Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Бадалбаев, А. В. Дряхлов, Об асимптотическом поведении вероятности продолжения ветвящегося процесса с парными взаимодействиями частиц, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 721–737

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:28:13

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 41

Выпуск 4, 1996 год

октябрь, ноябрь, декабрь

© 1996 г.

БАДАЛБАЕВ И. С., ДРЯХЛОВ А. В.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА С ПАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ ЧАСТИЦ

Рассматривается модель ветвящихся процессов с непрерывным временем, где любая пара частиц в популяции, независимо от всех других частиц, порождает потомство. В критическом случае и при определенных условиях регулярности, накладываемых на инфинитизимальную производящую функцию, решается в «явном» виде прямое уравнение для преобразования Лапласа производящей функции процесса и показывается экспоненциальное убывание при $t \rightarrow \infty$ вероятности продолжения. В частном случае, когда число потомков каждой пары частиц не больше трех, дается «оценка» снизу для вероятности продолжения.

Ключевые слова и фразы: ветвящийся процесс с парными взаимодействиями частиц, прямое уравнение для производящей функции, преобразование Лапласа, аналитическое продолжение, асимптотика вероятности продолжения.

1. Описание модели и формулировка результатов. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц в общей постановке были введены Б.А.Севастьяновым в [1] и изучались в [2]–[4].

В настоящей статье рассматривается ветвящийся процесс $\{Z(t), t \geq 0\}$ с одним типом частиц и взаимодействием. Переходные вероятности

$$P_{ij}(t) = P\{Z(t) = j \mid Z(0) = i\}$$

*Институт математики АН Узбекистана, Академгородок, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700143 Ташкент, Узбекистан.

такого процесса удовлетворяют при $\Delta t \rightarrow +0$, $i \geq m$ ($m \geq 2$ — целое) соотношениям

$$\begin{aligned} P_{ij}(\Delta t) &= \delta_{ij} + C_i^m p_{j-i+m} \Delta t + o(\Delta t), & j \geq i - m, \\ P_{ij}(\Delta t) &= o(\Delta t), & j < i - m, \end{aligned}$$

где

$$p_j \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, m+1, \dots, \quad p_m < 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 0.$$

Пусть

$$f(s) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j.$$

Предполагается, что начальное число частиц фиксировано: $Z(0) = n$, $n \geq m$.

Одномерные процессы с взаимодействием частиц рассматривались в [2, гл. III], [3], [4], где было показано, что производящая функция

$$F(t, s) := \sum_{j=0}^{\infty} P_{nj}(t) s^j$$

процесса $\{Z(t), t \geq 0\}$ удовлетворяет прямому уравнению

$$\frac{\partial F(t; s)}{\partial t} = f(s) \frac{\partial^m F(t; s)}{\partial s^m} \quad (1)$$

с начальным условием $F(0, s) = s^n$. Кроме этого, доказано, что для любых n, j существуют пределы

$$q_{nj} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{nj}(t),$$

а вероятность невырождения критического ($f'(1) = 0$) процесса удовлетворяет соотношению

$$Q(t) = P\{Z(t) \geq m\} = o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Настоящая работа посвящена анализу асимптотического поведения вероятности $Q(t)$. Полученные результаты относятся к процессу с парными взаимодействиями, т.е. $m = 2$.

Будем считать, что выполнены следующие условия:

(А) $f'(1) = 0$ (критичность),

(В) при некотором $R > 1$ функция $f(s)$ регулярна в круге $K: |s-1| < R$ и не имеет в K других нулей, кроме $s = 1$.

Определим постоянную $\beta = f''(1)/8$.

Чтобы сформулировать основные теоремы, нам необходимы некоторые выкладки. Рассмотрим преобразования Лапласа ($\lambda > 0$)

$$\widehat{F}(\lambda; s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t, s) dt = \sum_{j=0}^\infty \widehat{P}_{nj}(\lambda) s^j,$$

где

$$\widehat{P}_{nj}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{nj}(t) dt,$$

и

$$\widehat{Q}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t) dt, \quad \pi(\lambda) = \int_0^\infty [q_{n0} - P_{n0}(t)] e^{-\lambda t} dt.$$

Для $\widehat{F}(\lambda; s)$ справедливо обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$-s^n + \lambda \widehat{F}(\lambda; s) = f(s) \frac{\partial^2 \widehat{F}(\lambda; s)}{\partial s^2}. \quad (2)$$

Перепишем соответствующее (2) однородное уравнение в виде

$$(s-1)^2 y'' - \lambda h(s) y = 0, \quad (3)$$

где функция $h(s) = (s-1)^2 / f(s)$ регулярна в круге $K: |s-1| < R$.

