Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Егишянц, Е. И. Островский, Локальные и глобальные
верхние функции для случайных полей, *Теория вероятн. и
ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 755–764

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:10:54

© 1996 г. *ЕГИШЯНЦ С. А., ОСТРОВСКИЙ Е. И.****ЛОКАЛЬНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ ВЕРХНИЕ ФУНКЦИИ
ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ**

Для произвольных, т.е. необязательно гауссовских случайных полей, вводятся и вычисляются локальные и глобальные верхние функции. На рассматриваемое поле налагается только условие Крамера. Несмотря на такую общность, на примерах показано, что результаты точны и для гауссовских полей, изученных ранее. Описаны также возможные приложения.

Ключевые слова и фразы: случайное поле, локальные и глобальные модули непрерывности, преобразование Юнга–Фенхеля, метрическая энтропия, экспоненциальная оценка.

1. Введение. Пусть $\xi(t)$ — сепарабельное центрированное случайное поле, определенное на некотором, помимо вероятностного, метрическом пространстве (T, d) , $t \in T$. Глобальные и локальные модули непрерывности $\xi(t)$ вводятся, как обычно, формулами

$$\Delta(h) = \sup \left\{ |\xi(t) - \xi(s)|, t, s: d(t, s) \leq h \right\}, \quad h > 0,$$

$$\omega(h) = \sup \left\{ |\xi(t) - \xi(t_0)|, t: d(t, t_0) \leq h \right\}, \quad t_0 \in T.$$

Неслучайная функция $f(h)$, $f(h) > 0$, называется глобальной верхней функцией для $\xi(t)$, если для некоторой константы $C_1 > 0$ с вероятностью 1 выполнено неравенство $\limsup_{h \rightarrow 0+} (\Delta(h)/f(h)) \leq C_1$. Аналогично, неслучайная функция $g(h)$, $g(h) > 0$, называется локальной верхней функцией, если $\limsup_{h \rightarrow 0+} (\omega(h)/g(h)) \leq C_2$.

Задача отыскания верхних функций для случайных процессов и полей является классической. Достаточно вспомнить законы повторного логарифма для винеровского процесса или поля [1, с. 224], для сумм независимых случайных величин [2, с. 358], для гауссовских процессов и полей [3] и др. Из последних результатов, относящихся к гауссовскому случаю, отметим работу Альбина [4], из результатов для негауссовских полей — работы Дмитровского [5], Ферника [6].

Цель статьи — вычисление функций $f(h)$ и $g(h)$ для полей, удовлетворяющих только условию Крамера. Полученные результаты для

*Обнинский институт атомной энергии, Студгородок, 1, 249020 Обнинск, Россия.

гауссовских полей $\xi(t)$ совпадают с известными, для негауссовских уточняют [5] и [6]; в частности, в [5] функция $f(h)$ не совпадает с наилучшей для винеровского процесса, в [6] $f(h)$ не точна для гауссовского стационарного процесса.

Параллельно получаются полезные в приложениях экспоненциальные оценки вероятностей вида

$$P_G(u) = \mathbf{P} \left\{ \sup_{h>0} \frac{\Delta(h)}{f(h)} > u \right\}, \quad P_L(u) = \mathbf{P} \left\{ \sup_{h>0} \frac{\omega(h)}{g(h)} > u \right\}.$$

Введем необходимые обозначения. Положим

$$\varphi(\lambda) = \sup_{t \in T} \log \mathbf{E} \exp \lambda \xi(t).$$

Предполагается, что $\varphi(\lambda) < \infty$, $\lambda \in \mathbf{R}^1$, и что $\lim \varphi(\lambda)/\lambda = \infty$, $|\lambda| \rightarrow \infty$. С помощью $\varphi(\lambda)$ вводится, согласно [7], банахово пространство случайных величин $B(\varphi)$. Напомним для удобства читателя, что норма в $B(\varphi)$ определяется формулой

$$\|\xi\| = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\log \mathbf{E} \exp \lambda \xi)}{|\lambda|},$$

