатами леммы 4, поэтому нашей первой задачей является построение такого распределения коэффициентов, для которого с большой вероятностью полином $G_n(t)$ будет удовлетворять ее условиям.

Лемма 9. Если $a \geq b$, то для произвольного $\delta > 0$ существует распределение коэффициентов $\theta_\delta \in \Theta_{a,b}$ такое, что при всех n случайный полином G_n обладает следующими двумя свойствами:

$$\mathbf{P}_{\theta_\delta} \{R_n \mid G_n(t) \neq 0\} \geq 1 - \delta n^{-1}, \quad (19)$$

где событие R_n означает, что G_n удовлетворяет условиям леммы 4;

$$\mathbf{P}_{\theta_\delta} \{R'_n \mid A_n\} \geq 1 - \delta n^{-1}, \quad (20)$$

где событие R'_n означает, что у G_n максимальный по модулю коэффициент положителен, а событие A_n — что у G_n есть по крайней мере один положительный коэффициент.

Доказательство. Для построения $\theta_\delta \in \Theta_{a,b}$ мы модифицируем идею из [9]. Рассмотрим вероятностное распределение с дискретным носителем:

$$\mathbf{P}\{\xi_0 = q_k\} = ap_k, \quad \mathbf{P}\{\xi_0 = -r_k\} = bp_k, \quad k \in \mathbf{N},$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, $0 < q_1 < \dots < q_k < \dots < \infty$, $0 < r_1 < \dots < r_k < \dots < \infty$, и

$$\mathbf{P}\{\xi_0 = 0\} = c = 1 - a - b.$$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi'_1, \dots, \xi'_n, \dots$ с распределением $\mathbf{P}\{\xi'_1 = q_k\} = p_k$, $k \in \mathbf{N}$, а также последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi''_1, \dots, \xi''_n, \dots$ с распределением $\mathbf{P}\{\xi''_1 = r_k\} = p_k$, $k \in \mathbf{N}$. Пусть $\mu = \mu(n)$ обозначает число положительных коэффициентов у G_n , а $\nu = \nu(n)$ — число отрицательных. Легко видеть, что положительные коэффициенты распределены, как ξ'_i , а отрицательные — как $(-\xi''_i)$. Так как для вычисления среднего числа корней нам важны не сами значения коэффициентов, а их распределение, в дальнейшем мы будем считать, что $\xi'_1, \dots, \xi'_\mu$ суть положительные коэффициенты полинома G_n , а $(-\xi''_1), \dots, (-\xi''_\nu)$ — отрицательные (их порядок нам будет не важен).

Для произвольных независимых одинаково распределенных случайных величин $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m$ с некоторым счетным положительным носителем $\{s_1, \dots, s_k, \dots\}$ ($0 < s_1 < \dots < s_k < \dots < \infty$) введем в рассмотрение событие $Q(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m)$, заключающееся в том, что среди этих случайных величин существует ровно одна максимальная, причем она равна некоторому s_l с $l \geq m$. В [9] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ точкам носителя можно приписать такие вероятности, что при всех m будет выполнено

$$\mathbf{P}\{Q(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m)\} > 1 - \varepsilon m^{-2}.$$

Следовательно, мы можем задать последовательность $\{p_k\}$ таким образом, что при всех m будет выполняться неравенство

$$\mathbf{P}\{Q(\xi'_1, \dots, \xi'_m)\} = \mathbf{P}\{Q(\xi''_1, \dots, \xi''_m)\} > 1 - \varepsilon m^{-2}. \quad (21)$$

Рассмотрим строго возрастающую последовательность $l(k) \in \mathbf{N}$ и некоторое $N \in \mathbf{N}$. Положим $N_k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{(k+1)^2, N\}$ и зададим r_k, q_k следующим образом:

$$r_{k+1} = [(N_k!)^{N_k+1/2} r_k]^{4N_k^2}, \quad r_1 = 1; \quad q_k = [(N_{l(k)}!)^{N_{l(k)}} r_{l(k)}]^{2N_{l(k)}}. \quad (22)$$

Покажем, что при подходящем выборе $\{l(k)\}$, N и ε будут выполняться свойства (19), (20).