В соответствии с [6, гл. 7, § 6] уравнение (3) есть уравнение со слабой сингулярностью в точке $s = 1$. Там же доказывается, что фундаментальная система решений уравнения (3) есть

$$y_i(\lambda; s) = (1-s)^{\alpha_i} [1 + u_i(\lambda; s)],$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i(\lambda) = \frac{1}{2} \left[1 + (-1)^{i-1} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} \right],$$

$$u_i(\lambda; s) = \sum_{k=1}^\infty c_{ik}(\lambda) (s-1)^k, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

причем ряды сходятся при $|s-1| < R$. Коэффициенты $c_{ik} = c_{ik}(\lambda)$ в (4) вычисляются по следующим рекуррентным формулам ([6, гл. 7, § 6]):

$$c_{ik} = \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \frac{h^{(k-j)}(1)}{(k-j)!} c_{ij} \left[k \left(k + (-1)^{i-1} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} \right) \right]^{-1}, \quad (5)$$

где $c_{i0} = 1$; $i = 1, 2$; $k \geq 1$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (А) и (В), тогда при $t \rightarrow \infty$

$$Q(t) = o(e^{-\delta t})$$

для некоторого $\delta > 0$.

Пусть

$$\eta(\lambda) = \alpha_2(\lambda) + \frac{(\partial u_1 / \partial s)(\lambda; 0)}{1 + u_1(\lambda; 0)}.$$

Теорема 2. Если при условиях теоремы 1

$$(C_1) \quad 1 + u_1(\lambda; 0) \neq 0 \quad \text{на} \quad [-\beta; 0]$$

и

$$(C_2) \quad \mu = \max_{-\beta \leq \lambda \leq 0} \eta(\lambda) < A,$$

где A — такая постоянная, что $Q(t) \geq A[q_{n0} - P_{n0}(t)]$ для всех $t \geq 0$, то

$$\int_0^\infty e^{\beta t} Q(t) dt < \infty,$$

где

$$\beta = \frac{f''(1)}{8}, \quad q_{n0} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{n0}(t).$$

Рассмотрим процесс с производящей функцией

$$f(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3,$$

где $p_0 > 0$, $p_1 \geq 0$, $p_3 > 0$ и $p_2 = -(p_0 + p_1 + p_3)$. Тогда, как нетрудно проверить,

$$f(s) = N(s-1)^2(s+a), \quad (6)$$

где $N > 0$, $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

Ниже мы покажем, что такой процесс удовлетворяет условиям теоремы 2 и, более того, справедлив следующий результат.

Теорема 3. Для процесса с производящей функцией (6) имеют место следующие утверждения:

$$\int_0^\infty e^{\beta t} Q(t) dt < \infty, \quad \int_0^\infty t e^{\beta t} Q(t) dt = \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. В условиях теоремы 1 справедлива оценка снизу

$$Q(t) \geq \gamma e^{-8\beta t}, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

для некоторой постоянной $\gamma > 0$.

В самом деле, используя (6), легко вывести, что для любого $r = 1, 2, \dots$ и достаточно большого λ (такого, что $\alpha_1 > r$)

$$\lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial^r \hat{F}(\lambda; s)}{\partial s^r} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial^r F(t; s)}{\partial s^r} dt < \infty.$$

Это доказывает, что

$$M_r(t) = \mathbf{E}Z^r(t) = \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial^r F(t; s)}{\partial s^r} < \infty$$

для всех $t > 0$, $r = 1, 2, \dots$. Дифференцируя уравнение (1) по s при $m = 2$ (используя конечность всех моментов), получим дифференциальные уравнения для моментов. Решая эти уравнения, найдем, в частности,

$$M_1(t) \equiv n, \quad M_2(t) = n(n-1)e^{f''(1)t}.$$

Наконец, для получения оценки (7) следует применить к целочисленной случайной величине $\xi = [Z(t)/2]$ (здесь $[\cdot]$ обозначает целую часть) неравенство из [5, с. 318] и заметить, что

$$Q(t) = P\{Z(t) \geq 2\} = P\{\xi > 0\}.$$

З а м е ч а н и е 2. В теореме 2 можно положить

$$A = 1 + \frac{p_1}{p_0}.$$

Действительно, из прямой системы уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{nj}(t)$ (см. [2]) вытекает уравнение

$$P'_{n1}(t) = \frac{p_1}{p_0} P'_{n0}(t) + 3p_0 P_{n3}(t),$$

интегрируя которое, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} q_{n1} - P_{n1}(t) &= \frac{p_1}{p_0} [q_{n0} - P_{n0}(t)] + 3p_0 \int_t^\infty P_{n3}|u| du \\ &> \frac{p_1}{p_0} [q_{n0} - P_{n0}(t)]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Q(t) > \left(1 + \frac{p_1}{p_0}\right) [q_{n0} - P_{n0}(t)].$$

Приведем условия, достаточные для выполнения условия (C_1) теоремы 2.