так что $\mathbf{E} \exp \lambda \xi \leq \exp \varphi(\lambda \|\xi\|)$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}^1$. Отметим, что в дальнейшем можно вместо функции $\varphi(\lambda)$ брать любую ее четную выпуклую мажоранту, монотонно возрастающую при $\lambda > 0$, равную нулю при $\lambda = 0$. Преобразование Юнга–Фенхеля функции $\varphi(\lambda)$ обозначим через $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}^1} (\lambda x - \varphi(\lambda)).$$

Определим также $\chi(x) = \varphi^{-1}(x)$ — обратную функцию к $\varphi(x)$ при $x \geq 0$. Естественную метрику $d(t, s)$ на множестве T определим выражением $d(t, s) = \|\xi(t) - \xi(s)\|$. Наименьшее число d -шаров радиуса $\varepsilon > 0$, покрывающих некоторое подмножество S пространства T , $S \subset T$, обозначим $N(S, d, \varepsilon) = N(S, \varepsilon)$. Энтропией S называется логарифм N :

$$\mathcal{H}(S, \varepsilon) = \log N(S, \varepsilon).$$

Пусть $B(s_0, \delta) = \{t: t \in T, d(t, s_0) \leq \delta\}$ — d -шар радиуса δ с центром в точке s_0 . Поле $\xi(t)$ называется (локально) однородным в фиксированной точке t_0 , $t_0 \in T$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{H}_1(\varepsilon) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}(B(t_0, \delta), \delta \varepsilon) < \infty. \quad (1)$$

Поле $\xi(t)$ называется (локально) однородным на всем множестве T , если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{H}_2(\varepsilon) = \sup_{t_0 \in T} \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}(B(t_0, \delta), \delta \varepsilon) < \infty. \quad (2)$$

Если T — ограниченное выпуклое подмножество $\mathbf{R}^k$ и $d(t, s) \sim |t - s|^\alpha$, $t - s \rightarrow 0$, $\alpha > 0$, то оба условия (1) и (2) выполнены.

2. Локальные верхние функции. Положим

$$M_1 = \int_0^1 \frac{\mathcal{H}_1(x)}{\chi(H_1(x))} dx. \quad (3)$$

Сходимость интеграла (3) есть достаточное условие непрерывности $\xi(t)$ в некоторой d -окрестности точки t_0 [7].

Теорема 1. Пусть поле $\xi(t)$ локально однородно в точке t_0 , $t_0 \in T$, и сходится интеграл (3). Положим $g(h) = h\psi^{-1}(\log(\log(1/h) + e))$. Тогда с вероятностью 1

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\omega(h)}{g(h)} \leq 1. \quad (4)$$

При этом

$$P_L(u) = \mathbf{P} \left\{ \sup_{h \in (0,1)} \frac{\omega(h)}{g(h)} > u \right\} \leq C_5 e^{-\psi(C_4 u)}. \quad (5)$$

Здесь и далее C_i — константы, не зависящие от u , $u \geq u_0 > 0$.

Доказательство сходно с выводом закона повторного логарифма для винеровского процесса. Пусть a — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Положим

$$\begin{aligned} T(n) &= \{t: t \in T, a^{n+1} \leq d(t, t_0) < a^n\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ B(n) &= B(t_0, a^n), \quad \eta_n(t) = a^{-n}(\xi(t) - \xi(t_0)), \\ P_n(u) &= \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in T(n)} |\eta_n(t)| > ua\psi^{-1}(\log(\log a^{-n} + e)) \right\}, \\ d_n(t, s) &= \|\eta_n(t) - \eta_n(s)\|, \quad t, s \in T(n), \\ K(n) &= \int_0^1 \frac{\mathcal{H}(T(n), d_n, x)}{\chi(\mathcal{H}(T(n), d_n, x))} dx. \end{aligned}$$

В силу локальной однородности $\xi(t)$ в точке t_0

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(T(n), d_n, \varepsilon) &= \mathcal{H}(T(n), da^{-n}, \varepsilon) \leq \mathcal{H}(B(n), da^{-n}, \varepsilon) \\ &= \mathcal{H}(B(n), d, \varepsilon a^n) = \mathcal{H}(B(t_0, a^n), d, \varepsilon a^n) \leq \mathcal{H}_1(\varepsilon). \end{aligned}$$