Предложение 1. *Предположим, что $a \geq b > 0$. Тогда существует $N = N(a, b, \delta)$ такое, что при $n \geq N$ выполнено*

$$\mathbf{P}\{\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1\} \geq 1 - \frac{\delta}{2n}. \quad (23)$$

Доказательство предложения 1. Имеем:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{P}\{\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1\} &\leq \mathbf{P}\{\mu \leq [\sqrt{n}]\} + \mathbf{P}\{\nu \leq [\sqrt{n}]\} \\ &= \sum_{i=0}^{[\sqrt{n}]} a^i (b+c)^{n+1-i} \frac{(n+1)!}{i! (n+1-i)!} + \sum_{j=0}^{[\sqrt{n}]} b^j (a+c)^{n+1-j} \frac{(n+1)!}{j! (n+1-j)!} \\ &\leq 2 \sum_{i=0}^{[\sqrt{n}]} (1-b)^{n+1} \frac{(n+1)!}{i! (n+1-i)!} \leq 2([\sqrt{n}] + 1)(1-b)^{n+1} (n+1)^{[\sqrt{n}]}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что при $n \rightarrow \infty$ выполнено

$$[2([\sqrt{n}] + 1)(1-b)^{n+1} (n+1)^{[\sqrt{n}]}] n \rightarrow 0.$$

Предложение 1 доказано.

Вернемся к доказательству леммы. Будем считать, что $b > 0$ (случай $b = 0$ разбирается еще проще). Зафиксируем такое N , что при $n \geq N$ выполнено (23). Сначала подберем такое ε , при котором выполняется (19), а после этого так построим $\{l(k)\}$, чтобы выполнялось (20).

Определим событие R_n^* следующим образом:

$$R_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q(\xi'_1, \dots, \xi'_\mu) \cap Q(\xi''_1, \dots, \xi''_\nu), & \text{если } n < N, \\ Q(\xi'_1, \dots, \xi'_\mu) \cap Q(\xi''_1, \dots, \xi''_\nu) \cap \{\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1\}, & \text{если } n \geq N, \end{cases}$$

где в случае $\mu = 0$ под $Q(\xi'_1, \dots, \xi'_\mu)$ мы подразумеваем достоверное событие (аналогично для ν).

В силу (21), при $n < N$ имеем

$$\mathbf{P}\{R_n^* \mid G_n \neq 0\} \geq 1 - 2\varepsilon, \quad (24)$$

а при $n \geq N$, учитывая также и (23), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{R_n^* \mid G_n \neq 0\} &= \mathbf{P}\{Q(\xi'_1, \dots, \xi'_\mu) \cap Q(\xi''_1, \dots, \xi''_\nu) \mid \mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1 \mid G_n \neq 0\} \\ &\geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{([\sqrt{n}] + 1)^2}\right) \mathbf{P}\{\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1\} \\ &\geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{([\sqrt{n}] + 1)^2}\right) \left(1 - \frac{\delta}{2n}\right) \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{n} - \frac{\delta}{2n}. \end{aligned} \quad (25)$$

Если взять $\varepsilon \leq \min\{\delta/(2N), \delta/4\}$, то, учитывая (24) и (25), для выполнения (19) осталось доказать, что $R_n^* \subset R_n$.

Пусть произошло событие R_n^* . Будем считать, что $\mu, \nu > 0$ (случай, когда все коэффициенты либо неотрицательные, либо неположительные, разбирается еще проще). Тогда существуют ровно один максимальный положительный коэффициент и ровно один минимальный отрицательный, равные некоторым $q_{m'}$ и $(-r_{m''})$, причем $N_{m'}, N_{m''} \geq n$.

Применяя (22), нетрудно проверить, что в случае $m'' < l(m') + 1$ условию (5) удовлетворяет коэффициент $q_{m'}$, а в случае $m'' \geq l(m') + 1$ — коэффициент $(-r_{m''})$, следовательно, условие леммы 4 выполнено.

