Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, Предельная теорема пуассоновского типа для числа пар почти полностью совпавших цепочек, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 1, 59–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:53:10

© 2008 г.

МИХАЙЛОВ В. Г.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ПУАССОНОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ЧИСЛА ПАР ПОЧТИ ПОЛНОСТЬЮ СОВПАВШИХ ЦЕПОЧЕК¹⁾

Рассматриваются две последовательности $X_1, \dots, X_m$ и $Y_1, \dots, Y_n$ из независимых одинаково распределенных внутри каждой последовательности случайных величин, принимающих значения из множества $\{1, 2, \dots\}$. Изучается распределение числа N_d таких пар s -цепочек $(\bar{X}_i, \bar{Y}_j)$, где $\bar{X}_i = (X_i, \dots, X_{i+s-1})$, $\bar{Y}_j = (Y_j, \dots, Y_{j+s-1})$, в которых s -цепочки $\bar{X}_i$ и $\bar{Y}_j$ различаются относительно небольшим числом элементов d . Показано, что в схеме серий при $m, n, s \rightarrow \infty$, $d = o(s/\ln s)$ и таком изменении распределений последовательностей, что вероятность $\mathbf{P}\{X_i = Y_j\}$ и среднее $\mathbf{E}N_d$ имеют пределы, распределение случайной величины N_d сходится к сложному пуассоновскому распределению. Значение параметра d учитывается лишь при согласовании параметров схемы при переходе к пределу, а на вид предельного распределения оно не влияет. Это предельное распределение точно такое же, какое имеет в аналогичном случае число пар $(\bar{X}_i, \bar{Y}_j)$, в которых $\bar{X}_i = \bar{Y}_j$.

Ключевые слова и фразы: s -цепочки, совпадения цепочек, совпадения цепочек с нарушениями, предельная теорема Пуассона, сложное распределение Пуассона, метод Чена–Стейна.

1. Формулировка и обсуждение теоремы. Пусть $X = (X_1, \dots, X_m)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ — две последовательности независимых одинаково (внутри каждой последовательности) распределенных случайных величин, принимающих значения в множестве $\{1, 2, \dots\}$,

$$p_k = \mathbf{P}\{X_1 = k\}, \quad q_k = \mathbf{P}\{Y_1 = k\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$p = \max_k (p_k I\{q_k > 0\}), \quad q = \max_k (q_k I\{p_k > 0\})$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке программы РАН «Современные проблемы теоретической математики», Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 02-01-00266 и 05-01-00035) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-1758.2003.1).

(здесь и далее выражение $I\{\dots\}$ обозначает индикатор множества или случайного события),

$$r = \max_k p_k q_k, \quad R = \mathbf{P}\{X_1 = Y_1\} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k q_k.$$

Мы разместим случайные величины $X_1, \dots, X_m$ и $Y_1, \dots, Y_n$ в вершины дискретных окружностей длин m и n соответственно и, задав натуральные числа s, c , $1 \leq c \leq s$, рассмотрим события

$$H_{i,j}(s, c) = \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} I\{X_{i+k} = Y_{j+k}\} = c \right\}.$$

В соответствии с порядком вершин на окружностях здесь считается, что $X_{m+i} = X_i$, $Y_{n+i} = Y_i$ при всех $i = 1, 2, \dots$.

В работе [7] событие $H_{i,j}(s, c)$ было названо (s, c) -совпадением цепочек $\bar{X}_i = (X_i, \dots, X_{i+s-1})$ и $\bar{Y}_j = (Y_j, \dots, Y_{j+s-1})$. Его называют также совпадением (цепочек $\bar{X}_i$ и $\bar{Y}_j$) с дефектом $d = s - c$. При $c = s$ это обычное совпадение цепочек. Число (s, c) -совпадений (совпадений с дефектом $d = s - c$) выражается формулой

$$N_d = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_{i,j}(s, c).$$

Теорема 1. Пусть параметры схемы m, n, s стремятся к бесконечности, а вероятности p_k, q_k меняются так, что

$$\Lambda = mn C_s^c R^c (1 - R)^{s-c+1} \longrightarrow \lambda, \quad (1.1)$$

$$0 < \lambda < \infty, \quad R \rightarrow \rho, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

причем

$$\frac{d \ln s}{s} \rightarrow 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{s}{m} + \frac{s}{n} \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

$$s C_s^d \left(m p^c + n q^c + \frac{s}{(1 - R)^{c-s}} \left(\frac{r}{R} \right)^c \right) \longrightarrow 0. \quad (1.4)$$

Тогда распределение случайной величины N_d сходится к сложному пуассоновскому распределению с производящей функцией

$$\exp \left\{ \frac{\lambda(z - 1)}{1 - \rho z} \right\}. \quad (1.5)$$

З а м е ч а н и е 1. Из условий теоремы следует, что $d = s - c = o(s)$. Таким образом, в теореме 1 речь идет о почти полностью совпавших s -цепочках.

