Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Радченко, Об определении интеграла от случайной функции, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 677–682

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:33:40

Лемма 4 доказана.

Теорема 2 есть непосредственное следствие лемм 2–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985, 408 с.
2. Brown G., Moran W., Pearce C.E.M. Riesz products and normal numbers. — J. London Math. Soc. (2), 1985, v. 32, p. 12–18.
3. Пушкин Л.Н. Метрический вариант теоремы Касселса–Шмидта. — Матем. заметки, 1989, т. 46, в. 1, с. 60–66.
4. Volkmann B. On the Cassels–Schmidt theorem, I. — Bull. Sc. Math., 2^e série, 1984, t. 108, p. 321–336.
5. Nagasaka K. La dimension de Hausdorff de certains ensembles dans $[0, 1]$. — Proc. Japan Acad., Ser. A, 1978, v. 54, p. 109–112.
6. Pearce C.E.M., Keane M.S. On normal numbers. — J. Austral. Math. Soc., Ser. A, 1982, v. 32, № 1, p. 79–87.
7. Биллингслий П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969, 240 с.
8. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979, 424 с.

Поступила в редакцию
6.X.1993

© 1996 г.

РАДЧЕНКО В. Н.*

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА ОТ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Рассматривается интеграл от измеримой случайной функции $\xi(x)$ по неотрицательной мере m . Показано, что такой интеграл может вводиться как предел по вероятности интегралов от простых случайных функций. Доказан аналог теоремы Лебега для сходимости по вероятности $\int \xi_n(x) dm$, $n \rightarrow \infty$. Получен критерий того, чтобы случайная мера представлялась в виде такого интеграла.

Ключевые слова и фразы: случайная функция, теорема Лебега, случайная функция множеств.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, X — метрическое сепарабельное пространство, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра подмножеств X , m — конечная неотрицательная мера на $\mathcal{B}$. Пусть $\xi(x) = \xi(x, \omega): X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — случайная функция (с.ф.), $\mathcal{F}$ -измеримая при каждом фиксированном x . Для случайных величин η положим $\|\eta\| = E(|\eta|/(1 + |\eta|))$. Известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n\| = 0 \iff p \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0.$$

Интеграл от $\xi(x)$ по m может быть определен для $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ -измеримой $\xi(x, \omega)$ как обычный интеграл Лебега при каждом фиксированном ω . Интеграл, определенный

*Киевский национальный университет, мех.-мат. факультет, кафедра теории вероятностей, ул. Владимирская, 64, 252017 Киев, Украина.

таким образом, мы будем обозначать ω - $\int \xi(x) dm$. Рассмотрим другой подход к определению интеграла $\int \xi(x) dm$.

Простыми мы будем называть с.ф. вида $\xi(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k(\omega) I_{A_k}(x)$, $\xi_k: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $A_k \in \mathcal{B}$. Для простых с.ф. определяем $\int \xi(x) dm = \sum_{k=1}^n \xi_k m(A_k)$.

О п р е д е л е н и е 1. Случайная функция $\xi(x)$ называется интегрируемой, если существует такая последовательность простых случайных функций $\xi^{(n)}(x)$, что

1) $\xi(x) = p \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^{(n)}(x)$ для m -почти всех x ;

2) набор случайных величин $\{\max_{x \in X} |\xi^{(n)}(x)|, n \geq 1\}$ ограничен по вероятности.

При этом положим $\int \xi(x) dm = p \lim_{n \rightarrow \infty} \int \xi^{(n)}(x) dm$.

Для доказательства корректности определения интеграла нам понадобится следующая

Лемма 1. Для любых $l \geq 0$ и $c \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $\|c\xi\| \leq (l+1)|c| \cdot \|\xi\| + P\{|\xi| > l\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\begin{aligned} \|c\xi\| &= E\left(|c| \frac{|\xi|}{1+|\xi|} \frac{1+|\xi|}{1+|c\xi|} I_{\{|\xi| \leq l\}}\right) + E\left(\frac{|c\xi|}{1+|c\xi|} I_{\{|\xi| > l\}}\right) \\ &\leq |c| \cdot \|\xi\| (l+1) + P\{|\xi| > l\} \end{aligned}$$

(здесь учтено, что $(1+|\xi|)/(1+|c\xi|) \leq l+1$ для $|\xi| \leq l$).