Перейдем к заданию значений $\{l(k)\}$. При $b = 0$ выполнено $\mathbf{P}\{R'_n \mid A_n\} = 1$, поэтому можно считать, что $b > 0$. Если мы выберем настолько большое $l(1)$, что

$$\mathbf{P}\{\max(\xi''_1, \dots, \xi''_N) < q_1\} \geq 1 - \varepsilon,$$

то при $n < N$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{R'_n \mid A_n\} &\geq \mathbf{P}\{\max(\xi''_1, \dots, \xi''_N) < \xi'_1\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\max(\xi''_1, \dots, \xi''_N) < q_1\} \geq 1 - \varepsilon. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть теперь $n \geq N$. Выберем последовательность $\{l(k)\}$ настолько быстро растущей, чтобы было выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\{\max(\xi''_1, \dots, \xi''_{k^2}) < q_k\} \geq 1 - \varepsilon k^{-1}, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (27)$$

Тогда при $i \geq [\sqrt{n}] + 1$, $j \leq n$ будет верна оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\max(\xi'_1, \dots, \xi'_i) > \max(\xi''_1, \dots, \xi''_j)\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\max(\xi'_1, \dots, \xi'_{[\sqrt{n}]+1}) > \max(\xi''_1, \dots, \xi''_n)\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\max(\xi'_1, \dots, \xi'_{[\sqrt{n}]+1}) \geq q_{[\sqrt{n}]+1}, \max(\xi''_1, \dots, \xi''_n) < q_{[\sqrt{n}]+1}\} \\ &\geq \mathbf{P}\{Q(\xi'_1, \dots, \xi'_{[\sqrt{n}]+1}), \max(\xi''_1, \dots, \xi''_{([\sqrt{n}]+1)^2}) < q_{[\sqrt{n}]+1}\} \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{n}, \end{aligned}$$

которая при $n \geq N$ с учетом (23) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{R'_n \mid A_n\} &\geq \mathbf{P}\{R'_n \mid \mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1\} \mathbf{P}\{\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1 \mid A_n\} \\ &\geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{n}\right) \mathbf{P}\{\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1\} \\ &\geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{n}\right) \left(1 - \frac{\delta}{2n}\right) \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{n} - \frac{\delta}{2n}. \end{aligned} \quad (28)$$

В силу малости выбранного выше ε , неравенства (26) и (28) приводят нас к выполнению (20). Лемма 9 доказана.

Требуемая оценка сверху

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}_\theta \{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} \leq 1 + \frac{1 - |a - b|}{a + b}$$

в случае $a \geq b$ вытекает из следующей леммы. Если же $a < b$, то достаточно вместо $G_n(t)$ рассмотреть полином $(-G_n(t))$.

Лемма 10. Для распределения θ_δ , удовлетворяющего (19) и (20), при всех $n \in \mathbf{N}$ справедливо следующее неравенство:

$$\mathbf{E}_{\theta_\delta} \{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} \leq 1 + \frac{1 - (a - b)}{a + b} + \frac{5}{a^2} \delta. \quad (29)$$

Доказательство. Обозначим $\tau = \tau(n)$ номер максимального по модулю коэффициента из $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ и воспользуемся введенными в формулировке предыдущей леммы обозначениями событий R_n, R'_n и A_n . Оценим сначала среднее число корней полинома G_n при условии $\xi_0 \xi_n \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} &= \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \mathbf{P}\{\bar{A}_n \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\quad + \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \mathbf{P}\{A_n \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Оценим отдельно первое и второе математические ожидания в правой части:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &= \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid R_n, \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \mathbf{P}\{R_n \mid \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\quad + \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \bar{R}_n, \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \mathbf{P}\{\bar{R}_n \mid \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\{\bar{A}_n, R_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \subset \{\xi_0, \xi_n, \xi_\tau < 0\}$, поэтому, используя следствие к лемме 4 и оценку $\mathcal{N}(G_n) \leq n$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} &\leq \mathbf{E}\left\{1 - \frac{1}{2}(-1)^\tau(1 + (-1)^n) \mid R_n, \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\right\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{R_n \mid \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} + n \mathbf{P}\{\bar{R}_n \mid \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2} M_n\right) + n \mathbf{P}\{\bar{R}_n \mid \bar{A}_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$M_n \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{E}\{(-1)^\tau(1 + (-1)^n) \mid R_n, \overline{A}_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \mathbf{P}\{R_n \mid \overline{A}_n, \xi_0\xi_n \neq 0\}.$$