З а м е ч а н и е 2. Условие (1.2) может быть ослаблено. Достаточно предположить, что

$$\frac{d}{s} \left(1 + \frac{\ln s}{|\ln R|} \right) \longrightarrow 0. \quad (1.6)$$

З а м е ч а н и е 3. В ходе доказательства вырисовывается следующая картина асимптотического поведения (s, c) -совпадений цепочек. Эти совпадения возникают сериями случайной длины, число серий имеет в пределе распределение Пуассона с параметром λ , а длины серий асимптотически независимы и имеют в пределе геометрическое распределение с параметром ρ . Предельная теорема Пуассона для числа серий была получена ранее (см. [1]–[3]). Новизна нашего результата заключается в нахождении асимптотического распределения длин серий.

З а м е ч а н и е 4. Среди величин N_d особый интерес представляет случайная величина N_0 — число пар одинаковых s -цепочек в последовательностях X и Y . Она изучалась многими авторами (например, в [1]–[6]). В случае $c = s$ наша теорема дает такие же условия сходимости к указанному выше предельному распределению, как и следствие 1 работы [6].

З а м е ч а н и е 5. Теорема 1 показывает, что при $\rho \rightarrow 0$ в качестве предельного распределения для N_d выступает распределение Пуассона. Для величины N_0 предельная теорема Пуассона при разных условиях доказывалась в работах [1]–[6].

З а м е ч а н и е 6. Свойства случайных величин N_d при $c < s$ в случае фиксированных значений параметров s, c изучались в работе [7], где была доказана сходимость распределения $(d + 1)$ -мерного случайного вектора $\bar{N}_d = (N_0, N_1, \dots, N_d)$ к распределению вектора

$$\left(\sum_{k=c}^l (l - k + 1) \pi_k, \quad l = c, \dots, s \right),$$

где $\pi_k, k = c, \dots, s$, — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_k = C_{k-2}^{c-2} \lambda, k = c, \dots, s$, соответственно, а $\lambda = \lim mnR^c$. Одномерные компоненты этого распределения принципиально отличаются от предельного распределения в нашем случае.

З а м е ч а н и е 7. Утверждение теоремы 1 справедливо и для (s, c) -совпадений цепочек из обычных (не замкнутых в циклы) последовательностей случайных величин. Возникающие в этом случае эффекты, связанные со спецификой свойств совпадений цепочек, расположенных в началах и концах последовательностей, лишь несколько усложняют рассуждения.

2. Доказательство теоремы. Первый этап доказательства — разобраться в общей картине асимптотического поведения (s, c) -совпадений. Здесь поможет следующее соображение. Вероятность появления (s, c) -совпадения на заданных местах последовательностей зависит от числа несовпадений, но не зависит от того, на каких именно местах буквы в цепочках не совпали. Используя этот факт, можно показать, что

для основной массы (s, c) -совпадений расстояние от начала цепочки до места первого несовпадения в цепочках и расстояние от места последнего несовпадения до конца цепочки стремятся к бесконечности. Поэтому, исключив из рассмотрения иные (s, c) -совпадения, мы не изменим предельное распределение для их общего числа. Осталось заметить, что (s, c) -совпадение с координатами (i, j) , начинающееся и заканчивающееся полностью совпавшими участками цепочек, влечет с вероятностью R такое же (s, c) -совпадение с координатами $(i + 1, j + 1)$. Это свойство не зависит от значения параметра d , если он мал относительно s , и выполнено для полных совпадений цепочек. Поэтому основная масса (s, c) -совпадений образует скопления, число совпадений в скоплении имеет в пределе геометрическое распределение, а сами скопления представляют собой редкие слабо зависимые события.

Эта картина полностью аналогична картине, наблюдаемой для полных совпадений цепочек. Предельное поведение числа пар совпавших цепочек хорошо изучено (см., например, [6], [8], [9]).

