Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. П. Цигрошвили, О модулях непрерывности обновляющих
разверток эмпирических полей, *Теория вероятн. и ее при-
мен.*, 1996, том 41, выпуск 3, 689–693

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразу-
мевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:57:05

21. Бейтмен К., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965, 296 с.
22. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
23. Норвайша Р. Центральная предельная теорема для эмпирических и квантильных процессов в пространствах L_p , $1 \leq p < \infty$. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 2, с. 329–341.
24. Лифшиц М. А. Гауссовские большие отклонения гладкой полунормы. — Записки научн. семинаров ПОМИ, 1992, т. 194, с. 106–113.
25. Linde W. Gaussian measures of large balls in l^p . — Ann. Probab., 1991, v. 19, № 3, p. 1264–1279.
26. Linde W. Gaussian measures of large balls in $\mathbf{R}^n$. — In: Stable Processes and Related Topics. Basel–Boston: Birkhäuser, 1991, p. 1–25.
27. Richter W.-D. Multidimensional domains of large deviations. — In: Limit Theorems in Probability and Statistics (Colloquia Mathematica Societas János Bolyai, v. 57). Amsterdam, 1990, p. 443–458.

Поступила в редакцию

25.VI.1993

Исправленный вариант

20.VII.1995

© 1996 г.

ЦИГРОШВИЛИ З. П.*

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОБНОВЛЯЮЩИХ РАЗВЕРТОК ЭМПИРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В статье исследуется асимптотическое поведение модуля непрерывности обновляющих разверток эмпирических полей, которые, в отличие от эмпирических полей, имеют некоррелированные приращения. Доказывается, что модули непрерывности обновляющих разверток асимптотически ведут себя так же, как модули непрерывности эмпирических полей.

Ключевые слова и фразы: эмпирические поля, обновляющие развертки, модуль непрерывности.

1. Введение. Как известно из общей теории сходимости случайных процессов в разных функциональных пространствах (например, $C[0, 1]^d$, $D[0, 1]^d$, $d \geq 1$), сходимость последовательности случайных процессов ξ_n к случайному процессу ξ доказывается в два этапа: а) сходимость конечномерных распределений процесса ξ_n ; б) относительная компактность последовательности распределений ξ_n (см. [1]).

Тогда как часть а) является, как правило, следствием центральной предельной теоремы, доказывать часть б) гораздо сложнее. Здесь надо показать, что для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ существует такое $a > 0$, что для достаточно больших n выполняется неравенство $P\{\omega_n^\xi(a) \geq \varepsilon\} \leq \eta$, где $\omega_n^\xi(a) = \sup_{|t-s| \leq a} |\xi_n(t) - \xi_n(s)|$ есть модуль непрерывности процесса ξ_n . Исследованием модуля непрерывности разных эмпирических процессов и полей занимались многие авторы (см., например, [2], [5]–[7]).

*Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии, ул. Алексидзе, 1, 380093 Тбилиси, Грузия.

Нашей целью является исследование таких локальных свойств для так называемых эмпирических обновляющих и последовательных обновляющих разверток, которые представляют линейные преобразования от эмпирических полей, но в отличие от них имеют некоррелированные приращения.

2. Основные поля. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы, принимающие значения на $[0, 1]^d$, $d \geq 1$, и пусть их функция распределения F непрерывна и имеет плотность f .

Рассмотрим эмпирические поля, порожденные соответственно, случайными векторами $X_1, \dots, X_n$ и $X_1, \dots, X_{n_t}$ ($0 < t \leq 1$):

$$U_n(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq n} (I(X_i \leq s) - F(s)), \quad (1)$$

$$\alpha_n(t, s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq n_t} (I(X_i \leq s) - F(s)), \quad (2)$$

где $s = (s_1, s_2, \dots, s_d) \in [0, 1]^d$, $I(A)$ обозначает индикатор множества A и неравенства понимаются покомпонентно.

Введем поля, модули непрерывности которых мы будем изучать:

$$W_n(x, y) = U_n(x, y) + \int_0^x \frac{U_n(\tau, 1)}{1 - F(\tau, 1)} F(d\tau, y) \quad (3)$$

и

$$b_n(t, x, y) = \alpha_n(t, x, y) + \int_0^x \frac{\alpha_n(t, \tau, 1)}{1 - F(\tau, 1)} F(d\tau, y), \quad (4)$$

где $0 \leq x \leq 1$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{d-1}) \in [0, 1]^{d-1}$ и 1 обозначает единичный вектор в $[0, 1]^{d-1}$, т.е. $1 = (1, 1, \dots, 1) \in [0, 1]^{d-1}$.