Далее, разобьем событие $\{\xi_0\xi_n \neq 0\}$ на четыре:

$$\{\xi_0\xi_n \neq 0\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4,$$

где

$$\Sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_0 > 0, \xi_n > 0\}, \quad \Sigma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_0 < 0, \xi_n < 0\},$$

$$\Sigma_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_0 > 0, \xi_n < 0\}, \quad \Sigma_4 \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_0 < 0, \xi_n > 0\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &= \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1\} \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_1 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &+ \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2\} \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_2 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &+ \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3\} \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_3 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &+ \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4\} \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_4 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &+ \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \overline{R_n \cap R'_n}, A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \cdot \mathbf{P}\{\overline{R_n \cap R'_n} \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\xi_\tau > 0$ при условии R'_n , используем следствие из леммы 4 для оценки первых четырех слагаемых правой части и неравенство $\mathcal{N}(G_n) \leq n$ для оценки пятого слагаемого:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &\leq \mathbf{E}\left\{1 - \frac{1}{2}(-1)^\tau(1 + (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1\right\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_1 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &+ \mathbf{E}\left\{3 + \frac{1}{2}(-1)^\tau(1 + (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2\right\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_2 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &+ \mathbf{E}\left\{2 - \frac{1}{2}(-1)^\tau(1 - (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3\right\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_3 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &+ \mathbf{E}\left\{2 + \frac{1}{2}(-1)^\tau(1 - (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4\right\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_4 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &+ n \mathbf{P}\{\overline{R_n \cap R'_n} \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \\ &= 1 \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_1 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} + 3 \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_2 \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_3 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} + 2 \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_4 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\
& + n \cdot \mathbf{P}\{\overline{R_n \cap R'_n} \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} + \frac{1}{2} M'_n,
\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
M'_n \stackrel{\text{def}}{=} & -\mathbf{E}\{(-1)^\tau (1 + (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1\} \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_1 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\
& + \mathbf{E}\{(-1)^\tau (1 + (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2\} \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_2 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\
& - \mathbf{E}\{(-1)^\tau (1 - (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3\} \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_3 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\
& + \mathbf{E}\{(-1)^\tau (1 - (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4\} \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \Sigma_4 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Предложение 2. *Выполнены неравенства $M_n, M'_n \leq 0$.*

Доказательство предложения 2. Доказательство первого неравенства будет фактически содержаться в доказательстве второго, коим мы и ограничимся. Из соображений симметрии нетрудно видеть, что для любого события U из σ -алгебры, порожденной ξ_0, ξ_n , выполнено

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\tau = 1 \mid R_n, R'_n, A_n, U\} &= \mathbf{P}\{\tau = 2 \mid R_n, R'_n, A_n, U\} = \dots \\
&= \mathbf{P}\{\tau = n - 1 \mid R_n, R'_n, A_n, U\},
\end{aligned}$$

что влечет

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\{(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, U\} \\
&= \begin{cases} \mathbf{P}\{\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, U\} + \mathbf{P}\{\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, U\} \\ \quad - \mathbf{P}\{\tau = 1 \mid R_n, R'_n, A_n, U\}, & n \text{ — четное,} \\ \mathbf{P}\{\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, U\} \\ \quad - \mathbf{P}\{\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, U\}, & n \text{ — нечетное.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Положим $U = \Sigma_1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1\} &= \mathbf{P}\{\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1\} \\
&\geq \mathbf{P}\{\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, \xi_0 > 0\} = \mathbf{P}\{\tau = 1 \mid R_n, R'_n, A_n, \xi_0 > 0\} \\
&\geq \mathbf{P}\{\tau = 1 \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1\},
\end{aligned}$$

поэтому при четном n

$$\mathbf{E}\{(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1\} \geq 0.$$

Положим $U = \Sigma_2$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2\} = \mathbf{P}\{\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2\} = 0,$$

поэтому при четном n

$$\mathbf{E}\{(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2\} \leq 0.$$

Положим $U = \Sigma_3$. Тогда $\mathbf{P}\{\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3\} = 0$, поэтому при нечетном n

$$\mathbf{E}\{(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3\} \geq 0.$$

Положим $U = \Sigma_4$. Тогда $\mathbf{P}\{\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4\} = 0$, поэтому при нечетном n

$$\mathbf{E}\{(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4\} \leq 0.$$

Объединяя последние четыре неравенства, получаем $M'_n \leq 0$. Предложение 2 доказано.