З а м е ч а н и е 3. Пусть

$$-h'(1) \geq \frac{h''(1)}{2!} \geq \dots \geq (-1)^k \frac{h^{(k)}(1)}{k!} \geq \dots \geq 0, \quad (8)$$

и пусть

$$-\beta h'(1) < 1. \quad (9)$$

Тогда

$$1 + u_1(\lambda; 0) > 0 \quad \text{при} \quad \lambda \leq 0.$$

В самом деле, положим

$$s_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j c_{1j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(-1)^k c_{1k} = \lambda \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \frac{h^{(k-j)}(1)}{(k-j)!} (-1)^j \frac{c_{1j}}{[k(k + \sqrt{1 + \lambda/\beta})]},$$

$k = 1, 2, \dots$, $c_{10} = 1$. В силу предположения (8), по индукции находим, что

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \frac{h^{(k-j)}(1)}{(k-j)!} (-1)^j c_{1j} \leq -h'(1) s_{k-1}$$

(заметим, что $h'(1) = -\frac{2}{3} [f'''(1)/(f''(1))^2] < 0$). Поэтому при $\lambda < 0$

$$(-1)^k c_{1k} \geq -\lambda h'(1) s_{k-1} \left[k \left(k + \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} \right) \right]$$

и, значит,

$$s_k \geq s_{k-1} \left[1 - \frac{\lambda h'(1)}{k(k + \sqrt{1 + \lambda/\beta})} \right] \geq s_{k-1} \left[1 + \frac{\beta h'(1)}{k^2} \right]$$

при $k \geq 1$ ($s_0 = 1$).

Таким образом, при $\lambda < 0$

$$1 + u_1(\lambda; 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\beta h'(1)}{k^2} \right] > 0$$

в силу предположения (9).

2. Вспомогательные утверждения. Определитель Вронского $w = w(\lambda)$ системы (4) не зависит от s ([6, гл. 3, § 2]), и, вычисляя его при $s \uparrow 1$, находим

$$w = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}}.$$

Методом вариации постоянных ([6, гл. 3, § 3]) находится частное решение уравнения (2). Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{F}(\lambda; s) = & \frac{y_1(\lambda; s)}{w} \int_0^s \frac{y_2(\lambda; x)}{f(x)} x^n dx - \frac{y_2(\lambda; x)}{w} \int_0^s \frac{y_1(\lambda; x)}{f(x)} x^n dx \\ & + c_1 y_1(\lambda; s) + c_2 y_2(\lambda; s), \end{aligned} \quad (10)$$

где $c_1 = c_1(\lambda)$, $c_2 = c_2(\lambda)$ есть постоянные (по s). Переход к пределу при $s \uparrow 1$ дает уравнение

$$\tilde{c}_2(\lambda) = \int_0^1 \frac{y_1(\lambda; s)}{f(s)} s^n ds, \quad (11)$$

где

$$\tilde{c}_2(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} c_2(\lambda).$$

Лемма 1. *Определенные в (5)*

$$c_{ik} = c_{ik}(\lambda), \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

регулярны в круге $|\lambda| < \beta$ и непрерывны в замкнутом круге $|\lambda| \leq \beta$.

Лемма 2. *Для любого $r < R$ найдется такая постоянная $D > 0$, что*

$$\max_{|\lambda| \leq \beta} |c_{ik}(\lambda)| \leq D r^{-k}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Лемма 3. *Для любого заданного $r < R$ и некоторой постоянной $D' > 0$*

$$\max_{|\lambda| \leq \beta} \left| \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} c'_{ik}(\lambda) \right| \leq D' r^{-k}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Кроме того, существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\beta} \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} c'_{ik}(\lambda) \right) = c_{ik}^*.$$

Лемма 4. *При каждом фиксированном $s \in K$: $|s - 1| < R$ функции $u_i(\lambda; s)$, $i = 1, 2$, все их производные по s , а также функция $\tilde{c}_2(\lambda) - 1/\lambda$ как функции от λ регулярны в круге $|\lambda| < \beta$ и непрерывны вплоть до его границы.*

Лемма 5. *При каждом фиксированном s ($|s - 1| < R$) для любого $j = 0, 1, 2, \dots$ существуют пределы*

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow -\beta} \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial^j u_i(\lambda; s)}{\partial s^j} \right) \\ &= \sum_{k \geq j} k(k-1) \dots (k-j+1) c_{ik}^* (s-1)^k, \quad i = 1, 2, \dots, \\ & \lim_{\lambda \rightarrow -\beta} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} \tilde{c}'_2(\lambda) = \tilde{c}_2^* \end{aligned}$$

($\tilde{c}_2^*$ вычисляется ниже).

Перейдем к доказательству лемм 1–5.

Доказательство леммы 1 немедленно получается по индукции из соотношений (5).