Далее, возьмем простые $\xi^{(n)}(x)$ и $\xi^{(j)}(x)$ из определения 1. Будем считать, что они принимают постоянные случайные значения $\xi_k^{(n)}$ и $\xi_k^{(j)}$ на одних и тех же множествах A_k . Используя лемму 1 и то, что $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$, получаем

$$\begin{aligned} \left\| \int \xi^{(n)}(x) dm - \int \xi^{(j)}(x) dm \right\| &= \left\| \sum_k (\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}) m(A_k) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_k (\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}) m(A_k) I_{\{\max_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}| \leq l\}} \right\| \\ &\quad + P\left\{ \max_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}| > l \right\} \leq (l+1) \sum_k \|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}\| m(A_k) \\ &\quad + P\left\{ \max_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}| > l \right\} \leq (l+1) \int \|\xi^{(n)}(x) - \xi^{(j)}(x)\| dm \\ &\quad + P\left\{ \max_k |\xi_k^{(n)}| > \frac{l}{2} \right\} + P\left\{ \max_k |\xi_k^{(j)}| > \frac{l}{2} \right\}. \end{aligned}$$

По условию 2) определения выбором l мы можем сделать сколь угодно малыми второе и третье слагаемые в последнем выражении. Из условия 1) следует, что $\|\xi^{(n)}(x) - \xi^{(j)}(x)\| \rightarrow 0$ m -п.в. при $n, j \rightarrow \infty$, и выбором n, j при заданном l можем сделать малым первое слагаемое. Значит, $p \lim_{n \rightarrow \infty} \int \xi^{(n)}(x) dm$ существует. Стандартным приемом смешивания двух последовательностей можно доказать, что значение предела не зависит от конкретного вида $\xi^{(n)}(x)$.

Попутно отметим, что из наших рассуждений следует неравенство для простых с.ф. $\eta(x)$: для любого $l \geq 0$

$$\left\| \int \eta(x) dm \right\| \leq (l+1) \int \|\eta(x)\| dm + P\left\{ \max_{x \in X} |\eta(x)| > l \right\}. \quad (1)$$

Лемма 2. Если $\xi^{(n)}(x)$, $n \geq 1$, — последовательность $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ -измеримых случайных функций и $\xi(x) = p \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^{(n)}(x)$ (m -п.в.), то существует такая $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ -

измеримая случайная функция $\xi_{(m)}(x)$, что $P\{\xi(x) = \xi_{(m)}(x)\} = 1$ для m -почти всех x .

Доказательство. Для

$$f_n(x) = \sup \left\{ \alpha: P\left\{ \left| \xi^{(n)}(x) - \xi(x) \right| \geq \alpha \right\} \geq \alpha \right\}$$

$$\stackrel{(\text{mod } m)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \alpha: P\left\{ \left| \xi^{(n)}(x) - \xi^{(k)}(x) \right| \geq \alpha \right\} \geq \alpha \right\}$$

имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ (m -п.в.). Данная запись функции f_n делает очевидной B -измеримость f_n — достаточно использовать теорему Фубини для индикатора множества $\{|\xi^{(n)}(x, \omega) - \xi^{(k)}(x, \omega)| \geq \alpha\}$. По теореме Егорова, исключением множества сколь угодно малой меры сходимость $f_n(x) \rightarrow 0$ может быть сделана равномерной:

$$\forall i, j \quad \exists n_{i,j}, A_j (m(A_j) < 2^{-j}): f_{n_{i,j}}(x) < 2^{-i} \text{ для } x \notin A_j.$$

Для любых x, ω положим $\xi_{(m)}(x, \omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \xi^{(n_{i,j})}(x, \omega)$, если этот повторный предел существует, и $\xi_{(m)}(x, \omega) = 0$ в противном случае. Из леммы Бореля–Кантелли следует, что $P\{\xi_{(m)}(x) = \xi(x)\} = 1$ для m -п.в. x . Измеримость $\xi_{(m)}(x)$ очевидна.