Поэтому

$$K(n) \leq \int_0^1 \frac{H_1(x)}{\chi(H_1(x))} dx = M_1 < \infty.$$

Так как $\|\eta_n(t)\| \leq 1$, $t \in T(n)$, то для оценки вероятности $P_n(u)$ можно применить неравенство Дмитровского (см. [5], [7]): при условии, что

$au\psi^{-1}(\log(\log a^{-n} + e)) \geq C_6$, $C_6 = C_6(\varphi)$, имеем:

$$P_n(u) \leq 2 \exp \left\{ -\psi \left(v \left(1 - \frac{2\sqrt{2M_1}}{\sqrt{v}} \right) \right) \right\},$$

где $v = au\psi^{-1}(\log(\log a^{-n} + e))$, или (обозначая через $A_n(u)$ величину $1 - 2\sqrt{2M_1}/\sqrt{au\psi^{-1}(\log(\log a^{-n} + e))}$):

$$P_n(u) \leq 2 \exp \left\{ -\psi [A_n(u) au\psi^{-1}(\log(\log a^{-n} + e))] \right\}. \quad (6)$$

Далее доказательство разветвляется; докажем сначала (4). Так как $\psi(x)$ — выпуклая функция, то для всех неотрицательных чисел α и β таких, что $\alpha + \beta = 1$, и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство $\psi(\alpha y_1 + \beta y_2) \leq \alpha \psi(y_1) + \beta \psi(y_2)$. В частности, если принять $y_1 = 0$, то, учитывая, что $\psi(0) = 0$, имеем: $\psi(\beta y_2) \leq \beta \psi(y_2)$; обозначая βy_2 через x и $1/\beta$ через γ , $\gamma \geq 1$, получим:

$$\psi(\gamma x) \geq \gamma \psi(x). \quad (7)$$

Учитывая (7), из (6) получаем при $A_n(u) au \geq 1$:

$$P_n(u) \leq 2 \exp \left\{ -A_n(u) au \log(\log a^{-n} + e) \right\} = 2(n \log a^{-1} + e)^{-A_n(u) au}.$$

Для доказательства достаточно установить, что для любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ с вероятностью 1 при всех достаточно больших n

$$\sup_{h \in [a^{n+1}, a^n]} \frac{\omega(h)}{g(h)} > 1 + \varepsilon. \quad (8)$$

Оценим вероятность события, противоположного (8):

$$\begin{aligned} Q_n(\varepsilon) &= P \left\{ \sup_{h \in [a^{n+1}, a^n]} \frac{\omega(h)}{h\psi^{-1}(\log(|\log h| + e))} > 1 + \varepsilon \right\} \\ &\leq P \left\{ \frac{\omega(a^n) a^{-n-1}}{\psi^{-1}(\log(\log a^{-n} + e))} > 1 + \varepsilon \right\} \\ &= P \left\{ \sup_{t \in T(n)} (\xi(t) - \xi(t_0)) a^{-n} > (1 + \varepsilon) a\psi^{-1}(\log(\log a^{-n} + e)) \right\} \\ &= P_n(1 + \varepsilon) \leq 2(n|\log a| + e)^{-A_n(\varepsilon)a(1+\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выбирая теперь $a = (1 + \varepsilon/4)^{-1}$ и n_0 так, чтобы выполнялось неравенство $A_n(1 + \varepsilon) > (1 + \varepsilon/4)^{-1}$, $n > n_0$, выводим из (9), что

$$Q_n(\varepsilon) \leq 2(n \log a^{-1} + e)^{-(1+\varepsilon)(1+\varepsilon/4)^{-2}},$$

откуда заключаем, что ряд $\sum_n Q_n(\varepsilon)$ сходится. Утверждение (8), а значит, и (4) следует теперь из леммы Бореля–Кантелли.