Поля (1) и (2) хорошо известны в статистике. Поля (3) и (4) введены в работах [3] и [4]. Поле W_n называется эмпирической обновляющей разверткой, а поле b_n — эмпирической последовательной обновляющей разверткой. Свойства этих полей можно найти в упомянутой выше работе [4]. Здесь же мы повторим только сказанное нами во введении, что, в отличие от U_n и α_n , поля W_n и b_n имеют некоррелированные приращения. Заметим также, что процесс $U_n(\tau) \equiv U_n(\tau, 1) = (1/\sqrt{n}) \sum_{i \leq n} (I(X_i \leq \tau) - F(\tau))$ является эмпирическим процессом, построенным одномерными случайными величинами с функцией распределения $F(\tau) \equiv F(\tau, 1)$.

Как мы видим, (3) и (4) представляют линейные преобразования, соответственно, полей (1) и (2), и эти преобразования достаточно гладкие при $x < 1$, но $x = 1$ является их особой точкой. Нас интересует, влияет ли это на асимптотическое поведение модуля непрерывности полей W_n и b_n или же их модули непрерывности ведут себя так же, как и модули непрерывности полей U_n и α_n соответственно. Как известно, например, из работы [7], для модуля непрерывности $\omega_n^U(a) = \sup\{|U_n(I_{s,r})| : I_{s,r} \in B\}$ поля U_n , где

$$B = \left\{ I_{s,r} : I_{s,r} = [s_1, r_1] \times [s_2, r_2] \times \dots \times [s_d, r_d], \max_{1 \leq i \leq d} (r_i - s_i) \leq a \right\},$$

$$U_n(I_{s,r}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq n} (I(X_i \in I_{s,r}) - |I_{s,r}|),$$

справедлива следующая

Теорема 1. Для любой последовательности положительных чисел a_n таких, что $a_n \rightarrow 0$, $na_n^d \rightarrow \infty$, $\log a_n = o(na_n^d)$, $\log \log n = o(\log a_n^{-1})$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^U(a_n)}{(2a_n^d \log a_n^{-d})^{1/2}} = 1 \quad \text{н.в.}$$

3. Основной результат. Введем обозначение

$$K_n(x, y) = \int_0^x \frac{U_n(\tau)}{1 - F(\tau)} F(d\tau, y). \quad (5)$$

Рассмотрим разностный оператор

$$\begin{aligned} \Delta_{s_i, r_i} g(x_1, x_2, \dots, x_d) &= g(x_1, \dots, x_{i-1}, r_i, x_{i+1}, \dots, x_d) \\ &\quad - g(x_1, \dots, x_{i-1}, s_i, x_{i+1}, \dots, x_d) \end{aligned}$$

и определим $K_n(I_{s,r})$ как $K_n(I_{s,r}) = \Delta_{s_1, r_1} \Delta_{s_2, r_2} \dots \Delta_{s_d, r_d} K_n(x, y)$, а модуль непрерывности $\omega_n^K(a)$ поля K_n — так же, как для поля U_n , именно: $\omega_n^K(a) = \sup\{|K_n(I_{s,r})| : I_{s,r} \in B\}$. Нетрудно видеть, что

$$K_n(I_{s,r}) = \int_{s_1}^{r_1} \frac{U_n(\tau)}{1 - F(\tau)} \Delta_{s_2, r_2} \dots \Delta_{s_d, r_d} F(d\tau, y).$$

Как показано в работе [7], достаточно рассмотреть случай, когда функция распределения F имеет равномерные маргинальные распределения; мы же, для удобства, ограничимся рассмотрением только равномерного распределения, осознавая тот факт, что при некоторых ограничениях на плотность f (например, при условии ее ограниченности) наш основной результат останется в силе. Основной результат работы сформулирован в теореме 2 и смысл его заключается в том, что модули непрерывности полей W_n и b_n асимптотически ведут себя так же, как и модули непрерывности полей U_n и α_n соответственно.