Приняв в качестве естественной гипотезы эту картину, сгруппируем (s, c) -совпадения в серии и попробуем доказать многомерную предельную теорему Пуассона для вектора из чисел серий из заданного количества (s, c) -совпадений. Для ее доказательства мы воспользуемся функциональным вариантом метода Чена–Стейна.

З а м е ч а н и е 8. Описанный выше прием отсева части (s, c) -совпадений использовался ранее в работах [1]–[3].

Перейдем к реализации этого плана. Начнем с отсева неудобных для нас (s, c) -совпадений. Зададим натуральное число g , $1 \leq g \leq c/2$, и рассмотрим события

$$H_{i,j}(s, c, g) = H_{i,j}(s, c) \cap \bigcap_{k=1}^g \{X_{i+k-1} = Y_{j+k-1}\} \cap \bigcap_{k=0}^{g-1} \{X_{i+s-g+k} = Y_{j+s-g+k}\}.$$

Здесь речь идет о таких (s, c) -совпадениях, в которых на первых и последних g местах цепочек соответствующие буквы цепочек совпадают. Поэтому для «несовпадений букв» в цепочках имеется лишь $s - 2g$ возможных позиций. Такие (s, c) -совпадения мы будем называть (s, c, g) -совпадениями. Их число выражается формулой

$$N_d(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_{i,j}(s, c, g). \quad (2.1)$$

Как и раньше, здесь считается, что $X_{m+i} = X_i$, $Y_{n+i} = Y_i$ при всех $i = 1, 2, \dots$

Лемма 1. Пусть $t, n, s \rightarrow \infty$, выполнено условие (1.1), а параметр g меняется так, что

$$g(1 - cs^{-1}) \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{N_d = N_d(g)\} \rightarrow 1.$$

Доказательство. Из определений следуют равенства

$$\mathbf{P}\{H_{i,j}(s, c)\} = C_s^c R^c (1 - R)^d,$$

$$\mathbf{P}\{H_{i,j}(s, c, g)\} = C_{s-2g}^{c-2g} R^c (1 - R)^d.$$

Кроме того, $N_d \geq N_d(g)$. Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{N_d \neq N_d(g)\} &\leq \mathbf{E}N_d - \mathbf{E}N_d(g) = (C_s^c - C_{s-2g}^{c-2g}) mn R^c (1 - R)^d \\ &= \left(1 - \frac{(s-2g)_d}{(s)_d}\right) \frac{\Lambda}{1 - R} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(здесь и далее $(s)_d = s(s-1)\cdots(s-d+1)$).

Заметим, что

$$\frac{(s-2g)_d}{(s)_d} = \left(1 - \frac{2g}{s}\right) \left(1 - \frac{2g}{s-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{2g}{s-d+1}\right),$$

а при достаточно малых по сравнению с s величинах $d = s - c$ и g

$$1 - \frac{(s-2g)_d}{(s)_d} \leq 2g \sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{s-k} = O\left(g \frac{d}{c}\right). \quad (2.4)$$

Из условий леммы следует, что правая часть соотношения (2.4) стремится к нулю, а из (1.1), (2.3) и (2.4) вытекает, что $\mathbf{P}\{N_d \neq N_d(g)\} \rightarrow 0$. Лемма 1 доказана.

Согласно лемме 1, при рассматриваемых условиях предельные распределения случайных величин N_d и $N_d(g)$ совпадают. Поэтому мы перейдем к изучению асимптотических свойств величины $N_d(g)$, что делается более просто.

При $k = 1, 2, \dots$ введем события

$$G(i, j, k) = \{X_{i-1} \neq Y_{j-1}\} \cap \bigcap_{l=0}^{k-1} H_{i+l, j+l}(s, c, g) \cap \{X_{i+k+s-1} \neq Y_{j+k+s-1}\} \quad (2.5)$$

и случайные величины $W(i, j, k) = I\{G(i, j, k)\}$.

Случайная величина $W(i, j, k)$ является индикатором серии из k смежных (s, c, g) -совпадений, начинающейся с совпадения $H_{i,j}(s, c, g)$. Такая серия не может быть слишком длинной, поскольку она обязательно начинается с $g + k - 1$ совпадений букв, а на первых s местах

должны еще уместиться $s - c$ несовпадений букв. Поэтому $k \leq h = c - 2g + 1$. Значит, можно написать формулу

$$N_d(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^h kW(i, j, k). \quad (2.6)$$

Далее нам удобно ввести обозначения

$$\Gamma = \{a = (i, j, k): i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, h\}\}.$$

Тогда сумма (2.6) запишется следующим образом:

$$N_d(g) = \sum_{a \in \Gamma} kW(a).$$

Пусть W обозначает набор случайных величин $\{W(a)\}_{\Gamma}$, а $\pi = \{\pi(a)\}_{\Gamma}$ — набор независимых в совокупности случайных величин, имеющих распределения Пуассона с параметрами $\mathbf{E}\pi(a) = \mathbf{E}W(a)$, $a \in \Gamma$.

