Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Большие отклонения гауссовских мер в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 682–689

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:20:42

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гизман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971, 664 с.
2. Радченко В. Н. Теорема Радона-Никодима для случайных мер. — Укр. матем. журн., 1989, т. 41, № 1, с. 63–67.

Поступила в редакцию
14.III.1992

© 1996 г.

ФАТАЛОВ В. Р.*

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ГАУССОВСКИХ МЕР В ПРОСТРАНСТВАХ l^p И L^p , $p \geq 2$

В настоящее время интенсивно развивается теория суммирования независимых случайных элементов со значениями в банаховом пространстве. Вследствие центральной предельной теоремы в качестве предельных возникают гауссовские распределения. В данной работе найдены точные асимптотики больших уклонений гауссовских мер множеств в общих банаховых пространствах. Полученный в статье основной результат применен для вычисления асимптотик гауссовских мер шаров в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$ (в случае винеровской меры). Обсуждаются приложения к теории статистик типа ω^p , $p \geq 2$.

Ключевые слова и фразы: гауссовские меры в банаховых пространствах, большие уклонения, пространства l^p и L^p , $p \geq 2$, винеровская мера, ω^p -статистика, $p \geq 2$.

1. Основной результат. Пусть E — вещественное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E^* — его топологическое сопряженное. Пусть P_A — гауссовская вероятностная мера, определенная на борелевской σ -алгебре подмножеств в E , со средним нуль и ковариационным оператором A . В данной работе речь пойдет о точной асимптотике вероятности $P_A(uD)$, $u \rightarrow \infty$, для некоторого борелевского множества D .

Как известно, ковариационный оператор A является симметричным и положительным [1, с. 120] ядерным [1, с. 143] оператором, отображающим E^* в E . Предположим, что A инъективен, т.е. $Ax^* = 0$ тогда и только тогда, когда $x^* = 0$. Тогда область значений $R(A) = \{Ax^*: x^* \in E^*\}$ оператора A всюду плотна в E [1, с. 122]. Через $\langle x, x^* \rangle$ будем обозначать значение функционала $x^* \in E^*$ в точке x . Далее, пусть выполнены следующие три условия

(C1) Борелевское множество D замкнуто и допускает представление $D = \{x \in E: G(x) \geq 0\}$, где $G(x)$ — такая непрерывная вещественнозначная функция, что или D или множество $E \setminus D$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств из E . Предположим также, что D имеет непустую внутренность и D не содержит нулевого элемента из E .

(C2) Квадратическая форма $\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума на D в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$ из границы множества D . (Если x не принадлежит области определения $\text{Dom}(A^{-1})$ оператора A^{-1} , то мы считаем $\langle x, A^{-1}x \rangle =$

*Ереванский государственный университет, Межвузовский научный Центр по прикладным проблемам математики, ул. Алека Манукяна, 1, 375049 Ереван, Армения.

$+\infty$ — это несущественно для нашего изложения, так как $R(A)$ всюду плотно в E).

(СЗ) Функция G дважды дифференцируема по Фреше в окрестностях точек $x^1, \dots, x^m$ с производными $G'(x)$, $G''(x)$, причем $\langle x^i, G'(x^i) \rangle \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Пусть, далее, операторы $G''(x^i)$ инъективны, $i = 1, 2, \dots, m$. Предположим, что собственные значения μ_k^i , $k = 1, 2, \dots, M_i$, $M_i \leq \infty$, оператора $AG''(x^i)$ таковы, что определен и конечен детерминант

$$0 < \det B_i = \prod_{k=1}^{M_i} (1 - \lambda_i \mu_k^i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

где $B_i = I - \lambda_i AG''(x^i)$, $\lambda_i = \langle x^1, A^{-1}x^1 \rangle / \langle x^i, G'(x^i) \rangle$, I — тождественный оператор из E в E .