Теорема 1. $\xi(x)$ интегрируема в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда существуют такие $B \otimes \mathcal{F}$ -измеримая $\xi_{(m)}(x)$ и сепарабельная случайная функция $\xi_{(s)}(x)$, что $P\{\xi(x) = \xi_{(m)}(x) = \xi_{(s)}(x)\} = 1$ для m -почти всех x и $P\{\sup_{x \in X} |\xi_{(s)}(x)| < \infty\} = 1$. При этом $\int \xi(x) dm = \omega - \int \xi_{(m)}(x) dm$ п.н.

Доказательство. Пусть $\xi(x)$ интегрируема по определению 1. Изменим на m -нулевом множестве наши $\xi(x)$ и $\xi^{(n)}(x)$, положив $\xi(x) = \xi^{(n)}(x) = 0$ для всех x , где $\xi(x) \neq p \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^{(n)}(x)$. Возьмем $\xi_{(s)}(x)$ — сепарабельную модификацию измененной $\xi(x)$ (она существует по теореме 2 § 2 гл. 3 [1]), и пусть $\{x_i, i \geq 1\}$ — множество сепарабельности $\xi_{(s)}$. Если $P\{\sup_{x \in X} |\xi_{(s)}(x)| = \infty\} = \delta > 0$, то $\forall l \exists k P\{\max_{1 \leq i \leq k} |\xi_{(s)}(x_i)| > l\} > \delta/2$. Однако после проведенного изменения мы имеем: для любого x

$$\xi_{(s)}(x) = p \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^{(n)}(x) \implies \max_{1 \leq i \leq k} |\xi_{(s)}(x_i)| = p \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq k} |\xi^{(n)}(x_i)|,$$

и в последнем равенстве правая часть ограничена по вероятности. Противоречие.

Поскольку $\xi^{(n)}(x)$ в определении 1 измеримы, искомая случайная функция $\xi_{(m)}(x)$ существует (по лемме 2). Кроме того,

$$A = \left\{ (x, \omega): \left| \xi_{(m)}(x, \omega) \right| > \sup_{x \in X} \left| \xi_{(s)}(x, \omega) \right| \right\} \in B \otimes \mathcal{F}.$$

При этом, поскольку $A \subset \{(x, \omega): \xi_{(m)}(x, \omega) \neq \xi_{(s)}(x, \omega)\}$ и $P\{\xi_{(m)}(x) = \xi_{(s)}(x)\} = 1$ (m -п.в.), мы получаем для произведения мер соотношение $(m \times P)(A) = 0$. Значит,

$$P\left\{ \omega: m\left\{ x: \left| \xi_{(m)}(x, \omega) \right| > \sup_{x \in X} \left| \xi_{(s)}(x, \omega) \right| \right\} > 0 \right\} = 0. \quad (2)$$

Такая ограниченность $\xi_{(m)}$ позволяет нам определить $\omega - \int \xi_{(m)}(x) dm$ для P -почти всех ω (остальными ω пренебрегаем).

Далее, совпадение интегралов мы докажем отдельно для случая чисто атомической меры m и для m без атомов (при необходимости m можно разложить в сумму таких составляющих).

Если m — чисто атомическая мера с атомами $A_k \in \mathcal{B}$, то $\xi(x) = \sum_k \xi_k(\omega) I_{A_k}(x)$ (с точностью до m -нулевого множества). Простые с.ф.

$$\xi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k(\omega) I_{A_k}(x) \quad (3)$$

таковы, что $\int \xi^{(n)}(x) dm = \omega \int \xi^{(n)}(x) dm$, где интегралы в левой и в правой частях при $n \rightarrow \infty$ стремятся, соответственно, к $\int \xi(x) dm$ и $\omega \int \xi(x) dm$ (здесь $\xi(x) = \xi_{(m)}(x)$). В этом случае совпадение интегралов доказано.