Рассмотрим расстояние по вариации $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ между распределениями $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Для распределений на дискретном множестве A оно выражается формулой

$$\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} |\mathbf{P}_1(a) - \mathbf{P}_2(a)|.$$

Распределение случайной величины (случайного набора) W будем обозначать $\mathcal{L}(W)$.

Лемма 2. Пусть $m, n > s = c + d \geq c \geq 2g$. Тогда

$$\rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\pi)) \leq S_1 + S_2, \quad (2.7)$$

где

$$S_1 = (4s + 3) \Lambda^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right), \quad (2.8)$$

$$S_2 = 4s \Lambda \left(\frac{R^g}{2(1 - R)} + C_s^{s-c} (mp^c + nq^c) + \frac{4sC_s^{s-c}}{(1 - R)^{s-c+1}} \left(\frac{r}{R} \right)^c \right). \quad (2.9)$$

Доказательство леммы 2. Определим множество Γ_a^{ind} следующим образом:

$$\Gamma_a^{\text{ind}} = \{a' = (i', j', k') \in \Gamma: i' - i \geq s + k + 1 \text{ или } i - i' \geq s + k' + 1 \\ \text{и } j' - j \geq s + k + 1 \text{ или } j - j' \geq s + k' + 1\}.$$

Нетрудно проверить, что случайная величина $W(a)$ не зависит от совокупности случайных величин $\{W(a'), a' \in \Gamma_a^{\text{ind}}\}$. Положим

$$\Gamma_a = (\Gamma \setminus \{a\}) \setminus \Gamma_a^{\text{ind}}. \quad (2.10)$$

Воспользуемся теоремой 10.А книги [12], из которой следует, что

$$\rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\pi)) \leq \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a)(\mathbf{E}W(a) + \mathbf{E}U(a)) + \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a) U(a), \quad (2.11)$$

где

$$U(a) = \sum_{a' \in \Gamma_a} W(a').$$

Определим множество

$$\Gamma(r) = \{a = (i, j, k) \in \Gamma: k = r\}.$$

Чтобы оценить первую сумму в правой части (2.11), заметим, что

$$\begin{aligned} |(\{a\} \cup \Gamma_a) \cap \Gamma(r)| &= |(\Gamma \setminus \Gamma_a^{\text{ind}}) \cap \Gamma(r)| \\ &\leq (mn - (m - 2(s + h) - 3)(n - 2(s + h) - 3)) \\ &\leq (2(s + h) + 3)(m + n). \end{aligned}$$

Из равенства (2.5) при $k \leq h$ вытекает формула

$$\begin{aligned} \mathbf{E}W(i, j, k) &= \mathbf{P}\{G(i, j, k)\} \\ &= \mathbf{P}\{X_{i-1} \neq Y_{j-1}\} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{l=0}^{k-1} H_{i+l, j+l}(s, c, g)\right\} \mathbf{P}\{X_{i+k+s-1} \neq Y_{j+k+s-1}\} \\ &= C_{s-2g-k+1}^{c-2g-k+1} (1-R)^{s-c+2} R^{c+r-1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из нее следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^h \mathbf{E}W(i, j, k) \leq C_{s-2g}^{s-c} (1-R)^{s-c+2} mn \sum_{k=1}^h R^{c+k-1} \\ &< mn C_{s-2g}^{s-c} (1-R)^{s-c+1} R^c = \Lambda. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}W(a) + \mathbf{E}U(a) &\leq \sum_{r=1}^h \left| (\{a\} \cup \Gamma_a) \cap \Gamma(r) \right| C_{s-2g-r+1}^{s-c} (1-R)^{s-c+2} R^{c+r-1} \\ &\leq C_{s-2g}^{s-c} (2(s + h) + 3)(m + n)(1-R)^{s-c+2} \sum_{r=1}^h R^{c+r-1} \\ &\leq C_{s-2g}^{s-c} (2(s + h) + 3)(m + n)(1-R)^{s-c+1} R^c \\ &= \Lambda(2(s + h) + 3)(m^{-1} + n^{-1}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a)(\mathbf{E}W(a) + \mathbf{E}U(a)) \leq (2(s + h) + 3)(m^{-1} + n^{-1}) \Lambda^2. \quad (2.13)$$