Доказательство леммы 2. Определим

$$C_{ik} = \max_{|\lambda| \leq \beta} |c_{ik}(\lambda)|.$$

Так как ряд

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(1)}{k!} (s-1)^k$$

сходится в круге $|s-1| < R$, то

$$\frac{|h^{(k)}(1)|}{k!} \leq M r^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

для некоторой константы $M > 0$ и любого заданного $r < R$. Тогда в силу соотношений (5)

$$C_{ik} \leq \beta M \sum_{j=0}^{k-1} r^{j-k} \frac{C_{ij}}{[k(k-\sqrt{2})]}, \quad i = 1, 2, \quad k \geq 2. \quad (12)$$

Выберем k_0 так, чтобы

$$\frac{\beta M}{k_0 - \sqrt{2}} \leq 1.$$

Подберем $D > 0$ таким, чтобы

$$C_{ik} \leq D r^{-k} \quad \text{для} \quad k \leq k_0, \quad i = 1, 2.$$

Рассуждая по индукции при $k > k_0$, из (12) получим

$$C_{ik} \leq \frac{\beta M}{k - \sqrt{2}} \sum_{j=0}^{k-1} r^{j-k} D r^{-j} \frac{1}{k} \leq D r^{-k},$$

и лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Дифференцируя соотношения (5), выводим равенства для $\sqrt{1 + \lambda/\beta} c'_{ik}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} c'_{ik}(\lambda) &= c_{ik}(\lambda) \left[\frac{\sqrt{1 + \lambda/\beta}}{\lambda} \mp \frac{1}{2\beta} \frac{1}{k \pm \sqrt{1 + \lambda/\beta}} \right] \\ &+ \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \frac{h^{(k-j)}(1)}{(k-j)!} \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} c'_{ij}(\lambda) \right) \left[k \left(k \pm \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} \right) \right]^{-1}, \quad (13) \end{aligned}$$

$i = 1, 2, k = 1, 2, \dots$ (верхние знаки соответствуют $i = 1$, а нижние — $i = 2$). Теперь, используя результат леммы 2 и применяя аналогичные рассуждения, получим первое из доказываемых утверждений. Из (13) по индукции следует, что существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\beta} \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} c'_{ik}(\lambda) \right) = c_{ik}^*, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (c_{i0}^* = 0),$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$c_{ik}^* = -\beta \sum_{j=0}^{k-1} \frac{h^{(k-j)}(1)}{(k-j)!} \frac{c_{ij}^*}{k^2} \mp \frac{1}{2\beta} \frac{c_{ik}(-\beta)}{k}. \quad (14)$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 4. При каждом фиксированном $s \in K$: $|s - 1| < R$ ряды

$$u_i(\lambda; s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}(\lambda) (s - 1)^k$$

как функции от λ сходятся равномерно на всем замкнутом круге $|\lambda| \leq \beta$ (по лемме 2) и, следовательно, являются непрерывными в этом круге, а также, в силу первой теоремы Вейерштрасса ([7, гл. II, § 12]), регулярны в круге $|\lambda| < \beta$.

Чтобы доказать утверждение относительно функции $\tilde{c}_2(\lambda)$, запишем ее в виде ряда. Имеем:

$$s^n h(s) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j (1 - s)^j,$$

где ряд сходится в круге $|s - 1| < R$ и, следовательно, сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Используя интегральное представление (11), получаем

$$\tilde{c}_2(\lambda) = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_{1k} A_j}{k + j + \alpha_1 - 1}. \quad (15)$$

Так как $A_0 = h(1) = 1/(4\beta)$ и $\alpha_1 - 1 \sim \lambda/(4\beta)$ при $\lambda \rightarrow 0$, то слагаемое в (15), соответствующее $k = j = 0$, даст главный член: $\tilde{c}_2(\lambda) \sim 1/\lambda$, $\lambda \rightarrow 0$. Все другие слагаемые ($k + j \geq 1$), в силу леммы 1, регулярны в круге $|\lambda| < \beta$ и непрерывны вплоть до его границы.

Осталось заметить, что ряд (15) сходится равномерно при $|\lambda| \leq \beta$. В самом деле, $|A_j| \leq Lr^{-j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$,

$$|c_{1k}(\lambda)| \leq Dr^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad |k + j + \alpha_1 - 1| \geq \frac{1}{2}$$

для всех $|\lambda| \leq \beta$, $k + j \geq 1$. Поэтому

$$\left| \frac{(-1)^k c_{1k} A_j}{k + j + \alpha_1 - 1} \right| \leq 2DLr^{-k-j}, \quad |\lambda| \leq \beta,$$

причем ряд

$$\sum_{k+j \geq 1} r^{-k-j} = \sum_{m=1}^{\infty} mr^{-m}$$

сходится.

Лемма 4 полностью доказана.

Доказательство леммы 5. По второй теореме Вейерштрасса ([7, гл. II, § 12])

$$\frac{\partial u_i(\lambda; s)}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} c'_{ik}(\lambda)(s-1)^k, \quad i = 1, 2,$$

и в силу леммы 3 по принципу мажорируемой сходимости

$$\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} \frac{\partial u_i(\lambda; s)}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} c'_{ik}(\lambda)(s-1)^k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c^*_{ik}(s-1)^k$$

при $\lambda \rightarrow -\beta$. Из (15) нетрудно получить

$$\tilde{c}_2^* = \sum_{k,j=0}^{\infty} A_j \left[\frac{(-1)^k c^*_{1k}}{k+j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\beta} \frac{(-1)^k c_{1k}(-\beta)}{(k+j-\frac{1}{2})^2} \right]. \quad (16)$$

Лемма 5 доказана.