З а м е ч а н и я. 1. Напомним, что $G'(x)$ и $G''(x)$ являются ограниченными линейными операторами из E в $\mathbf{R}^1$ и из E в E^* соответственно. Поскольку множество всех ядерных операторов, действующих на всем классе банаховых пространств, является операторным идеалом [2, с. 99], то оператор $AG''(x^i)$ — ядерный, отображающий E в E . Следовательно, $AG''(x^i)$ — компактный оператор и имеет не более чем счетное множество собственных значений μ_k^i . Детерминант (1), очевидно, конечен, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k^i|$. В отличие от случая гильбертова пространства одной ядерности оператора $AG''(x^i)$ для этого, вообще говоря, недостаточно [2, с. 445] — требуется чуть большее: например, принадлежность $AG''(x^i)$ классу $\mathcal{N}_{(1,2,1)}(E, E)$ (см. [2, с. 445]).

2. Несложно показать, что

$$\inf \{ \langle x, A^{-1}x \rangle : x \in D \} = \frac{1}{\sup \{ \langle Ax^*, x^* \rangle : x^* \in D^0 \}},$$

где $D^0 = \{x^* : \sup_{x \in D} \langle x, x^* \rangle \leq 1\}$ есть поляр множества D .

В работе [3] доказан следующий результат

Теорема 1. Пусть все сформулированные выше предположения, включая условия (C1)–(C3), выполнены. Тогда верно следующее асимптотическое соотношение

$$P_A(uD) = \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \langle x^1, A^{-1}x^1 \rangle \right\} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \times \sum_{i=1}^m \left| \det B_i \langle B_i^{-1}x^i, A^{-1}x^i \rangle \right|^{-1/2} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где B_i^{-1} есть обратный оператор к B_i .

З а м е ч а н и е. Если функция G дифференцируема по Фреше три раза, то $o(1)$ в формуле (2) можно заменить на $O(u^{-2})$ (см. также теорему 3 ниже).

Теорема 1 может найти применение в теории суммирования независимых случайных векторов в банаховом пространстве, (см. [4], [5]), где гауссовское распределение появляется в качестве предельного.

2. Гауссовские большие отклонения норм в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$.

Условия теоремы 1 выполнены в пространствах l^p , $L^p[0, 1] \equiv L^p$, $p \geq 2$, для функций $G(x)$, равных нормам в этих пространствах. Последние дважды дифференцируемы по Фреше только при $p \geq 2$ [6]. Рассматриваемые ниже случайные элементы заданы на некотором вероятностном пространстве $[\Omega, \mathcal{F}, P]$.

Теорема 2. Пусть $(X_1, X_2, \dots)$ — гауссовский элемент в l^p , $p > 2$, имеющий нулевое среднее и невырожденную ковариационную матрицу $A = (a_{ij})$, $a_{ij} =$

$EX_i X_j$, $i, j = 1, 2, \dots$, см. [1, с. 261]. Пусть $z^1, z^2, \dots, z^m$ — точки из множества $Z = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p: \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = 1\}$, в которых достигается минимум $\min\{\langle x, A^{-1}x \rangle: x \in Z\} = 1/\sigma^2 > 0$, $z^i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots)$, $i = 1, \dots, m$.

Тогда имеет место соотношение

$$P\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |X_j|^p\right)^{1/p} > u\right\} = \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{\sigma}{u\sqrt{2\pi}} \sqrt{p-2} \times \sum_{i=1}^m |\det B_i|^{-1/2} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty, \quad (3)$$

при условии, что $0 < |\det B_i| < \infty$, где

$$B_i = I - (p-1)\sigma^{-2} A \operatorname{diag}(|z_{i1}|^{p-2}, |z_{i2}|^{p-2}, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь ниже $\operatorname{diag}(c_1, c_2, \dots)$ обозначает диагональную матрицу с элементами $c_1, c_2, \dots$ по главной диагонали, матричное представление линейных операторов соответствует выбранному базису.