Теорема 2. Для любой последовательности положительных чисел a_n таких, что $a_n \rightarrow 0$, $na_n^d \rightarrow \infty$, $\log a_n = o(na_n^d)$, $\log \log n = o(\log a_n^{-1})$, имеем

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^W(a_n)}{(2a_n^d \log a_n^{-d})^{1/2}} &= 1 \quad \text{н.в.}, \\ \text{б)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^b(a_n)}{(2a_n^{d+1} \log a_n^{-(d+1)})^{1/2}} &= 1 \quad \text{н.в.} \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2. Мы докажем только часть а) этой теоремы, так как часть б) доказывается аналогично. В случае, когда функция распределения F равномерна на $[0, 1]^d$, $K_n(I_{s,r})$ принимает вид

$$K_n(I_{s,r}) = \int_{s_1}^{r_1} \frac{U_n(\tau)}{1 - \tau} d\tau \prod_{2 \leq i \leq d} (r_i - s_i),$$

и, как легко видеть,

$$\omega_n^K(a) \leq a^{d-1} \sup_{r_1 - s_1 \leq a} \int_{s_1}^{r_1} \frac{U_n(\tau)}{1 - \tau} d\tau. \quad (6)$$

Для доказательства нам понадобится несколько предложений.

Предложение 1 (см. [2, с. 44, (4.36) и теорему 4.3]). Пусть $U_{n,\nu}(t) = n^{\nu-1/2} \times U_n(t)$ и $b_n = (\log n)/n$. Тогда для $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ имеем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{b_n < t < 1} \frac{|U_{n,\nu}(t)|}{(\log \log n)^\nu t^{1-\nu}} \leq 2 \quad \text{н.в.}$$

Предложение 2 (см. [2, с. 54, теорема 4.4]). Пусть $0 < \nu < \frac{1}{2}$, $0 < k_n \leq n$, $k_n \rightarrow \infty$ и пусть $c_n = (nk_n^{2\nu/(1-2\nu)} (\log \log n)^{1/(1-2\nu)})^{-1}$ и

$$D_{n,\nu}(k_n) = \left(\frac{n}{k_n}\right)^\nu \sup_{0 < t \leq k_n/n} \frac{|U_n(\tau)|}{t^{1/2-\nu}}.$$

Тогда если $\sum_{n \geq 1} c_n < \infty$ и $k_n/n \rightarrow 0$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n,\nu}(k_n)}{(\log \log n)^{1/2}} = 2^{1/2} \quad \text{н.в.}$$