Продолжим доказательство леммы. Соотношения (30), (31) и (32) с учетом доказанного предложения дают

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} &\leq \left(1 + n \cdot \mathbf{P}\{\overline{R_n} \mid \overline{A_n}, \xi_0 \xi_n \neq 0\}\right) \mathbf{P}\{\overline{A_n} \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &+ \left(1 \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \right. \\ &\quad + 3 \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\quad + 2 \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \xi_0 > 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\quad + 2 \cdot \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \xi_0 < 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\quad \left. + n \cdot \mathbf{P}\{\overline{R_n \cap R'_n} \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\}\right) \cdot \mathbf{P}\{A_n \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\overline{A_n} \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} + n \mathbf{P}\{\overline{R_n}\} \\ &+ \left(2 - \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \right. \\ &\quad + \mathbf{P}\{R_n, R'_n, \xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\quad \left. + n \cdot \mathbf{P}\{\overline{R_n \cap R'_n} \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\}\right) \cdot \mathbf{P}\{A_n \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая тривиальное следствие из (19) и (20):

$$\mathbf{P}\{\overline{R_n \cap R'_n} \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \leq \frac{2\delta}{n \mathbf{P}\{A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\}} \leq \frac{2\delta}{na^2},$$

а также соотношения

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{R_n, R'_n, \xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} - \mathbf{P}\{\overline{R_n \cap R'_n} \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} - \mathbf{P}\{\overline{R_n \cap R'_n} \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &= \frac{a^2}{(a+b)^2} - \mathbf{P}\{\overline{R_n \cap R'_n} \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{R_n, R'_n, \xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} = \frac{b^2}{(a+b)^2}, \end{aligned}$$

из (33) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0\} &\leq 2 - \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(a+b)^2} + \delta + \frac{2\delta}{a^2} + \frac{2\delta}{na^2} \\ &\leq 2 - \frac{a-b}{a+b} + \frac{5}{a^2}\delta. \end{aligned} \quad (34)$$

Теперь можно вывести оценку в общем случае. Напомним, что величины ζ_n, η_n были введены в конце доказательства леммы 8. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_n) \mid \zeta_n = i, \eta_n = j\} \mathbf{P}\{\zeta_n = i, \eta_n = j\} \\ &\leq \sum_{0 \leq i, j < \infty} (\mathbf{E}\{\mathcal{N}(G_{n-i-j}) \mid \xi_0 \xi_{n-i-j} \neq 0\} + j) c^{i+j} (1-c)^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (34) и, как и в оценке снизу, соотношениями (17), получаем требуемое неравенство. Лемма 10 доказана.

4. Заключительные замечания. Рассмотрим произвольное подмножество $\Lambda_0 \subset \Lambda$, где

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < a + b \leq 1\}.$$

Объединяя соотношения (1) по всевозможным $(a, b) \in \Lambda_0$, получим

$$\inf_{\theta \in \Theta(\Lambda_0)} \sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}_\theta\{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} = 1 + \inf_{(a,b) \in \Lambda_0} \frac{1 - |a - b|}{a + b}, \quad (35)$$

где $\Theta(\Lambda_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{(a,b) \in \Lambda_0} \Theta_{a,b}$.

Пример 1. Пусть $\Lambda_0 = \Lambda$. В этом случае $\Theta(\Lambda_0) = \Theta$, и (35) принимает вид

$$\inf_{\theta \in \Theta} \sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}_\theta\{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} = 1.$$

Пример 2. Если $\Lambda_0 = \{(a, b) \in \Lambda \mid a + b = 1 - c\}$, где $0 \leq c < 1$, то мы получим

$$\inf_{\theta \in \Theta_c} \sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}_\theta\{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} = \frac{1}{1 - c},$$

где Θ_c есть семейство всех невырожденных распределений с весом c в начале координат.

Пример 3. Пусть $\Lambda_0 = \{(a, b) \in \Lambda \mid a = b\}$. Тогда $\Theta(\Lambda_0) = \Theta'$ есть семейство всех невырожденных распределений с равными мерами положительной и отрицательной полуосей, и мы имеем

$$\inf_{\theta \in \Theta'} \sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}_\theta\{\mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0\} = 2. \quad (36)$$

Покажем, что соотношение (36) можно усилить. Именно, $\inf_{\theta \in \Theta^*} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_{\theta} \{ \mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \not\equiv 0 \} = 2$, где Θ^* обозначает класс всех невырожденных симметричных распределений.