В условиях теоремы 2 в силу замечания 2 имеют место соотношения

$$\sigma^{-2} = \inf\{\langle x, A^{-1}x \rangle: x \in Z\} = \left(\sup\{\langle Ax^*, x^* \rangle: \|x^*\|_q \leq 1\}\right)^{-1} = \|A\|^{-1},$$

$$p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad \|x\|_{l^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

З а м е ч а н и е 3. Результат, аналогичный теореме 2, для $p = 2$ был получен ранее В. М. Золотаревым в [7] методом преобразований Лапласа.

Следствие 1. Пусть $(X_1, X_2, \dots)$ — гауссовский элемент в l^p , $p > 2$, со средним нуль и независимыми координатами, $EX_i X_j = 0$, $i \neq j$, $EX_i^2 = \sigma_i^2 > 0$, $i, j = 1, 2, \dots$, $A = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots)$, причем $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 > \sigma_{k+1}^2 \geq \dots$. Тогда минимум выражения $\langle x, A^{-1}x \rangle$ на множестве $\{x \in l^p: \|x\|_{l^p} = 1\}$ равен σ_1^{-2} и достигается в $2k$ точках $z_+^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица на i -м месте), $z_-^i = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots)$ (-1 на i -м месте), $i = 1, 2, \dots, 2k$.

Справедливо асимптотическое соотношение

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^p\right)^{1/p} > u\right\} = \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\right\} \frac{2k\sigma_1}{\sqrt{2\pi}u} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Главный член асимптотики в формуле (4) ранее был найден разными методами (отличными от нашего) в [8] для $p > 3$ и в [9] для $p > 2$, без оценки остаточного члена. Асимптотики норм гауссовских элементов в конечномерных пространствах l_n^p , $p > 0$, вычислены в [10] (случай независимых координат) и [11] (зависимые координаты).

Теорема 3. Пусть W и W_0 — распределения винеровского процесса $w(t)$ и броуновского моста $\tilde{w}(t) = w(t) - tw(1)$ в L^p , $p \geq 2$ (W и W_0 , как известно, сосредоточены на подпространстве $C[0, 1]$ непрерывных на $[0, 1]$ функций). Тогда:

$$(i) \quad P\left\{\left(\int_0^1 |w(t)|^p dt\right)^{1/p} > u\right\} = W\{x \in L^p: \|x\|_{L^p} > u\} \\ = \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{2\sigma}{u} \pi^{-3/4} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 1/p)}{\Gamma(1 + 1/p)}\right)^{1/2} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty,$$

где $\sigma = [2/(\pi p)]^{1/2} (2 + p/2)^{(p-2)/(2p)} \Gamma(\frac{1}{2} + 1/p) / \Gamma(1 + 1/p)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $\|x\|_{L^p} = (\int_0^1 |x(t)|^p dt)^{1/p}$;

$$(ii) \quad P \left\{ \left(\int_0^1 |\dot{w}(t)|^p dt \right)^{1/p} > u \right\} = W_0 \{ x \in L^p : \|x\|_{L^p} > u \} \\ = \exp \left\{ - \frac{2u^2}{\sigma^2} \right\} \frac{\sigma}{u} \pi^{-3/4} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 1/p)}{\Gamma(1 + 1/p)} \right)^{1/2} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty,$$

где σ то же, что и в пункте (i).

Для пространства $C[0, 1]^n$ и нормы супремума в нем (которая всего лишь субдифференцируема) аналогичные асимптотики для распределений гауссовских неоднородных полей (в том числе, возникающих в статистике) вычислены иным методом в [12].

3. Доказательства. Подробное доказательство теоремы 1, основанное на работах [13]–[15] (см. также [16]), приведено в [3]. Здесь мы докажем теоремы 2 и 3. Из результатов статьи [17] следует, что в утверждениях теорем 2 и 3 неравенства под знаком вероятности могут быть строгими.