3. Доказательства основных теорем.

Доказательство теоремы 1 использует тот же способ аналитического продолжения функции

$$\hat{Q}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q(t) dt$$

в точку $\lambda = 0$, что и доказательство теоремы 2. Здесь нужно только отметить, что $\eta(0) = 0$ и, согласно [7, гл. II, § 6], $\pi(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ регулярны в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Доказательство теоремы 2. Докажем, что функцию $\hat{Q}(\lambda)$ (соответственно, $\pi(\lambda)$) при определенных выше условиях можно аналитически продолжить вдоль вещественной оси вплоть до точки $\lambda = -\beta$ и, следовательно, на всю полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > -\beta$.

Используя (6), находим

$$\begin{aligned} \hat{P}_{n0}(\lambda) &= \hat{F}(\lambda; 0) = c_1 [1 + u_1(\lambda; 0)] + c_2 [1 + u_2(\lambda; 0)], \\ \hat{P}_{n1}(\lambda) &= \frac{\partial \hat{F}}{\partial s}(\lambda; 0) = c_1 \left\{ -\alpha_1 [1 + u_1(\lambda; 0)] + \frac{\partial u_1}{\partial s}(\lambda; 0) \right\} \\ &\quad + c_2 \left\{ -\alpha_2 [1 + u_2(\lambda; 0)] + \frac{\partial u_2}{\partial s}(\lambda; 0) \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\hat{Q}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \hat{P}_{n0}(\lambda) - \hat{P}_{n1}(\lambda) = \pi(\lambda) \eta(\lambda) + \zeta(\lambda), \quad (17)$$

где

$$\eta(\lambda) = \alpha_2(\lambda) + \frac{(\partial u_1 / \partial s)(\lambda; 0)}{1 + u_1(\lambda; 0)},$$

$$\zeta(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{q_{n0}}{\lambda} \eta(\lambda) - \frac{\tilde{c}_2(\lambda)}{1 + u_1(\lambda; 0)}.$$

Функции $\eta(\lambda)$, $\zeta(\lambda)$ в силу леммы 4 регулярны в круге $|\lambda| < \beta$ за исключением, быть может, точек, где $1 + u_1(\lambda; 0) = 0$.

Не нарушая общности, можно взять в условии $A = 1$, т.е. считать, что

$$\mu = \max_{-\beta \leq \lambda \leq 0} \eta(\lambda) < 1.$$

В общем случае, от уравнения (17) следует перейти к уравнению

$$\frac{\widehat{Q}(\lambda)}{A} = \frac{\eta(\lambda)}{A} \pi(\lambda) + \frac{\zeta(\lambda)}{A}.$$

Если $1 + u_1(\lambda; 0) \neq 0$ на $[-\beta; 0]$, то $1 + u_1(\lambda; 0) \neq 0$ в некоторой окрестности этого отрезка. То есть существует такое $a > 0$, что для любого $\lambda_0 \in [-\beta; 0]$ выполнено $1 + u_1(\lambda; 0) \neq 0$ при $|\lambda - \lambda_0| < a$ (в пределах круга $|\lambda| \leq \beta$).

Пусть $\widehat{Q}(\lambda)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > -\delta$ ($0 \leq \delta < \beta$). Покажем, что она допускает аналитическое продолжение в точку $\lambda = -\delta$.

Возьмем $\varepsilon < \delta$. Приравнявая коэффициенты разложения по степеням $\lambda + \varepsilon$ (обозначения очевидны) правой и левой частей равенства (17), находим

$$\rho_k^{(\varepsilon)} = \sum_{j=0}^k \pi_j^{(\varepsilon)} \eta_{k-j}^{(\varepsilon)} + \zeta_k^{(\varepsilon)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Так как

$$(-1)^k \rho_k^{(\varepsilon)} \geq (-1)^k \pi_k^{(\varepsilon)}, \quad \eta_0^{(\varepsilon)} = \eta(-\varepsilon) \leq \mu,$$

то

$$|\rho_k^{(\varepsilon)} - \eta(-\varepsilon) \pi_k^{(\varepsilon)}| \geq |\rho_k^{(\varepsilon)}| (1 - \mu),$$

и из (10) получаем

$$(1 - \mu) |\rho_0^{(\varepsilon)}| \leq |\zeta_0^{(\varepsilon)}|,$$

$$(1 - \mu) |\rho_k^{(\varepsilon)}| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\rho_j^{(\varepsilon)}| |\eta_{k-j}^{(\varepsilon)}| + |\zeta_k^{(\varepsilon)}|, \quad k \geq 1.$$