Ясно, что $\omega_n^U(a) - \omega_n^K(a) \leq \omega_n^W(a) \leq \omega_n^U(a) + \omega_n^K(a)$, и для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^K(a_n)}{(2a_n^d \log a_n^{-d})^{1/2}} = 0 \quad \text{п.в.} \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^K(a_n)}{(2a_n^d \log a_n^{-d})^{1/2}} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{d/2-1} \sup_{\tau_1-s_1 \leq a_n} \int_{s_1}^{\tau_1} \frac{|U_n(\tau)|}{1-\tau} d\tau \frac{1}{(2 \log a_n^{-d})^{1/2}} \\ &\leq 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{(d-1)/2} \sup_{0 \leq t \leq 1-a_n} \frac{|U_n(t)|}{(1-t)^{1/2}} \frac{1}{(2 \log a_n^{-d})^{1/2}} \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{d/2-1} \int_{1-2a_n}^1 \frac{|U_n(\tau)|}{1-\tau} d\tau \frac{1}{(2 \log a_n^{-d})^{1/2}} \\ &\leq 2^{1/2} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{(d-1)/2} \sup_{0 \leq t \leq 1-a_n} \frac{|U_n(t)|}{(1-t)^{1/2}} \frac{1}{(\log a_n^{-d})^{1/2}} \\ &\quad + 2^{7/4} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{d/2-3/4} \sup_{1-2a_n \leq t < 1} \frac{|U_n(t)|}{(1-t)^{1/4}} \frac{1}{(\log a_n^{-d})^{1/2}} \\ &= \left(\frac{2}{d}\right)^{1/2} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{(d-1)/2} \sup_{a_n \leq t \leq 1} \frac{|U_n(t)|}{t^{1/2}} \frac{1}{(\log a_n^{-1})^{1/2}} \\ &\quad + 2^{7/4} d^{-1/2} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{d/2-3/4} \sup_{0 < t \leq 2a_n} \frac{|U_n(t)|}{t^{1/4}} \frac{1}{(\log a_n^{-1})^{1/2}} \\ &\leq \left(\frac{2}{d}\right)^{1/2} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{(d-1)/2} \sup_{b_n \leq t \leq 1} \frac{|U_n(t)|}{t^{1/2}} \frac{1}{(\log a_n^{-1})^{1/2}} \\ &\quad + 4d^{-1/2} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{(d-1)/2} D_{n,1/4}(2na_n) \frac{1}{(\log a_n^{-1})^{1/2}} \\ &= \left(\frac{2}{d}\right)^{1/2} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{(d-1)/2} \sup_{b_n \leq t \leq 1} \frac{|U_n(t)|}{(t \log \log n)^{1/2}} \left(\frac{\log \log n}{\log a_n^{-1}}\right)^{1/2} \\ &\quad + 4d^{-1/2} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{(d-1)/2} \frac{D_{n,1/4}(2na_n)}{(\log \log n)^{1/2}} \left(\frac{\log \log n}{\log a_n^{-1}}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались обозначениями предложений и тем, что $b_n = (\log n)/n \leq a_n$ (при достаточно больших n), так как $[\log(na_n)]/(na_n) = [\log n]/(na_n) - [\log a_n^{-1}]/(na_n) = b_n/a_n - \log a_n^{-1}/(na_n)$ и по условию теоремы $[\log a_n^{-1}]/(na_n) \rightarrow 0$. По условию теоремы $[\log \log n / \log a_n^{-1}] \rightarrow \infty$, и для доказательства теоремы остается проверить лишь условия предложений 1 и 2. В нашем случае, $k_n = 2na_n$, $\nu = \frac{1}{4}$ и $c_n = [n(\log \log n)^2 / na_n]^{-1} \leq [n \log n (\log \log n)^2]^{-1}$ (при достаточно больших n), поэтому ясно, что $\sum_{n \geq 1} c_n < \infty$, т.е. выполняется условие предложений 1 и 2, что и завершает доказательство теоремы.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
2. Einmahl J. H. J. Multivariate Empirical Processes. Centre for Mathematics and Computer Science, 1986.
3. Хмаладзе Э. В. Мартингалный подход в теории непараметрических критериев согласия. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 2, с. 246–265.
4. Khmaladze E. V. An innovation approach to goodness of fit tests in $\mathbf{R}^m$. — Ann. Statist., 1988, v. 16, № 4, p. 1503–1516.
5. Shorack G. R., Wellner J. A. Empirical Processes with Applications to Statistics. New York: Wiley, 1986.
6. Stute W. The oscillation behavior of empirical processes. — Ann. Probab., 1982, v. 10, № 1, p. 86–107.
7. Stute W. The oscillation behavior of empirical processes: The multivariate case. — Ann. Probab., 1984, v. 12, № 2, p. 361–379.

Поступила в редакцию
31.III.1993

© 1996 г. NGUYEN VAN QUANG*, NGUYEN DUY TIEN*

THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS
FOR d -DIMENSIONAL ARRAYS
IN VON NEUMANN ALGEBRAS

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра фон Неймана с нормальным точным следовым состоянием τ ; пусть $\tilde{\mathcal{A}}$ $*$ -алгебра измеримых операторов в смысле Сигала. Цель настоящей работы — показать, что если массив $(x(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d)$ самосопряженных попарно независимых одинаково распределенных элементов в $\tilde{\mathcal{A}}$ удовлетворяет условию

$$\tau(|x(\bar{1})|(\log^+ |x(\bar{1})|)^{d-1}) < \infty,$$

то

$$\frac{1}{n_1 \cdots n_d} \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_d=1}^{n_d} x(k)$$

сходится к $\tau(x(\bar{1}))$ билатерально почти равномерно (где $\bar{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $\bar{k} = (k_1, \dots, k_d)$, $\bar{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbf{N}^d$).

Ключевые слова и фразы: алгебра фон Неймана, усиленный закон больших чисел.

1. Introduction. The strong law of large numbers in von Neumann algebras was considered by some authors (see [1], [3]–[5]). If the state is tracial, this law has been obtained for successively independent sequence of measurable operators. If the state is not tracial some results are proved for orthogonal sequences, for sequences of uncorrelated elements and for uniformly bounded sequences. Note here that the same problem for multidimensional arrays is still not studied.

In this paper, by using the N. Etemadi's method (see [2]), we consider the strong law of large numbers for d -dimensional arrays of *pairwise independent* measurable operators.

*Hanoi University, Vietnam.