Пусть $H = H(A) \subset E$ — гильбертово пространство, ассоциированное с ковариационным оператором A и нормой $\|\cdot\|_A$ (см. [1, с. 126]). Тогда, как хорошо известно, [14, с. 34], функционал действия $I(x)$ гауссовской меры P_A определяется так:

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|x\|_A^2, & \text{если } x \in H \\ +\infty, & \text{если } x \in E \setminus H. \end{cases}$$

Решая экстремальную задачу $I(x) \rightarrow \inf$ при ограничении $G(x) \geq 0$ методом множителей Лагранжа, получаем для экстремальных точек x^i из условия (C2):

$$x^i \in \text{Dom}(A^{-1}), \\ G(x^i) = 0, \quad A^{-1}x^i = \lambda_i G^i(x^i) \quad (5)$$

(рассуждения, приведенные в [11, лемма 1] для случая гильбертова пространства E , применимы и в нашем случае).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теорем.

Вывод формулы (3) из (2) совсем прост. Пусть $\{e_k\}$ — стандартный базис в l^p . Функция $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p - 1$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, дважды дифференцируема по Фреше при $p > 2$ [6, с. 887], с производными:

$$G'(x) = \left(p |x_k|^{p-1} \text{sign } x_k \right)_{k=1}^{\infty} \in l^q, \quad G''(x) = p(p-1) \text{diag}(|x_1|^{p-2}, |x_2|^{p-2}, \dots),$$

$p^{-1} + q^{-1} = 1$. Используя (5), находим для точки минимума $z^i = \sum_{k=1}^{\infty} z_{ik} e_k$: $\lambda_i = p/\sigma^2$, $i = 1, \dots, m$. Поскольку $G''(x)x = (p-1)G'(x)$, то, вновь используя (5), имеем $B_i z^i = (2-p)z^i$, откуда $\langle B_i^{-1} z^i, A^{-1} z^i \rangle = \sigma^{-2}/(2-p)$, $i = 1, \dots, m$.

Доказательство теоремы 3 проведем для случая (i) винеровской меры, пункт (ii) рассматривается аналогично.

а) *Решение экстремальной задачи для винеровской меры в $L^p[0, 1]$.* Пусть сначала $p > 2$. Обозначим $G(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt - 1$ для $x \in L^p$. Эта функция дважды дифференцируема по Фреше с производными (см. [6, с. 887]):

$$G'(x) = p |x(t)|^{p-1} \text{sign } x(t) \in l^q, \quad G''(x)[y] = p(p-1) |x(t)|^{p-2} y(t) \in l^q,$$

$x, y \in L^p$, $1/p + 1/q = 1$. Ковариационный оператор A винеровской меры W отображает L^q в L^p по правилу (см. [13, с. 47], [18]):

$$Ax(t) = \int_0^1 \min(t, s) x(s) ds, \quad x(s) \in L^q.$$

Уравнение (5) для экстремальной функции $x(t)$ принимает вид

$$x(t) = p\lambda \int_0^1 \min(t, s) |x(s)|^{p-1} \operatorname{sign} x(s) ds, \quad \|x\|_{L^p} = 1. \quad (6)$$

Здесь $x \in \operatorname{Dom}(A^{-1})$, где $A^{-1} = -d^2/dt^2$, и, следовательно, экстремальная функция $x(t)$ дважды дифференцируема. Интегральное уравнение (Хаммерштейна) (6) легко приводится к дифференциальному

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda p |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \\ x(0) = x'(1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Записывая первое равенство в (7) в виде $d(x'(t))^2 = -\lambda d|x(t)|^p$, получаем: $(x'(t))^2 = 2\lambda(|x(1)|^p - |x(t)|^p)$, $t \in [0, 1]$. Отсюда видно, что $|x(t)| \leq |x(1)|$ для всех $t \in [0, 1]$. Поскольку $x'(t)$ — непрерывная функция, то возможны два решения уравнения (7): $x_1(t)$ с $x'_1(t) = \sqrt{2\lambda} \sqrt{|x_1(1)|^p - |x_1(t)|^p} \geq 0$, $x_1(t)$ монотонно возрастает, $x_1(t) \geq 0$ и $x_2(t) = -x_1(t)$, $t \in [0, 1]$. Итак, имеем дифференциальное уравнение (нижний индекс 1 опущен):

$$\begin{cases} x'_1(t) = \sqrt{2\lambda} \sqrt{|x(1)|^p - |x(t)|^p}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда получаем: $\int_0^x (C - x^p)^{-1/2} dx = \sqrt{2\lambda} t$, $C = (x(1))^p$. Используя равенство под номером 4 из [19, с. 30], приходим к соотношению

$$\frac{x(t)}{\sqrt{C}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{(x(t))^p}{C}\right) = \sqrt{2\lambda} t, \quad (9)$$