Оценим вторую сумму в правой части (2.11). Заметим, что для элементов множества Γ_a выполнено одно из условий (или выполнены оба условия сразу)

$$-(s + k') \leq i' - i \leq s + k, \quad -(s + k') \leq j' - j \leq s + k. \quad (2.14)$$

Рассмотрим отдельно разные варианты. Введем множества

$$\begin{aligned}\Gamma_a^{\text{str}} &= \{a' = (i', j', k') \in \Gamma_a: -(s + k') \leq i' - i = j' - j \leq s + k'\}, \\ \Gamma_a^* &= \Gamma_a \setminus \Gamma_a^{\text{str}}, \\ \Gamma_a^{**} &= \{a' \in \Gamma_a^*: 0 < i' - i \leq s + k \text{ или } 0 < i - i' \leq s + k', \\ &\quad 0 < j' - j \leq s + k \text{ или } 0 < j - j' \leq s + k'\}.\end{aligned}$$

Для элементов множеств Γ_a^{str} и Γ_a^{**} выполнены оба условия (2.14).

Если $a' \in \Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**}$, то выполнено лишь одно из условий (2.14). Нам удобно рассмотреть два имеющихся варианта отдельно. Определим множества

$$\begin{aligned}\Gamma_{a,1}^{*\backslash**} &= \{a' \in \Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**}: 0 < i' - i \leq s + k \text{ или } 0 < i - i' \leq s + k'\}, \\ \Gamma_{a,2}^{*\backslash**} &= \{a' \in \Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**}: 0 < j' - j \leq s + k \text{ или } 0 < j - j' \leq s + k'\}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\Gamma_{a,1}^{*\backslash**} \cap \Gamma_{a,2}^{*\backslash**} = \emptyset \quad \text{и} \quad \Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**} = \Gamma_{a,1}^{*\backslash**} \cup \Gamma_{a,2}^{*\backslash**}.$$

Заметим, что

$$\Gamma_a \setminus \{a\} = \Gamma_a^{\text{str}} \cup \Gamma_{a,1}^{*\backslash**} \cup \Gamma_{a,2}^{*\backslash**} \cup \Gamma_a^{**}. \quad (2.15)$$

Лемма 3. Пусть $a \in \Gamma(k)$, $a' \in \Gamma_a^{\text{str}} \cap \Gamma(k')$, $k, k' \leq h$.

(а) Если $i = i'$, $j = j'$, $k \neq k'$, то $\mathbf{E}W(a)W(a') = 0$.

(б) Если $0 < i' - i \leq g + k - 1$ или $0 < i - i' \leq g + k' - 1$, то $\mathbf{E}W(a)W(a') = 0$.

(в) Если $g + k \leq i' - i \leq s + k$ или $g + k' \leq i - i' \leq s + k'$, то $\mathbf{E}W(a)W(a') \leq R^{g+k'-1}\mathbf{E}W(a)$.

Доказательство леммы 3. Воспользуемся вытекающим из определений соотношением

$$\begin{aligned}G(i, j, k) &\subseteq \bigcap_{t=0}^{g+k-2} \{X_{i+t} = Y_{j+t}\} \cap \bigcap_{t=0}^{k-1} \{X_{i+s+t-1} = Y_{j+s+t-1}\} \\ &\quad \cap \{X_{i-1} \neq Y_{j-1}\} \cap \{X_{i+s+k-1} \neq Y_{j+s+k-1}\}.\end{aligned} \quad (2.16)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}G(i', j', k') &\subseteq \bigcap_{t=0}^{g+k'-2} \{X_{i'+t} = Y_{j'+t}\} \cap \bigcap_{t=0}^{k'-1} \{X_{i'+s+t-1} = Y_{j'+s+t-1}\} \\ &\quad \cap \{X_{i'-1} \neq Y_{j'-1}\} \cap \{X_{i'+s+k'-1} \neq Y_{j'+s+k'-1}\}.\end{aligned} \quad (2.17)$$

Докажем утверждение (а). Пусть $i = i'$, $j = j'$, $k > k'$. Тогда, согласно (2.16) и (2.17),

$$\begin{aligned}G(i, j, k) &\subseteq \{X_{i'+s+k'-1} = Y_{j'+s+k'-1}\}, \\ G(i', j', k') &\subseteq \{X_{i'+s+k'-1} \neq Y_{j'+s+k'-1}\}.\end{aligned}$$

Значит, события $G(i, j, k)$ и $G(i', j', k')$ несовместны и

$$\mathbf{E}W(a)W(a') = \mathbf{P}\{G_k(i, j, k) \cap G(i', j', k')\} = 0.$$

Точно так же обстоит дело при $i = i', j = j', k > k'$. Утверждение (а) доказано.

