Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Лазакович, С. П. Сташуленок, Аппроксимация стохастических интегралов Ито и Стратоновича элементами прямого произведения алгебр обобщенных случайных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 785–809

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:45:34

© 1996 г. **ЛАЗАКОВИЧ Н. В.***, **СТАШУЛЕНКО С. П.***

**АППРОКСИМАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ
ИТО И СТРАТОНОВИЧА ЭЛЕМЕНТАМИ
ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ АЛГЕБР
ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ¹⁾**

В статье исследуется задача аппроксимации многомерных стохастических интегралов Ито и Стратоновича конечными суммами элементов из прямого произведения алгебр обобщенных случайных процессов.

Ключевые слова и фразы: стандартный процесс броуновского движения, стохастический интеграл Ито, стохастический интеграл Стратоновича, обобщенные случайные процессы, прямое произведение алгебр обобщенных случайных процессов, обобщенный дифференциал Ито, обобщенный дифференциал Стратоновича.

В современной теории дифференциальных уравнений с частными производными основным инструментом служит теория распределений Л. Шварца, окончательное оформление которой произошло в работе [1]. Однако следует отметить, что с момента своего возникновения теория распределений имела существенный недостаток: она неприменима для решения нелинейных задач. Тем не менее, уже в первых работах П. Дирака, в которых были введены распределения, появилась потребность в определении произведения распределений [2]. Многие авторы пытались разрешить эту проблему, используя свои подходы для определения обобщенных функций. Отметим, в частности, результаты Я. Микусинского [3], [4]. Впервые положительное решение было найдено Я. Б. Ливчаком, в работе [5] которого введена алгебра обобщенных функций. Спустя 15 лет она была вновь открыта Ж. Ф. Коломбо [6]. Им и его последователями [7], [8] были исследованы некоторые алгебры объектов, названных ими «новыми обобщенными функциями». Наиболее обширная из такого сорта алгебр была предложена и изучена Ю. В. Егоровым [9]. В статье [10] был предложен общий подход к построению алгебр обобщенных функций.

*Белорусский государственный университет, механико-математический факультет, пр. Ф. Скорины, 4, 220080 Минск, Республика Беларусь.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь и Международной соросовской программы образования в области точных наук.

Параллельно с развитием теории обобщенных функций шло развитие теории обобщенных случайных процессов. Так, на основе теории распределений Л. Шварца И. М. Гельфандом и Н. Я. Виленкиным в [11], [12] создана теория обобщенных случайных процессов. К. Урбаником в статье [13] предложена своя трактовка обобщенных случайных процессов, опирающаяся на секвенциальный подход Я. Микусинского. В работе [14] на основе алгебры обобщенных функций Ю. В. Егорова введена алгебра обобщенных случайных процессов. А в [15] показано, что решения стохастических дифференциальных уравнений как Ито, так и Стратоновича могут быть аппроксимированы решением соответствующего уравнения в дифференциалах из данной алгебры.

В настоящей работе исследуются вопросы аппроксимации многомерных стохастических интегралов Ито и Стратоновича конечными суммами элементов из прямого произведения алгебр обобщенных случайных процессов.

Введение. Напомним некоторые понятия из работы [14], с которыми нам придется работать в дальнейшем.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $T = [0, a] \subset \mathbf{R}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ — стандартный поток σ -алгебр, $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{A}$.

Рассмотрим множество функций

$$f_n(t, \omega): \mathbf{N} \times T \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

таких, что 1) $f_n(t, \omega)$ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ для любых $t \in T$ и $n \in \mathbf{N}$; 2) $f_n(t, \omega) \in C^\infty(T)$ для любых $n \in \mathbf{N}$ и почти всех $\omega \in \Omega$.

Элементы $F = (f_n(t, \omega))$ и $G = (g_n(t, \omega))$ данного множества назовем эквивалентными, если существует такое n_0 , что для любого $t \in T$, почти всех $\omega \in \Omega$ и любого $n > n_0$: $f_n(t, \omega) = g_n(t, \omega)$.

Множество классов эквивалентных последовательностей такого вида обозначим $\mathcal{G}(T, \Omega)$, оно является алгеброй с покоординатными операциями сложения и умножения. Далее, пусть

$$\tilde{T} = \{\tilde{t} = [(t_n)] \in \tilde{\mathbf{R}}: \forall (t_n) \in \tilde{t} \ 0 \leq t_n \leq a, n = 1, 2, \dots\},$$

где $\tilde{\mathbf{R}}$ — расширенная прямая из [9]. Через $\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)$ обозначим алгебру обобщенных случайных процессов $\tilde{F}(\tilde{t}, \omega)$ вида

$$\tilde{F}(\tilde{t}, \omega) = \left[(f_n(t_n, \omega)) \right],$$

где $\tilde{t} = [(t_n)] \in \tilde{T}$, а $[(f_n(t, \omega))] \in \mathcal{G}(T, \Omega)$.