Докажем (5). Будем считать u достаточно большим: $u \geq u_0 > 0$; заметим, что при любых значениях величин u и v , больших 2, выполняется неравенство $\psi(uv) \geq \psi(u) + \psi(v)$. Учитывая также то, что для вогнутой функции $\psi^{-1}(x)$ справедливо неравенство: $\psi^{-1}(y) \geq \psi^{-1}(\gamma y)/\gamma$ при любых неотрицательных y и любых $\gamma > 1$, из оценки (6) получаем:

$$\begin{aligned} P_n(u) &\leq 2 \exp \left\{ -\psi \left(A_n(u) au \frac{\psi^{-1}(\gamma \log(\log a^{-n} + e))}{\gamma} \right) \right\} \\ &\leq 2 \exp \left\{ -\psi \left(\frac{A_n(u) au}{\gamma} \right) \right\} \exp \left\{ -\gamma \log(n |\log a| + e) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $A_n(u) \geq A(u) = 1 - 2\sqrt{2M_1}/\sqrt{au\psi^{-1}(1)}$ для всех $n \geq 0$, то

$$P_L(u) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) \leq 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n |\log a| + e)^{-\gamma} \right) \exp \left\{ -\psi \left(\frac{A(u) au}{\gamma} \right) \right\}.$$

Так как

$$A(u) \geq A = 1 - 2\sqrt{2M_1}/\sqrt{au_0\psi^{-1}(1)}$$

при $u \geq u_0$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n |\log a| + e)^{-\gamma}$ сходится, то, обозначая его сумму через $C_5/2$, а величину Aa/γ через C_4 , получаем (5).

З а м е ч а н и я и п р и м е р ы. Нетрудно убедиться, что для ви-неровского процесса или поля оценка сверху (4) дает точный результат. Очень простой пример — процесс $\xi(t) = \xi t$, где ξ — случайная величина из класса $B(\lambda^2/2)$, для которого $d(t, s) = |t - s|$,

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\xi(t)}{t \sqrt{\log |\log t|}} = 0,$$

— показывает, однако, что верхний предел в (4) может равняться нулю.

Пусть теперь $\xi(t)$ — гауссовское стационарное центрированное поле с ковариационной функцией вида

$$r(t) = 1 - \beta |t|^\alpha (1 + o(1)), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha \in (0, 2], \quad \beta > 0.$$

Здесь $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, $|t| = (\sum_{m=1}^k t_m^2)^{1/2}$. Тогда с вероятностью 1

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \frac{|\xi(t) - \xi(t_0)|}{|t - t_0|^{\alpha/2} \sqrt{\log |\log |t - t_0||}} \leq 2\sqrt{\beta}.$$

Если же $r(t)$ удовлетворяет условию

$$r(t) = 1 - \beta \log^{-(1+\alpha)} \left(\frac{1}{t} \right) (1 + o(1)), \quad \alpha, \beta > 0,$$

то

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \frac{|\xi(t) - \xi(t_0)|}{|\log t|^{-(1+\alpha)/2} \sqrt{\log \log |\log t|}} \leq 2\sqrt{\beta}.$$

Предположим теперь, что функция $\varphi(\lambda)$ имеет вид $\varphi(\lambda) = \lambda^p/p$, $\lambda > 1$, $p > 1$. Если выполнено условие

$$\int_0^1 \mathcal{H}^{1/q}(x) dx < \infty, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

то, по теореме 1,

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\omega(h)}{h \sqrt[q]{\log(|\log h| + e)}} \leq \sqrt[q]{q} \quad (\text{п.н.}),$$

и при этом $P_L(u) \leq C_5 \exp\{-C_4 u^q\}$, $u \geq u_0$.