Докажем утверждение (б). Пусть $0 < i' - i \leq g + k - 1$. Из (2.16) и (2.17) следует, что

$$G(i, j, k) \subseteq \{X_{i'-1} = Y_{j'-1}\}, \quad G(i', j', k') \subseteq \{X_{i'-1} \neq Y_{j'-1}\}.$$

Значит, и в этом случае события $G(i, j, k)$ и $G(i', j', k')$ несовместны, а

$$\mathbf{E}W(a)W(a') = \mathbf{P}\{G(i, j, k) \cap G(i', j', k')\} = 0.$$

Точно так же обстоит дело при $0 < i - i' \leq g + k' - 1$. Утверждение (б) доказано.

Докажем первую часть утверждения (в). В этом случае

$$G(i', j', k') \subseteq \bigcap_{t=0}^{g+k'-2} \{X_{i'+s-g+t} = Y_{j'+s-g+t}\},$$

причем $i' + s - g > i + s + k - 1$. Значит, события $G(i, j, k)$ и $\bigcap_{t=0}^{g+k'-2} \{X_{i'+s-g+t} = Y_{j'+s-g+t}\}$ независимы и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq \mathbf{P}\{G_k(i, j, k)\} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{t=0}^{g+k'-2} \{X_{i'+s-g+t} = Y_{j'+s-g+t}\}\right\} \\ &= \mathbf{E}W(a)R^{g+k'-1}. \end{aligned}$$

Первая часть утверждения (в) доказана. Вторая часть этого утверждения доказывается аналогично. Доказательство леммы 3 завершено.

Лемма 4. Пусть $a \in \Gamma$. Тогда:

- (а) если $a' \in \Gamma_{a,1}^{*\backslash**}$, то $\mathbf{E}W(a)W(a') < C_s^d q^c \mathbf{E}W(a)$,
- (б) если $a' \in \Gamma_{a,2}^{*\backslash**}$, то $\mathbf{E}W(a)W(a') < C_s^d p^c \mathbf{E}W(a)$,
- (в) если $a' \in \Gamma_{a,1}^{**}$, то

$$\mathbf{E}W(a)W(a') < (C_s^d)^2 r^c. \quad (2.18)$$

При доказательстве леммы 4 мы во многом следуем доказательству утверждений (б) и (с) леммы 1 работы [6].

(а) Пусть $a' \in \Gamma_{a,1}^{*\backslash**}$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}W(a)W(a') &= \sum_{x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1}} \mathbf{E}(W(a)W(a') I\{A(x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1})\}) \\ &= \sum_{x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1}} \left(\mathbf{E}(W(a') \mid A(x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1}) \cap G(i, j, k)) \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{P}\{G(i, j, k) \cap A(x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1})\} \right), \end{aligned}$$

где

$$A(x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1}) = \{X_{i'-1} = x_{-1}, \dots, X_{i'+s+k'-1} = x_{s+k'-1}\}.$$

Так как множества $\{j-1, j, \dots, j+s+k-1\}$ и $\{j'-1, j', \dots, j'+s+k'-1\}$ не пересекаются, то в тех случаях, когда

$$\mathbf{P}\{A(x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1}) \cap G(i, j, k)\} > 0,$$

выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(W(a') \mid A(x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1}) \cap G(i, j, k)\right) \\ &= \mathbf{E}(W(a') \mid A(x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1})) \leq C_{s-k-2g}^d q^c < C_s^d q^c, \end{aligned}$$

где в качестве числового коэффициента первый раз фигурирует число вариантов расположения «несовпадений» букв в цепочках, а второй раз — его оценка сверху. В итоге получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}W(a)W(a') &< C_s^d q^c \sum_{x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1}} \mathbf{P}\{G(i, j, k) \cap A(x_{-1}, \dots, x_{s+k'-1})\} \\ &= C_s^d q^c \mathbf{P}\{G(i, j, k)\} = C_s^{s-c} q^c \mathbf{E}W(a). \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение (а) доказано.

Утверждение (б) доказывается аналогично.