Пусть $\delta - \varepsilon < a/2$. Имеем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j^{(\varepsilon)}| |\delta - \varepsilon|^j \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k^{(\delta)}| [2(\delta - \varepsilon)]^k < 1 - \mu$$

для ε , достаточно близкого к δ . Здесь $\eta_k^{(\delta)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — коэффициенты разложения $\eta(\lambda)$ по степеням $\lambda + \delta$. Следовательно, для некоторого $\Delta > 0$ ($\delta + \Delta \leq \beta$, $\delta - \varepsilon + \Delta \leq a$)

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j^{(\varepsilon)}| (\delta - \varepsilon + \Delta)^j \leq 1 - \mu. \quad (19)$$

Построим мажорантный ряд $\rho_0^*, \rho_1^*, \dots$, исходя из равенств

$$(1 - \mu) \rho_0^* = |\zeta_0^{(\varepsilon)}|,$$

$$(1 - \mu) \rho_k^* = \sum_{j=0}^{k-1} \rho_j^* |\eta_{k-j}^{(\varepsilon)}| + |\zeta_k^{(\varepsilon)}|, \quad k \geq 1.$$

В силу (19) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^* (\lambda + \varepsilon)^k = \sum_{j=0}^{\infty} |\zeta_j^{(\varepsilon)}| (\lambda + \varepsilon)^j \left[1 - \left(\mu + \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j^{(\varepsilon)}| (\lambda + \varepsilon)^j \right) \right]^{-1}$$

сходится в круге $|\lambda + \varepsilon| < \delta - \varepsilon + \Delta$, а так как $|\rho_k^{(\varepsilon)}| \leq \rho_k^*$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то там же сходится и ряд

$$\widehat{Q}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^{(\varepsilon)} (\lambda + \varepsilon)^k,$$

и точка $\lambda = -\delta$ не является особой для $\widehat{Q}(\lambda)$.

Таким образом, на интервале $(-\beta, 0]$ нет особых точек функции $\widehat{Q}(\lambda)$, и она регулярна на всей полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > -\beta$.

Рассмотрим функцию $\theta(\lambda) = \pi(\lambda)/\widehat{Q}(\lambda)$, определенную на интервале $(-\beta, 0]$. Имеем: $0 \leq \theta(\lambda) \leq 1/A$. Соотношение (17) можно переписать в виде

$$\widehat{Q}(\lambda) = \frac{\zeta(\lambda)}{1 - \theta(\lambda)\eta(\lambda)}.$$

При $\lambda \leq 0$ выполняется неравенство $1 - \theta(\lambda)\eta(\lambda) \geq 1 - \mu/A > 0$. Следовательно, $\zeta(\lambda) > 0$ при $\lambda \leq 0$, и, так как $\zeta(-\beta) < \infty$ ($\zeta(\lambda)$ непрерывна на отрезке $[-\beta, 0]$), то

$$\widehat{Q}(-\beta) \leq \frac{\zeta(-\beta)}{1 - \mu/A} < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $R = 1 + a$. В рассматриваемом случае $\beta = NR/4$,

$$(-1)^k \frac{h^{(k)}(1)}{k!} = MR^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $M = 1/(NR)$. В силу соотношений (5)

$$(-1)^k c_{1k}(\lambda) R^k = \frac{\lambda M \sigma_{k-1}(\lambda)}{k^2} \quad \text{при } k \geq 1, \quad (20)$$

где

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{j=0}^k (-1)^j c_{1j}(\lambda) R^j, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\sigma_k(\lambda) = \sigma_{k-1}(\lambda) \left(1 + \frac{\lambda M}{k^2}\right), \quad k \geq 1. \quad (21)$$

При $\lambda < 0$ из (20) и (21) по индукции легко получаются неравенства

$$\frac{\lambda M}{k^2} < (-1)^k c_{1k}(\lambda) R^k < \frac{\lambda M d}{k^2}, \quad k \geq 1, \quad (22)$$

где $d = 1 - \beta M \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$. Отсюда сразу следует условие (C_1) теоремы 2

$$1 + u_1(\lambda; 0) \geq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{1k}(\lambda) R^k > 1 - \beta M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = d > 0$$

(здесь учитываем, что $\beta M = \frac{1}{4}$).

Так как $p_1/p_0 = 1/a - 2$, то в силу замечания 2 для проверки условия (C_2) достаточно показать, что

$$\frac{(\partial u_1 / \partial s)(\lambda; 0)}{1 + u_1(\lambda; 0)} \leq \frac{1}{R-1} - \frac{3}{2} \quad \text{для } \lambda < 0. \quad (23)$$

Так как при $\lambda < 0$

$$1 + u_1(\lambda; 0) > d = 1 - \frac{\pi^2}{24} > \frac{7}{12},$$

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\partial u_1}{\partial s}(\lambda; 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k c_{1k}(\lambda) \\ &\leq \beta M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{-k}}{k} = -\frac{1}{4} \log(1 - R^{-1}), \end{aligned} \quad (24)$$

то для (23), в свою очередь, достаточно показать, что

$$-\frac{1}{4} \log(1 - R^{-1}) \leq \frac{7}{12} \left(\frac{1}{R-1} - \frac{3}{2} \right)$$

для всех $1 < R \leq \frac{3}{2}$.