В частности, если T — ограниченное выпуклое подмножество $\mathbf{R}^k$ и $d(t, s) \leq |t - s|^\alpha$, то

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \frac{|\xi(t) - \xi(t_0)|}{|t - t_0|^\alpha \sqrt[q]{\log(|\log |t - t_0|| + e)}} \leq \sqrt[q]{q} \quad (\text{п.н.}).$$

3. Глобальные верхние функции. Обозначим

$$M_2 = \int_0^1 \frac{\mathcal{H}_2(x)}{\chi(\mathcal{H}_2(x))} dx. \quad (10)$$

Сходимость интеграла (10) есть достаточное условие непрерывности $\xi(t)$ в метрике d на метрическом предкомпакте (T, d) [7].

Теорема 2. Пусть поле $\xi(t)$ локально однородно на множестве T и сходится интеграл (10), т.е. $M_2 < \infty$. Положим

$$f(h) = h\psi^{-1}\left(\mathcal{H}(T, h) + \log(|\log h| + e)\right).$$

Тогда с вероятностью 1

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\Delta(h)}{f(h)} \leq 4. \quad (11)$$

При этом

$$P_G(u) = \mathbf{P}\left\{\sup_{h \in (0;1)} \frac{\Delta(h)}{f(h)} > u\right\} \leq C_8 e^{-\psi(C_7 u)}. \quad (12)$$

Доказательство. Обозначим через $S(\varepsilon)$ любую из наименьших ε -сетей множества T ; число ее элементов равно $N(T, \varepsilon)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \sup_{t \in T} \sup_{s \in B(t, h)} |\xi(t) - \xi(s)| = \sup_{q \in S(h)} \sup_{t \in B(q, h)} \sup_{s \in B(t, h)} |\xi(t) - \xi(s)| \\ &\leq \sup_{q \in S(h)} \left\{ \sup_{t \in B(q, h)} |\xi(t) - \xi(q)| + \sup_{s \in B(t, h)} |\xi(s) - \xi(q)| \right\} \\ &\leq 2 \sup_{q \in S(h)} \sup_{t \in B(q, 2h)} |\xi(t) - \xi(q)|. \end{aligned}$$

Пусть теперь $h \in [a^{n+1}, a^n]$, где a , как и ранее, — произвольное число из интервала $(0, 1)$; тогда

$$\Delta(h) \leq \Delta(a^n) \leq 2 \sup_{q \in S(a^n)} \sup_{t \in B(q, 2a^n)} |\xi(t) - \xi(q)|.$$

Введем также обозначения: $\eta_n(t, q) = (\xi(t) - \xi(q)) a^{-n}/2$,

$$J(n) = \int_0^1 \frac{\mathcal{H}(B(q, 2a^n), d_{nq}, x)}{\chi(\mathcal{H}(B(q, 2a^n), d_{nq}, x))} dx,$$

$$P_n(u, q) = \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B(q, 2a^n)} |\eta_n(t)| > ua\psi^{-1}(\mathcal{H}(T, a^n) + \log(|\log a^n| + e)) \right\},$$

$$d_{nq} = d_{nq}(t, s) = \|\eta_n(t) - \eta_n(s)\|, \quad t, s \in B(q, 2a^n).$$

В силу локальной однородности поля $\xi(t)$ на множестве T для всех $q \in T$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(B(q, 2a^n), d_{nq}, \varepsilon) &= \mathcal{H}\left(B(q, 2a^n), \frac{da^{-n}}{2}, \varepsilon\right) \\ &= \mathcal{H}(B(q, 2a^n), d, 2\varepsilon a^n) \leq \mathcal{H}_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Поэтому

$$J(n) \leq \int_0^1 \frac{\mathcal{H}_2(x)}{\chi(\mathcal{H}_2(x))} dx = M_2 < \infty.$$

Так как $\|\eta_n(t, q)\| \leq 1$, $t \in B(q, 2a^n)$, то для оценки вероятности $P_n(u, q)$ применимо неравенство Дмитровского [5], когда

$$ua\psi^{-1}(\mathcal{H}(T, a^n) + \log(|\log a^n| + e)) \geq C_6.$$

Производя аналогичные сделанным при доказательстве теоремы 1 рассуждения и обозначая через $A_n(u)$ величину

$$1 - \frac{2\sqrt{2M_2}}{au\psi^{-1}(\mathcal{H}(T, a^n) + \log(|\log a^n| + e))},$$