где $F(a, b; c; z)$ обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Взяв здесь $t = 1$, найдем

$$(x(1))^{p/2-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda p}} \frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/p) + \frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Переходя теперь к функциям Лежандра $P_\nu^r(t)$ по формуле 15.4.13 из справочника [20, с. 376] и выражая λ через C , получаем из (9) основное функциональное уравнение для экстремальной функции $x(t)$:

$$2^{1/p} \left(\frac{x(t)}{x(1)}\right)^{1/2} P_{-1/p}^{-1/p} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x(t)}{x(1)}\right)^p}\right) = \sqrt{\pi} t.$$

Вычислим теперь константы C и σ^2 . Из (8) имеем $C = 1/(2\lambda) \int_0^1 (x'(t))^2 dt + 1$, но, в силу (7), $\int_0^1 (x'(t))^2 dt = -\int_0^1 x(t) x''(t) dt = \lambda p$. Следовательно, $C = 1 + p/2$. Далее, с учетом равенства (5) и вида производной $G'(x)$ имеем $\sigma^{-2} = \langle x, A^{-1}x \rangle = \lambda \langle x, G'(x) \rangle = \lambda p$. Теперь формула (10) позволяет найти

$$\sigma^{-2} = \frac{\pi}{2p} \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{(2-p)/p} \left(\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1/p)}\right)^2.$$

в) *Вычисление определителя* $\det(I - \lambda AG''(x))$. Найдем собственные значения μ_k оператора $AG''(x)$, соответствующие собственным функциям z_k . Для этого рассмотрим уравнение (относительно μ и z): $AG''(x)z = \mu z$, $z \in L^p$. Это уравнение равносильно дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} p(p-1)(x(t))^{p-2}z(t) = -\mu z''(t), \\ z(0) = z'(1) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Легко видеть, что уравнение (11) имеет частное решение $z_1(t) = x(t)$ с собственным числом $\mu_1 = (p-1)/\lambda$. Замена $s = (x(t)/x(1))^p$ приводит уравнение (11) к гипергеометрическому уравнению для функции $y(s) = z(t)$:

$$s(s-1)y''(s) + \left(1 - \frac{1}{p} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{p}\right)s\right)y'(s) + \frac{p-1}{2\lambda\mu p}y(s) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Анализ этого дифференциального уравнения показывает, что здесь возможен только случай В из [20, с. 377], когда собственные числа равны $\mu_k = (p-1)/(2\lambda p(k - \frac{1}{2}))(k - 1 + 1/p)$, $k = 1, 2, \dots$, а соответствующие собственные функции выражаются через полиномы Якоби (см. также таблицу на с. 83 в [21], случай 4):

$$z_k(t) = x(t) F\left(1-k, k + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{p}; \left(\frac{x(t)}{x(1)}\right)^p\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Наконец, используя № 11 из [19, с. 754], находим

$$\det(I - \lambda AG''(x)) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda\mu_k) = \sqrt{\pi} \left(\frac{p}{2} - 1\right) \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1/p)}.$$

Вычислим теперь последнюю константу в формуле (2). Поскольку $AG''(x)x = \mu_1 x$, то для оператора $B = I - \lambda AG''(x)$ имеем $B^{-1}x = (2-p)^{-1}x$. Следовательно, $\langle B^{-1}x, A^{-1}x \rangle = \sigma^2/(2-p)$. Вычисления для второй экстремальной функции $-x(t)$ аналогичны. Применяя формулу (2) из теоремы 1, получаем утверждение (i) при $p > 2$. Случай $p = 2$ исследован в примере 1 в [11].