Последнее неравенство проверяется при $R = \frac{3}{2}$, и далее замечается, что разность правой и левой частей этого неравенства есть неубывающая функция от R .

Таким образом, по теореме 2 будем иметь

$$\int_0^{\infty} e^{\beta t} Q(t) dt < \infty,$$

и первая часть теоремы доказана.

Из уравнения (17) получим

$$\hat{Q}'(\lambda) = \frac{\pi(\lambda)\eta'(\lambda) + \zeta'(\lambda)}{1 - \theta_1(\lambda)\eta(\lambda)}, \quad (25)$$

где $\theta_1(\lambda) = \pi'(\lambda)/\hat{Q}'(\lambda)$, $\lambda > -\beta$. Из леммы 5 следует существование

$$\begin{aligned} \eta^* &= \lim_{\lambda \rightarrow -\beta} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} \eta'(\lambda) = -\frac{1}{4\beta} \\ &\quad + \frac{[1 + u_1(-\beta; 0)] \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k c_{1k}^* - (\partial u_1 / \partial s)(-\beta; 0) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_{1k}^*}{[1 + u_1(-\beta; 0)]^2}, \\ \zeta^* &= \lim_{\lambda \rightarrow -\beta} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\beta}} \zeta'(\lambda) = \frac{q_{n0}}{\beta} \eta^* \\ &\quad - \frac{[1 + u_1(-\beta; 0)] \tilde{c}_2^* - \tilde{c}_2(-\beta) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_{1k}^*}{[1 + u_1(-\beta; 0)]^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для доказательства второй части теоремы достаточно будет показать, что

$$\pi(-\beta)\eta^* + \zeta^* < 0 \quad (27)$$

для всех $1 < R \leq \frac{3}{2}$.

Пусть

$$\sigma_0^* = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_k^* = \sum_{j=1}^k (-1)^j c_{1j}^* R^j, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из (14) получаем

$$(-1)^k c_{1k}^* R^k = -\frac{\beta M \sigma_{k-1}^*}{k^2} - \frac{1}{2\beta} \frac{(-1)^k c_{1k}^* (-\beta) R^k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда и из (22) можно вывести следующие неравенства:

$$-\frac{M d_1}{8k^2} \leq (-1)^k c_{1k}^* R^k \leq \frac{M}{2k^3}, \quad (28)$$

где $d_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$. Согласно замечанию 2

$$Q(t) \geq \left(1 + \frac{p_1}{p_0}\right) [q_{n0} - P_{n0}(t)] = \left(\frac{1}{a} - 1\right) [q_{n0} - P_{n0}(t)].$$

Полагая $t = 0$, находим, что

$$q_{n0} \leq \frac{a}{1-a}, \quad (29)$$

и, далее, $\pi(\lambda) \leq [a/(1-a)] \widehat{Q}(\lambda)$, т.е.

$$\theta(\lambda) = \frac{\pi(\lambda)}{\widehat{Q}(\lambda)} \leq \frac{a}{1-a} \quad (30)$$

для всех $\lambda \geq -\beta$, а также

$$\theta_1(\lambda) = \frac{\pi'(\lambda)}{\widehat{Q}'(\lambda)} \leq \frac{a}{1-a}. \quad (31)$$

Проведем все вычисления, приводящие к (27), полагая $a \rightarrow 0$ ($R \rightarrow 1$). Из соотношений (5), (14) легко следует, что при $R \rightarrow 1$

$$(-1)^k c_{1k}(-\beta) \rightarrow \gamma_k, \quad (-1)^k c_{1k}^* \rightarrow \gamma_k^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где γ_k, γ_k^* удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma_k &= -\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j}{k^2} \\ \gamma_k^* &= -\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j^*}{k^2} - \frac{2}{N} \frac{\gamma_k}{k} \quad (\gamma_0 = 1, \gamma_0^* = 1). \end{aligned}$$

А из неравенств (22), (28) сразу получим

$$-\frac{1}{4k^2} \leq \gamma_k \leq -\frac{d}{4k^2}, \quad -\frac{d_1}{8Nk^2} \leq \gamma_k^* \leq \frac{1}{2Nk^3}. \quad (32)$$

В силу этих неравенств по принципу мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned} 1 + u_1(-\beta; 0) &\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k > 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_{1k}^* &\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^* > 0 \end{aligned}$$

(здесь и далее все предельные переходы и асимптотические оценки проводятся при $R \rightarrow 1$). Из неравенств (22), (28) видим, что величины

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}(-\beta; 0), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k c_{1k}^*$$

являются $O(\log(1 - R^{-1}))$. Это доказывает, что

$$\eta(-\beta) = O(\log(1 - R^{-1})), \quad (33)$$

а также

$$\eta^* = O(\log(1 - R^{-1})). \quad (34)$$

Чтобы оценить $\tilde{c}_2(-\beta)$, $\tilde{c}_2^*$ и, соответственно, ζ^* при $R \rightarrow 1$, положим $n = 2$ (для наших целей это несущественное предположение, поскольку для заданной производящей функции $f(s)$ вероятности $Q(t)$, отвечающие различным значениям $Z(0)$, имеют одинаковые асимптотические свойства при $t \rightarrow \infty$).