получаем неравенство

$$P_n(u, q) \leq 2 \exp \left\{ -\psi(A_n(u) au\psi^{-1}(\mathcal{H}(T, a^n) + \log(|\log a^n| + e))) \right\}. \quad (13)$$

Докажем (11). Пусть $A_n(u) au \geq 1$, тогда, учитывая (7), из (13) получаем

$$\begin{aligned} P_n(u, q) &\leq 2 \exp \left\{ -A_n(u) au(\mathcal{H}(T, a^n) + \log(|\log a^n| + e)) \right\} \\ &= 2 \left(N(T, a^n)(n|\log a| + e) \right)^{-A_n(u) au}. \end{aligned}$$

Для доказательства (11) достаточно показать, что при всех достаточно больших n для любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$

$$\sup_{h \in [a^{n+1}, a^n]} \frac{\Delta(h)}{f(h)} \leq 4(1 + \varepsilon). \quad (14)$$

Оценим вероятность противоположного события:

$$\begin{aligned} Q_n(\varepsilon) &= \mathbf{P} \left\{ \sup_{h \in [a^{n+1}, a^n]} \frac{\Delta(h)}{h\psi^{-1}(\mathcal{H}(T, h) + \log(|\log h| + e))} > 4(1 + \varepsilon) \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \frac{\Delta(a^n) a^{-n-1}}{\psi^{-1}(\mathcal{H}(T, a^n) + \log(|\log a^n| + e))} > 4(1 + \varepsilon) \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{q \in S(a^n)} \sup_{t \in B(q, 2a^n)} \frac{2|\xi(t) - \xi(q)| a^{-n-1}}{\psi^{-1}(\mathcal{H}(T, a^n) + \log(|\log a^n| + e))} > 4(1 + \varepsilon) \right\} \\ &\leq N(T, a^n) \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B(q, 2a^n)} |\eta_n(t, q)| > a(1 + \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. \times \psi^{-1}(\mathcal{H}(T, a^n) + \log(|\log a^n| + e)) \right\} \\ &= N(T, a^n) P_n(1 + \varepsilon, q) \\ &\leq 2N(T, a^n)^{1-A_n(1+\varepsilon)a(1+\varepsilon)} (n|\log a| + e)^{-A_n(1+\varepsilon)a(1+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Выбирая теперь a и n_0 так же, как и при доказательстве теоремы 1, замечаем, что $\sum_n Q_n(\varepsilon) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$, откуда, на основании леммы Бореля-Кантелли, следует (11). Докажем теперь (12). Пусть u достаточно большое: $u \geq u_0 > 0$. Тогда из (13) выводим:

$$\begin{aligned} P_n(u, q) &\leq 2 \exp \left\{ -\psi \left(A_n(u) au \frac{\psi^{-1}(\gamma \mathcal{H}(T, a^n) + \gamma \log(|\log a^n| + e))}{\gamma} \right) \right\} \\ &\leq 2 \exp \left\{ -\psi \left(\frac{A_n(u) au}{\gamma} \right) \right\} N(T, a^n)^{-\gamma} (n|\log a| + e)^{-\gamma} \end{aligned}$$

для всех $\gamma > 1$. Поскольку при $n \geq 0$, $u \geq u_0$

$$A_n(u) \geq A = 1 - \frac{2\sqrt{2M_2}}{\sqrt{au_0}\psi^{-1}(1)},$$

то

$$\begin{aligned} P_G(u) &\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} N(T, a^n) P_n(u, q) \leq 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n|\log a| + e)^{-\gamma} \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ -\psi \left(\frac{Aau}{\gamma} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Так как для любых $\gamma > 1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n|\log a| + e)^{-\gamma}$ сходится, то, обозначая его сумму через $C_8/2$, а величину Aa/γ через C_7 , получаем (12).