(в) Пусть $a' \in \Gamma_a^{**}$. Рассмотрим множество

$$\Delta_g = \left\{ \delta = (\delta_1, \dots, \delta_s) \in \{0, 1\}^s : \sum_{k=1}^s \delta_k = c, \delta_1 = \dots = \delta_g = \delta_s = 1 \right\}.$$

При $\delta \in \Delta_g$ положим

$$H_{i,j,\delta} = \{X_{i+t-1} = Y_{j+t-1} \iff \delta_t = 1, t = 1, \dots, s\}.$$

Рассмотрим случайные величины

$$W(a, \delta) = W(a) I\{H_{i,j,\delta}\}, \quad a = (i, j, k), \quad \delta \in \Delta_g.$$

Почти дословно повторив рассуждения доказательства утверждения (с) леммы 1 работы [6], получим, что

$$\mathbf{E}W(a, \delta)W(a', \delta') \leq r^c. \quad (2.19)$$

Заметим теперь, что

$$W(a) = \sum_{\delta \in \Delta_g} W(a, \delta), \quad |\Delta_g| < C_s^d.$$

Поэтому из (2.19) следует неравенство (2.18). Лемма 4 доказана.

Продолжим доказательство леммы 2. Заметим, что, согласно формулам (2.1) и (2.12),

$$\sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a) = \sum_{k=1}^h \sum_{a \in \Gamma(k)} \mathbf{E}W(a) < \Lambda.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |\Gamma_a^{\text{str}} \cap \Gamma(k')| &< 2s, & |\Gamma_a^{**}| &\leq 4(s+h)^2, \\ |\Gamma_{a,1}^{*\backslash**}| &< 2(s+h)n, & |\Gamma_{a,2}^{*\backslash**}| &< 2(s+h)m. \end{aligned}$$

Поэтому, используя леммы 3 и 4, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_a^{\text{str}}} \mathbf{E}W(a) W(a') &= \sum_{a \in \Gamma} \sum_{k'=1}^h \sum_{a' \in \Gamma_a^{\text{str}} \cap \Gamma(k')} \mathbf{E}W(a) W(a') \\ &\leq \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a) \sum_{k'=1}^h |\Gamma_a^{\text{str}} \cap \Gamma(k')| R^{g+k'-1} < 2(s+h) R^g \Lambda (1-R)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_{a,1}^{*\backslash**}} \mathbf{E}W(a) W(a') < 2(s+h) C_s^d n q^c \Lambda,$$

$$\sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_{a,2}^{*\backslash**}} \mathbf{E}W(a) W(a') < 2(s+h) C_s^d m p^c \Lambda,$$

$$\sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_a^{**}} \mathbf{E}W(a) W(a') \leq 4(s+h)^2 (C_s^d)^2 m n r^c.$$

В силу (2.15) и неравенства $h \leq s$ из этих оценок получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_a} \mathbf{E}W(a) W(a') \\ < 4s\Lambda \left(R^g (1-R)^{-1} + C_s^d (m p^c + n q^c) \right) + 16s^2 (C_s^d)^2 m n r^c. \end{aligned}$$

Подставим эту оценку вместе с оценкой (2.13) в неравенство (2.11) и после несложных преобразований получим неравенство (2.7). Лемма 2 доказана.

Пусть $\pi_1, \dots, \pi_h$ — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами

$$\lambda_k(m, n, c) = \Lambda R^{k-1} (1-R), \quad k = 1, \dots, h,$$

соответственно. Рассмотрим случайную величину

$$\pi(h) = \sum_{k=1}^h k \pi_k. \quad (2.20)$$

Следствие 1. Пусть $m, n > s = c + d \geq c \geq 2g$. Тогда

$$\rho(\mathcal{L}(N_d(g)), \mathcal{L}(\pi(h))) \leq S_1 + S_2. \quad (2.21)$$

Доказательство следствия 1. Для произвольной функции F на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}^\Gamma$ выполнено неравенство

$$\rho(\mathcal{L}(F(W)), \mathcal{L}(F(\pi))) \leq \rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\pi)). \quad (2.22)$$

Возьмем функцию

$$F(x) = \sum_{k=1}^h k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j,k}, \quad k = 1, \dots, h,$$

где $x = (x_{i,j,k}, (i, j, k) \in \Gamma)$. Тогда, согласно формулам (2.6) и (2.20),

$$N_d(g) = F(W), \quad \mathcal{L}(\pi(h)) = \mathcal{L}(F(\pi)).$$

Поэтому из неравенств (2.7) и (2.22) вытекает неравенство (2.21). Следствие 1 доказано.