Доказательство пункта (ii) теоремы 3 осуществляется аналогично. Здесь оператор A имеет ядро $\min(t, s) - ts$ и уравнение (7) остается прежним, но с иными граничными условиями: $x(0) = x(1) = 0$. Имеем две экстремальные функции $x(t)$ и $-x(t)$, функция $x(t) \geq 0$ имеет максимум в точке $t = \frac{1}{2}$ и симметрична относительно $t = \frac{1}{2}$, $x'(t) > 0$, $t \in [0, \frac{1}{2})$. Теперь множитель Лагранжа λ в 4 раза больше, чем в случае (i). Остальные рассуждения повторяют уже проведенные для меры W . Теорема 3 доказана.

4. Приложения к статистике и заключительные замечания. Пусть проверяется гипотеза H_0 о том, что выборка объема n извлечена из распределения с непрерывной функцией распределения $F(t)$, через $F_n(t)$ обозначена эмпирическая функция распределения, построенная по выборке. Известно, [22, с. 196], что эмпирический процесс $\sqrt{n}(F_n(t) - F(t))$ при гипотезе H_0 после замены $s = F(t)$ слабо сходится в $D[0, 1]$ к броуновскому мосту $\tilde{w}(s)$. По аналогии со статистикой ω_n^2 введем статистику $\omega_n^p = \int_0^1 (\sqrt{n})^p |F_n(t) - F(t)|^p dF(t)$. Тогда в силу слабой сходимости имеем $\omega_n^p \Rightarrow \omega^p = \int_0^1 |\tilde{w}(s)|^p ds$, и теорема 3, п. (ii), позволяет найти приближенно вероятности $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega_n^p > u_\alpha\} = P\{\omega^p > u_\alpha\} = \alpha$ для больших значений u_α (малых α) при $p \geq 2$. Отметим, однако, медленное (как правило, степенное) убывание поправочных членов. Статистики типа ω_n^p с весовыми функциями $q(t)$ рассмотрены в [4], [23]. Ясно, что результат типа теоремы 3 может быть получен на основе теоремы 1 и для функций $G(x) = \int_0^1 |x(t)|^p q(t) dt - 1$, $p \geq 2$.

Наконец, отметим недавние работы [24]–[27], где методами, отличными от нашего, исследованы асимптотики больших отклонений гауссовских дважды дифференцируемых полунорм в бесконечномерных [24], [25], [27] и конечномерных [26] пространствах.

Автор выражает благодарность проф. В.-Д. Рихтеру (Ростовский университет) за полезные обсуждения при подготовке данной работы, а также статьи [11]. Автор признателен также рецензенту, чьи замечания способствовали улучшению данной публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
2. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982, 536 с.
3. Fatalov V. R., Richter W.-D. Exact asymptotics for large deviations of Gaussian measures on Banach spaces. — Math. Nachr. (в печати).
4. Bentkus V. J., Račkauskas A. J. On probabilities of large deviations in Banach spaces. — Probab. Theory Relat. Fields, 1990, v. 86, № 2, p. 131–154.
5. Bolthausen E. Laplace approximations for sums of independent random vectors, I, II. — Probab. Theory Relat. Fields, 1986, v. 72, № 2, p. 305–318; 1987, v. 76, № 2, p. 167–206.
6. Bonic R., Frampton J. Smooth functions of Banach manifolds. — J. Math. Mech., 1966, v. 15, № 5, p. 877–898.
7. Золотарев В. М. Об одной вероятностной задаче. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. VI, в. 2, с. 219–222.
8. Richter W.-D. Gaußsche Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen im Banachraum l_p . — Wissensch. Z. Techn. Univ. Dresden, 1985, v. 34, № 4, p. 60.
9. Dobric V., Marcus M. B., Weber M. The distribution of large values of the supremum of Gaussian processes. — Astérisque, 1988, v. 157–158, p. 95–127.
10. Fatalov V. R., Richter W.-D. Gaussian probabilities of large deviation for fixed or increasing dimension. — J. Contemporary Math. Analysis (Armenian Acad. Sci.), 1992, v. 27, № 1, p. 1–16.
11. Fatalov V. R. Exact asymptotics of large deviations for Gaussian measures on Hilbert space. — J. Contemporary Math. Analysis (Armenian Acad. Sci.), 1992, v. 27, № 5, p. 36–50.
12. Fatalov V. R. Asymptotics of large deviation probabilities for Gaussian fields, I, II. — J. Contemporary Math. Analysis (Armenian Acad. Sci.), 1992, v. 27, № 6, p. 48–70.
13. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979, 176 с.
14. Chevet S. Gaussian measures and large deviations. — Lect. Notes Math., 1983, v. 990, p. 30–46.
15. Ellis R. S., Rosen J. S. Asymptotic analysis of Gaussian integrals, I: Isolated minimum points. — Trans. Amer. Math. Soc., 1982, v. 273, № 2, p. 447–481.
16. Вентцель А. Д. Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1986, 176 с.
17. Цирельсон Б. С. Плотность распределения максимума гауссовского процесса. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. XX, в. 4, с. 865–873.
18. Rajput B. S. Gaussian measures on L_p spaces, $1 \leq p < \infty$. — J. Multivariate Anal., 1972, v. 2, № 4, p. 382–403.
19. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981, 800 с.
20. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 832 с.