Если m не имеет атомов, то рассмотрим последовательность $\{A_k^n, 1 \leq k \leq k_n\}$ разбиений множества X , где каждое разбиение является дроблением предыдущего и $0 < m(A_k^n) < 2^{-n}$. Возьмем простые с.ф.

$$\xi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \omega \int_{A_k^n} \xi_{(m)}(x) dm \frac{I_{A_k^n}(x)}{m(A_k^n)}. \quad (4)$$

По теореме Лебега–Витали $\forall \omega \xi^{(n)}(x, \omega) \rightarrow \xi_{(m)}(x, \omega)$ (m -п.в.), и, с учетом теоремы Фубини, имеем $P\{\xi(x) = \xi_{(m)}(x) = p \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^{(n)}(x)\} = 1$ (m -п.в.). Из (2) получаем, что $\max_{x \in X} |\xi^{(n)}(x)| \leq \sup_{x \in X} |\xi_{(s)}(x)|$ п.н., поэтому выполняется условие 2) определения 1. Значит, $\int \xi(x) dm = p \lim_{n \rightarrow \infty} \int \xi^{(n)}(x) dm$. Но $\int \xi^{(n)}(x) dm = \omega \int \xi_{(m)}(x) dm$ для всех n .

Для доказательства обратного утверждения теоремы достаточно заметить, что при существовании указанных $\xi_{(m)}(x)$ и $\xi_{(s)}(x)$ равенство (3) или (4) даст последовательность простых функций, обеспечивающую интегрируемость $\xi(x)$.

Таким образом, определение 1 и определение интеграла при фиксированных ω для п.н. ограниченных $\xi(x)$ являются фактически эквивалентными. Однако подход, данный в определении 1, в некоторых случаях может оказаться более удобным. В качестве примера может выступать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\xi_n(x)$, $n \geq 1$, — интегрируемые по мере m случайные функции, для которых существуют такие сепарабельные случайные функции $\xi_{n(s)}(x)$, $n \geq 1$, что $P\{\xi_n(x) = \xi_{n(s)}(x)\} = 1$ (m -п.в.), и набор случайных величин

$$\left\{ \sup_{x \in X} |\xi_{n(s)}(x)|, n \geq 1 \right\}$$

ограничен по вероятности. Если $\xi(x)$ — такая случайная функция, что $\|\xi_n(x) - \xi(x)\| \xrightarrow{m} 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\xi(x)$ интегрируема по m и

$$\int \xi(x) dm = p \lim_{n \rightarrow \infty} \int \xi_n(x) dm.$$

Доказательство. Мы можем выделить такую подпоследовательность n_i , что $\|\xi_{n_i}(x) - \xi(x)\| \rightarrow 0$ (m -п.в.) при $i \rightarrow \infty$. Тогда $\xi(x) = p \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_{n_i}(x)$ (m -п.в.), по теореме 1 каждая $\xi_{n_i}(x)$ на множестве полной меры m имеет измеримую модификацию, и по лемме 2 такую измеримую модификацию имеет $\xi(x)$. Далее, положим $\xi(x) = \xi_{n_i(s)}(x) = 0$ для всех x , где $\xi(x) \neq p \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_{n_i(s)}(x)$, и возьмем $\xi_{(s)}(x)$ — сепарабельную модификацию такой измененной $\xi(x)$. Равенство $P\{\sup_{x \in X} |\xi_{(s)}(x)| < \infty\} = 1$ доказывается так же, как и в предыдущей теореме, с использованием ограниченности $\xi_{n(s)}(x)$. Значит, $\xi(x)$ интегрируема.