Поскольку $\Theta^* \subset \Theta'$, достаточно получить оценку сверху. Для этого рассмотрим распределение θ_{δ} , построенное в лемме 9, в случае $a = 1$. Если его симметрично продолжить на отрицательную полуось и нормировать двойкой до вероятностного, то при этом у случайного полинома коэффициенты домножатся на ± 1 случайным образом. Так как в условии леммы 4 участвуют лишь абсолютные значения коэффициентов полинома, то полученное таким образом симметричное распределение θ_{δ}^* по-прежнему будет удовлетворять (19). Следовательно, для него выполнено

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathcal{N}^+(G_n) &= \mathbf{E} \{ \mathcal{N}^+(G_n) \mid R_n \} \mathbf{P} \{ R_n \} + \mathbf{E} \{ \mathcal{N}^+(G_n) \mid \overline{R_n} \} \mathbf{P} \{ \overline{R_n} \} \\ &\leq \mathbf{E} \{ \mathcal{N}^+(G_n) \mid R_n \} \mathbf{P} \{ R_n \} + \delta. \end{aligned} \quad (37)$$

Напомним, что τ обозначает максимальный по модулю коэффициент. Имеем:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \{ \mathcal{N}^+(G_n) \mid R_n \} \mathbf{P} \{ R_n \} \\ &= \mathbf{E} \{ \mathcal{N}^+(G_n) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_{\tau} > 0, R_n \} \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_{\tau} > 0, R_n \} \\ &\quad + \mathbf{E} \{ \mathcal{N}^+(G_n) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_{\tau} < 0, R_n \} \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_{\tau} < 0, R_n \} \\ &\quad + \mathbf{E} \{ \mathcal{N}^+(G_n) \mid \xi_0 \xi_n < 0, R_n \} \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n < 0, R_n \}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \{ \mathcal{N}^+(G_n) \mid R_n \} \mathbf{P} \{ R_n \} \leq 0 \cdot \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_{\tau} > 0, R_n \} \\ &\quad + 2 \cdot \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_{\tau} < 0, R_n \} + 1 \cdot \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n < 0, R_n \} \\ &\leq 2 \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_{\tau} < 0 \} + \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n < 0 \} \\ &\leq 2 \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_1 < 0 \} + \mathbf{P} \{ \xi_0 \xi_n < 0 \} = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

что, с учетом (37), дает

$$\mathbf{E} \mathcal{N}^+(G_n) \leq 1 + \delta.$$

Поскольку для симметричных распределений среднее число положительных корней полинома совпадает со средним числом отрицательных, мы приходим к оценке

$$\mathbf{E} \mathcal{N}(G_n) \leq 2 + 2\delta,$$

которая заканчивает доказательство.

Пример 4. Если в предыдущем примере к распределению θ_g^* добавить атом в начале координат (нормировав при этом соответствующим образом), то можно аналогично получить соотношение

$$\inf_{\theta \in \Theta_c^*} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_\theta \{ \mathcal{N}(G_n) \mid G_n(t) \neq 0 \} = 1 + \frac{1}{1-c}, \quad 0 \leq c < 1,$$

где Θ_c^* обозначает класс всех симметричных распределений с весом c в начале координат.

Авторы благодарны И. А. Ибрагимову за введение их в данную тематику и ряд ценных советов, а также Ю. А. Зайцеву за несколько замечаний, позволивших упростить доказательства некоторых лемм.

Часть работы была выполнена во время пребывания первого автора в Институте математической стохастики (Университет Геттингена), а также в Университете Билефельда. Он благодарит М. Денкера и Ф. Гетце за их гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bloch A., Pólya G. On the roots of certain algebraic equations. — Proc. London Math. Soc., 1931, v. 33, p. 102–114.
2. Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. — J. London Math. Soc., 1938, v. 13, p. 288–295.
3. Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. II. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1939, v. 35, p. 133–148.
4. Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. III. — Матем. сб., 1943, т. 12 № 3, с. 277–286.
5. Kac M. On the average number of real roots of a random algebraic equation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1943, v. 49, p. 314–320.
6. Kac M. On the average number of real roots of a random algebraic equation. II. — Proc. London Math. Soc., 1949, v. 50, p. 390–408.
7. Erdős P., Offord A. On the number of real roots of a random algebraic equation. — Proc. London Math. Soc. (3), 1956, v. 6, p. 139–160.
8. Ибрагимов И. А., Маслова Н. Б. Среднее число вещественных корней случайных полиномов. — Докл. АН СССР, 1971, т. 199, с. 13–16.
9. Запорожец Д. Н. Пример случайного полинома с необычным поведением корней. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 3, с. 549–555.
10. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973, 496 с.

Поступила в редакцию
29.XII.2007