21. Бейтмен К., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965, 296 с.
22. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
23. Норвайша Р. Центральная предельная теорема для эмпирических и квантильных процессов в пространствах L_p , $1 \leq p < \infty$. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 2, с. 329–341.
24. Лифшиц М. А. Гауссовские большие отклонения гладкой полунормы. — Записки научн. семинаров ПОМИ, 1992, т. 194, с. 106–113.
25. Linde W. Gaussian measures of large balls in l^p . — Ann. Probab., 1991, v. 19, № 3, p. 1264–1279.
26. Linde W. Gaussian measures of large balls in $\mathbf{R}^n$. — In: Stable Processes and Related Topics. Basel–Boston: Birkhäuser, 1991, p. 1–25.
27. Richter W.-D. Multidimensional domains of large deviations. — In: Limit Theorems in Probability and Statistics (Colloquia Mathematica Societas János Bolyai, v. 57). Amsterdam, 1990, p. 443–458.

Поступила в редакцию

25.VI.1993

Исправленный вариант

20.VII.1995

© 1996 г.

ЦИГРОШВИЛИ З. П.*

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОБНОВЛЯЮЩИХ РАЗВЕРТОК ЭМПИРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В статье исследуется асимптотическое поведение модуля непрерывности обновляющих разверток эмпирических полей, которые, в отличие от эмпирических полей, имеют некоррелированные приращения. Доказывается, что модули непрерывности обновляющих разверток асимптотически ведут себя так же, как модули непрерывности эмпирических полей.

Ключевые слова и фразы: эмпирические поля, обновляющие развертки, модуль непрерывности.

1. Введение. Как известно из общей теории сходимости случайных процессов в разных функциональных пространствах (например, $C[0, 1]^d$, $D[0, 1]^d$, $d \geq 1$), сходимость последовательности случайных процессов ξ_n к случайному процессу ξ доказывается в два этапа: а) сходимость конечномерных распределений процесса ξ_n ; б) относительная компактность последовательности распределений ξ_n (см. [1]).

Тогда как часть а) является, как правило, следствием центральной предельной теоремы, доказывать часть б) гораздо сложнее. Здесь надо показать, что для произвольных $\epsilon > 0$ и $\eta > 0$ существует такое $a > 0$, что для достаточно больших n выполняется неравенство $P\{\omega_n^\xi(a) \geq \epsilon\} \leq \eta$, где $\omega_n^\xi(a) = \sup_{|t-s| \leq a} |\xi_n(t) - \xi_n(s)|$ есть модуль непрерывности процесса ξ_n . Исследованием модуля непрерывности разных эмпирических процессов и полей занимались многие авторы (см., например, [2], [5]–[7]).

*Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии, ул. Алексидзе, 1, 380093 Тбилиси, Грузия.