Далее, для $\xi_n(x)$ и $\xi(x)$ возьмем простые $\xi_n^{(i)}(x)$ и $\xi^{(i)}(x)$, $i \geq 1$, построенные по равенству (3) (если m чисто атомическая) или (4) (если m не имеет атомов), при необходимости разбивая m на две составляющие. Тогда, очевидно, $P\{\max_{x \in X} |\xi_n^{(i)}(x)| >$

$l\} \leq P\{\sup_{x \in X} |\xi_{n(s)}(x)| > l\}$ для любых l, i , и аналогично для $\xi^{(i)}(x)$ и $\xi_{(s)}(x)$. Подставив $(\xi_n^{(i)}(x) - \xi^{(i)}(x))$ в (1), после перехода к пределу при $i \rightarrow \infty$ получим: $\forall l \geq 0$

$$\begin{aligned} \left\| \int (\xi_n(x) - \xi(x)) dt \right\| &\leq (l+1) \int \|\xi_n(x) - \xi(x)\| dt \\ &+ \sup_i P\left\{ \max_{x \in X} |\xi_n^{(i)}(x) - \xi^{(i)}(x)| > l \right\} \leq (l+1) \int \|\xi_n(x) - \xi(x)\| dt \\ &+ P\left\{ \sup_{x \in X} |\xi_{n(s)}(x)| > \frac{l}{2} \right\} + P\left\{ \sup_{x \in X} |\xi_{(s)}(x)| > \frac{l}{2} \right\}. \end{aligned}$$

В последнем выражении выбором l можем сделать сколь угодно малыми второе и третье слагаемые равномерно по n . При фиксированном l выбором n можно сделать малым первое слагаемое. Отсюда получаем утверждение теоремы.

Пусть задана мера m и мы рассматриваем случайные функции множеств $\mu(A, \omega)$: $B \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ -измеримые при каждом фиксированном A .

О п р е д е л е н и е 2. Регулярной модификацией случайной функции множеств $\mu(A, \omega)$ будем называть $\mu'(A, \omega)$ такую, что $\forall A \in B$ $\mu(A) = \mu'(A)$ п.н. и $\forall \omega \in \Omega$ функция $\mu'(\cdot, \omega)$ является знакопеременной действительной мерой на B .

Понятно, что μ может и не иметь регулярной модификации.

Теорема 3. Пусть σ -алгебра B счетно-порождена. Для случайной функции множеств μ существует случайная функция $\xi(x)$, $B \otimes \mathcal{F}$ -измеримая и при любом фиксированном ω интегрируемая по m , такая, что $\forall A \in B$ $\mu(A) = \omega - \int_A \xi(x) dt$ п.н. тогда и только тогда, когда выполняются два следующих условия:

- 1) μ имеет регулярную модификацию;
- 2) любая регулярная модификация μ с вероятностью 1 является знакопеременной мерой, абсолютно непрерывной относительно m .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если условия 1) и 2) выполняются, то для регулярной модификации μ для каждого фиксированного ω (для которого есть абсолютная непрерывность относительно m) возьмем производную Радона-Никодима относительно m и таким образом получим с.ф. $\xi(x)$. Рассмотрим знакопостоянные случайные меры $\mu^+(A) = \omega - \int_A \xi(x) I_{\{\xi(x) \geq 0\}} dt$ и $\mu^-(A) = \omega - \int_A \xi(x) I_{\{\xi(x) \leq 0\}} dt$. По теореме 3 [2] подынтегральные случайные функции в выражениях для μ^+ и μ^- могут быть взяты $B \otimes \mathcal{F}$ -измеримыми. Сумма двух таких с.ф. может быть взята в качестве требуемой $\xi(x)$.