Доказательство теоремы 1. Положим

$$g = \left\lceil \frac{\ln s + \ln \ln s}{|\ln R|} \right\rceil + 1.$$

Тогда

$$sR^g \leq sR^{(\ln s + \ln \ln s)/|\ln R|} = \frac{1}{\ln s} \rightarrow 0.$$

Поэтому из условия (1.6) (и, тем более, из условия (1.2) теоремы 1) вытекает соотношение $S_2 \rightarrow 0$. Кроме этого, непосредственно из условий теоремы следуют соотношения

$$\frac{dg}{s} \rightarrow 0, \quad S_1 \rightarrow 0.$$

Поэтому можно воспользоваться леммой 1 и следствием 1, согласно которым

$$\mathbf{P}\{N_d = N_d(g)\} \rightarrow 1, \quad \rho(\mathcal{L}(N_d(g)), \mathcal{L}(\pi(h))) \rightarrow 0. \quad (2.23)$$

Заметим, что в данном случае $h = c - 2g + 1 \rightarrow \infty$, а

$$\lambda_k(m, n, c) \rightarrow \lambda \rho^{k-1}(1 - \rho), \quad k = 1, 2, \dots$$

Значит, распределение случайной величины $\pi(h)$ сходится к распределению с производящей функцией (1.5). Согласно (2.23), к нему же сходится и распределение случайной величины N_d . Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 9. Используемый в настоящей работе метод позволяет получать и оценки точности аппроксимации распределения случайной величины N_d сопровождающим и предельным сложными пуассоновскими распределениями. При доказательстве теоремы 1 выведены некоторые такие оценки для вспомогательных случайных величин (лемма 2 и следствие 1). Для получения оценок точности аппроксимации может быть использован также метод работы [10]. Этим методом в работах [6] и [11] были получены оценки точности аппроксимации распределения случайной величины N_0 (в [6]) и распределений случайных величин N_d (в [11]) сопровождающими сложными пуассоновскими распределениями, построенными по рекомендациям работы [10]. Однако для случая $d > 0$ явных выражений для параметров сопровождающего распределения из-за его громоздкости получено не было. В работе [6] было показано, что рассматриваемое там сопровождающее сложное пуассоновское распределение сходится к распределению с производящей функцией (1.5).

Автор признателен Н. М. Меженной и рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arratia R., Gordon L., Waterman M. S.* An extreme value theory for sequence matching. — *Ann. Statist.*, 1986, v. 14, № 3, p. 971–993.
2. *Arratia R., Waterman M. S.* The Erdős–Rényi strong law for pattern matching with a given proportion of mismatches. — *Ann. Probab.*, 1989, v. 17, № 3, p. 1152–1169.
3. *Arratia R., Gordon L., Waterman M. S.* The Erdős–Rényi law in distribution, for coin tossing and sequence matching. — *Ann. Statist.*, 1990, v. 18, № 2, p. 539–570.
4. *Новак С. Ю.* Пуассонова аппроксимация числа длинных «повторов» в случайных последовательностях. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1994, т. 39, в. 4, с. 731–742; 1995, т. 40, в. 3, с. 700.
5. *Novak S. Yu.* Long match patterns in random sequences. — *Siberian Adv. Math.*, 1995, v. 5, № 3, p. 128–140.
6. *Михайлов В. Г.* Оценка точности сложной пуассоновской аппроксимации для распределения числа совпадающих цепочек. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, в. 4, с. 713–723.
7. *Михайлов В. Г.* Предельные теоремы пуассоновского типа для числа неполных совпадений s -цепочек. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, т. 47, в. 2, с. 350–357.
8. *Зубков А. М., Михайлов В. Г.* Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1974, т. 19, в. 1, с. 173–181.
9. *Зубков А. М., Михайлов В. Г.* О повторениях s -цепочек в последовательности независимых величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1979, т. 24, в. 2, с. 267–279.
10. *Roos M.* Stein’s method for compound Poisson approximation: the local approach. — *Ann. Appl. Probab.*, 1994, v. 4, p. 1177–1187.
11. *Månsson M.* On compound Poisson approximation for sequence matching. — *Combin., Probab. Comp.*, 2000, v. 9, № 6, p. 529–548.
12. *Barbour A. D., Holst L., Janson S.* Poisson Approximation. New York: Oxford Univ. Press, 1992, 277 p.

Поступила в редакцию
12.XII.2005

Исправленный вариант
15.V.2007