Напомним, что коэффициенты A_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, определяются из соотношений

$$s^n h(s) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j (1-s)^j.$$

В случае $n = 2$ вычисляются

$$A_0 = \frac{1}{R}, \quad A_1 = \frac{a^2}{R^2} - 1 \quad \text{и} \quad A_j = \frac{a^2}{R^{j+1}} \quad \text{при} \quad j \geq 2.$$

Имеем:

$$\tilde{c}_2(-\beta) = \sum_{k,j=0}^{\infty} A_j \frac{(-1)^k c_{1k}(-\beta)}{k+j-\frac{1}{2}} = S_1 + S_2,$$

где S_1 отвечает $k \geq 0$, $j = 0, 1$, а

$$S_2 = \sum_{k \geq 0, j \geq 2} A_j \frac{(-1)^k c_{1k}(-\beta)}{k+j-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{1k}(-\beta) \sum_{j \geq 2} \frac{A_j}{k+j-\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$\sum_{j \geq 2} \frac{A_j}{k+j-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{R^2} \sum_{j \geq 2} \frac{R^{-j+1}}{k+j-\frac{1}{2}} < \frac{a^2}{R^2} \sum_{j \geq 2} \frac{R^{-j+1}}{j-1} = -\frac{a^2}{R^2} \log(1-R^{-1}),$$

то

$$|S_2| \leq -\frac{a^2}{R^2} \log(1-R^{-1}) \left(1 + \beta M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)$$

(учитываются неравенства (22)). Это означает, что $S_2 = o(1)$. Так как $A_0 \rightarrow 1$, $A_1 \rightarrow -1$, то

$$S_1 = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ j=0,1}} A_j \frac{(-1)^k c_{1k}(-\beta)}{k+j-\frac{1}{2}} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k-\frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+\frac{1}{2}} < 0. \quad (35)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2^* &= \sum_{k,j=0}^{\infty} A_j \left[\frac{(-1)^k c_{1k}^*}{k+j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\beta} \frac{(-1)^k c_{1k}(-\beta)}{(k+j-\frac{1}{2})^2} \right] \\ &\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\gamma_k^*}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\beta} \frac{\gamma_k}{(k-\frac{1}{2})^2} \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\gamma_k^*}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\beta} \frac{\gamma_k}{(k+\frac{1}{2})^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left[\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^*}{k^2 - \frac{1}{4}} > 0, \end{aligned} \quad (36)$$

поскольку положительны обе последние суммы (согласно неравенствам (32)).

Так как

$$\frac{q_{n0}}{\beta} \eta^* = o(1)$$

(согласно (29) и (34)), то, исходя из выражения (26) для ζ^* , учитывая предельные соотношения (35) и (36), получаем, что ζ^* имеет при $R \rightarrow 1$ строго отрицательный предел.

Покажем теперь, что

$$\pi(-\beta) \eta^* = o(1).$$

В самом деле, из (29), (30) и (33) нетрудно видеть, что величины

$$\frac{q_{n0}}{\beta} \eta(-\beta) \quad \text{и} \quad \theta(-\beta) \eta(-\beta)$$

являются $o(1)$. Следовательно, $\zeta(-\beta)$ и

$$\hat{Q}(-\beta) = \frac{\zeta(-\beta)}{1 - \theta(-\beta) \eta(-\beta)}$$

есть $O(1)$, и это дает $\pi(-\beta) = O(R - 1)$. Из последнего соотношения находим, что $\pi(-\beta) \eta^* = o(1)$.

Таким образом, (27) фактически доказано для значений R , достаточно близких к 1. Более точные прямые вычисления, использующие неравенства (29), (30), (31), а также (22) и (28), позволяют установить (27) для всех $1 < R \leq \frac{3}{2}$.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы со взаимодействием частиц. — В сб.: Третья Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. Т. II. Вильнюс: Ин-т матем. и кибернет. АН ЛитССР, 1981, с. 139–140.
2. Калинин А. В. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1983, 98 с.
3. Севастьянов Б. А., Калинин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 2, с. 306–308.
4. Калинин А. В. Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 1, с. 192–197.
5. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
6. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981, 381 с.
7. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982, 488 с.

Поступила в редакцию

23.III.1994