Рассмотрим пример. Пусть, как и в п. 2, $\xi(t)$ — гауссовские стационарные поля, $T = \{t: t \in \mathbb{R}^k, |t| \leq 1\}$,

$$r(t) = 1 - \beta |t|^\alpha (1 + o(1)), \quad t \rightarrow 0.$$

По теореме 2 с учетом того обстоятельства, что $\mathcal{H}(h) \sim k\alpha^{-1} |\log h|$, $h \rightarrow 0$, находим:

$$f(h) = (2k\alpha^{-1})^{1/2} h |\log h|^{1/2}, \quad \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\Delta(h)}{f(h)} \leq 4.$$

Аналогично анализируются остальные примеры п. 2. Заметим, впрочем, что оценки типа (12) в гауссовском случае вытекают и из теоремы Ферника [8].

4. Некоторые приложения. 1) ЦПТ в банаховом пространстве. Пусть T — произвольное множество, $\xi_i(t)$ — независимые центрированные одинаково распределенные случайные поля,

$$\varphi(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2}, \quad S_n(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \xi_i(t), \quad d(t, s) = \|\xi_n(t) - \xi_n(s)\|.$$

Если $\mathcal{H}_2(\varepsilon) \leq \mathcal{H}_0 + \kappa |\log \varepsilon|$, $\varepsilon < 1$, то поля $S_n(t)$ слабо сходятся в топологии Прохорова–Скоророда в пространстве $C(T, d)$ [9].

Поскольку $\|S_n(t) - S_n(s)\| \leq d(t, s)$, то по теореме 2 функция $f(h) = h |\log h|^{1/2}$ будет глобальной верхней функцией для всех $S_n(t)$, и равномерно по n будет выполнено неравенство (12) с заменой $\xi(t)$ на $S_n(t)$. Следовательно, $\xi_i(t)$ удовлетворяют ЦПТ также в пространстве Гёльдера с нормой

$$\|x(t)\| = \sup_{t \in T} |x(t)| + \sup_{h \in (0,1)} \frac{\Delta_x(h)}{h^{1-\beta}}, \quad \beta \in (0, 1).$$

2) Метод Монте-Карло. Пусть на некотором измеримом пространстве $(X, \mathcal{F})$ с вероятностной мерой μ_ξ определен интеграл

$$J(t) = \int_X f(t, x) \mu_\xi(dx).$$

В методе Монте-Карло МЗИ-приближением [10], [11] является случайное поле

$$J_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f(t, \xi_i), \quad (15)$$

где ξ_i — независимые величины в X с распределениями μ_ξ . На практике по формуле (15) значения $J_n(t)$ вычисляются в некоторой конечной сетке значений t , и знание оценок для модуля непрерывности, например,

согласно (12), позволит оценить возникающую при этом погрешность интерполяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972, 375 с.
2. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
3. *Ядренко М. И.* Локальні властивості вибіркових функцій випадкових полів. — Вісн. Київського університету, сер. мат. та мех., 1967, № 9, с. 103–112.
4. *Альбин Дж. М. П.* Верхние и нижние классы для гауссовских случайных полей и обобщенный закон повторного логарифма. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 1, с. 5–9.
5. *Дмитровский В. А.* О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовских полей. — Теория вероятн. и мат. статист., 1981, в. 25, с. 154–164.
6. *Fernique X.* Sur la régularité de certaines classes de fonctions aléatoires. — C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, 1988, t. 307, p. 493–496.
7. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. — Теория вероятн. и матем. статист., 1985, в. 32, с. 42–53.
8. *Fernique X.* Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. — Lect. Notes Math., 1975, v. 480, p. 1–245.
9. *Дмитровский В. А., Ермаков С. В., Островский Е. И.* Центральная предельная теорема для слабозависимых величин со значениями в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, в. 1, с. 83–96.
10. *Фролов А. С., Ченцов Н. Н.* О вычислении методом Монте-Карло определенных интегралов, зависящих от параметра. — Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1962, т. 2, № 4, с. 714–717.
11. *Дмитровский В. А., Островский Е. И.* Оценка погрешности метода зависимых испытаний. — Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1976, т. 18, № 5, с. 1312–1316.

Поступила в редакцию
14.IV.1993