Теперь проведем доказательство в другую сторону. Через B_0 обозначим счетную алгебру, порождающую B . Пусть μ совпадает с интегралом п.н., тогда $\mu'(A, \omega) = \omega - \int_A \xi(x) dt$ является регулярной модификацией для μ . Возьмем для μ любую другую регулярную модификацию μ_1 и рассмотрим для нее при любом ω разложение Хана

$$\mu_1(A, \omega) = \mu_1^+(A, \omega) + \mu_1^-(A, \omega) = \sup_{B \in B_0} \mu_1(A \cap B, \omega) + \inf_{B \in B_0} \mu_1(A \cap B, \omega).$$

Поскольку $\mu_1(B) = \mu'(B) = \mu(B)$ п.н. $\forall B \in B$, имеем $\mu_1^+(A) = \sup_{B \in B_0} \mu'(A \cap B, \omega) = \omega - \int_A \xi(x) I_{\{\xi(x) \geq 0\}} dt$ п.н., $\mu_1^-(A) = \omega - \int_A \xi(x) I_{\{\xi(x) \leq 0\}} dt$ п.н. Для знакопостоянных случайных функций множеств μ_1^+ и μ_1^- применима теорема 2 [2], которая дает п.н. абсолютную непрерывность относительно m . (В [2] X — полное сепарабельное пространство, σ -алгебра B — борелевская, но в теоремах 2 [2] и 3 [2] важна лишь счетная порожденность B .)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гизман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971, 664 с.
2. Радченко В. Н. Теорема Радона-Никодима для случайных мер. — Укр. матем. журн., 1989, т. 41, № 1, с. 63–67.

Поступила в редакцию
14.III.1992

© 1996 г.

ФАТАЛОВ В. Р.*

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ГАУССОВСКИХ МЕР В ПРОСТРАНСТВАХ l^p И L^p , $p \geq 2$

В настоящее время интенсивно развивается теория суммирования независимых случайных элементов со значениями в банаховом пространстве. Вследствие центральной предельной теоремы в качестве предельных возникают гауссовские распределения. В данной работе найдены точные асимптотики больших уклонений гауссовских мер множеств в общих банаховых пространствах. Полученный в статье основной результат применен для вычисления асимптотик гауссовских мер шаров в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$ (в случае винеровской меры). Обсуждаются приложения к теории статистик типа ω^p , $p \geq 2$.

Ключевые слова и фразы: гауссовские меры в банаховых пространствах, большие уклонения, пространства l^p и L^p , $p \geq 2$, винеровская мера, ω^p -статистика, $p \geq 2$.

1. Основной результат. Пусть E — вещественное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E^* — его топологическое сопряженное. Пусть P_A — гауссовская вероятностная мера, определенная на борелевской σ -алгебре подмножеств в E , со средним нуль и ковариационным оператором A . В данной работе речь пойдет о точной асимптотике вероятности $P_A(uD)$, $u \rightarrow \infty$, для некоторого борелевского множества D .

Как известно, ковариационный оператор A является симметричным и положительным [1, с. 120] ядерным [1, с. 143] оператором, отображающим E^* в E . Предположим, что A инъективен, т.е. $Ax^* = 0$ тогда и только тогда, когда $x^* = 0$. Тогда область значений $R(A) = \{Ax^*: x^* \in E^*\}$ оператора A всюду плотна в E [1, с. 122]. Через $\langle x, x^* \rangle$ будем обозначать значение функционала $x^* \in E^*$ в точке x . Далее, пусть выполнены следующие три условия

(C1) Борелевское множество D замкнуто и допускает представление $D = \{x \in E: G(x) \geq 0\}$, где $G(x)$ — такая непрерывная вещественнозначная функция, что или D или множество $E \setminus D$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств из E . Предположим также, что D имеет непустую внутренность и D не содержит нулевого элемента из E .

(C2) Квадратическая форма $\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума на D в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$ из границы множества D . (Если x не принадлежит области определения $\text{Dom}(A^{-1})$ оператора A^{-1} , то мы считаем $\langle x, A^{-1}x \rangle =$

*Ереванский государственный университет, Межвузовский научный Центр по прикладным проблемам математики, ул. Алека Манукяна, 1, 375049 Ереван, Армения.