Введем на $\tilde{\mathbf{R}}$ множество

$$H = \left\{ \tilde{h} = [(h_n)] \in \tilde{\mathbf{R}}_+ \setminus \tilde{0} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \right\}$$

и для любого $\tilde{F} = [(f_n)] \in \mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)$ положим по определению

$$d_{\tilde{h}} \tilde{F}(\tilde{t}, \omega) = \left[(f_n(t + h_n, \omega) - f_n(t, \omega)) \right],$$

где $\tilde{t} = [(t)] \in \tilde{T}$, $\tilde{h} \in H$, $\tilde{t} + \tilde{h} \in \tilde{T}$.

Выделим в H подмножества

$$I = \left\{ \tilde{h} \in H \mid \frac{1}{n} = o(h_n) \quad \forall (h_n) \in \tilde{h} \right\},$$

$$S = \left\{ \tilde{h} \in H \mid h_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall (h_n) \in \tilde{h} \right\}.$$

Напомним, что $d_{\tilde{h}} \tilde{F}$, $\tilde{h} \in S$, называется обобщенным дифференциалом Стратоновича, а $d_{\tilde{h}} \tilde{F}$, $\tilde{h} \in I$, — обобщенным дифференциалом Ито.

1. Вспомогательные утверждения. Пусть $B(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, — одномерный стандартный процесс $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения [16, с. 48–49]; $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = a$ — разбиение отрезка T , $\lambda_m = \max_{1 \leq k \leq m} (t_k - t_{k-1})$. Тогда для любого $t \in T$ существует такое $p = p(t) \in \mathbf{N}$, что $t_p \leq t < t_{p+1}$.

Через $\rho(s)$, $s \in \mathbf{R}$, обозначим неотрицательную функцию класса $C^\infty(\mathbf{R})$, носитель которой содержится в $[0, 1]$ и $\int_0^1 \rho(s) ds = 1$, а $\rho_n(s) = n\rho(ns)$, $n \in \mathbf{N}$,

$$B_n(t, \omega) = (B * \rho_n)(t, \omega) = \int_0^{1/n} B(t+s, \omega) \rho_n(s) ds, \quad (1.1)$$

$$S_n^p(t, \omega) = \sum_{k=1}^p [B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^2.$$

Лемма 1. *Справедливы следующие оценки:*

- а) $\mathbf{E}[B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^2 \leq C|t_k - t_{k-1}|$,
- б) $\mathbf{E}[B_n(t, \omega) - B(t, \omega)]^2 \leq \frac{C}{n}$,
- в) $\mathbf{E}[B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^4 \leq C(t_k - t_{k-1})^2$,
- г) $\mathbf{E}[B_n(t, \omega) - B(t, \omega)]^4 \leq \frac{C}{n^2}$.

Доказательство использует неравенство Гёльдера и теорему Фубини [17, с. 26, 30].

Без существенного ограничения общности в дальнейшем предполагаем, что $t_k - t_{k-1} = h_n$, $k = 1, \dots, m$.

Лемма 2. *Для достаточно больших n и $h_n < 1/n$ справедливы следующие оценки:*

- а) $\mathbf{E}[B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^2 \leq Cnh_n^2$,
- б) $\mathbf{E}[B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^4 \leq Cn^2 h_n^4$,
- в) $\mathbf{E}[B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^8 \leq Cn^4 h_n^8$.

Доказательство проведем для случая б). Используя интегрирование по частям и замену переменных, разность $B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega) &= \int_0^{1/n} B(t_k + s, \omega) \rho_n(s) ds \\ &\quad - \int_0^{1/n} B(t_{k-1} + s, \omega) \rho_n(s) ds \\ &= \int_0^{1/n} \left[\int_{t_k}^{s+t_k} B(u, \omega) du - \int_{t_{k-1}}^{s+t_{k-1}} B(u, \omega) du \right] \rho'_n(s) ds \\ &= \int_0^{h_n} \left[\int_0^s [B(t_k + u, \omega) - B(t_{k-1} + u, \omega)] du \right] \rho'_n(s) ds \\ &\quad + \int_{h_n}^{1/n} \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} [B(u + s, \omega) - B(u, \omega)] du \right] \rho'_n(s) ds = I_1^n + I_2^n. \end{aligned}$$

Для $E[I_2^n]^4$ используем неравенство Гёльдера и теорему Фубини. В результате получим

$$\begin{aligned} E[I_2^n]^4 &\leq E \left(\int_{h_n}^{1/n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [B(u + s, \omega) - B(u, \omega)]^4 du \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} du \right)^3 ds \right) \\ &\quad \times \int_{h_n}^{1/n} ds \left(\int_{h_n}^{1/n} [\rho'_n(s)]^2 ds \right)^2 \leq C n^2 h_n^4. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, для $E[I_1^n]^4$ получим

$$\begin{aligned} E[I_1^n]^4 &\leq E \int_0^{h_n} \int_0^s [B(t_k + u, \omega) - B(t_{k+1} + u, \omega)]^4 du \left(\int_0^s du \right)^3 ds \\ &\quad \times \int_0^{h_n} ds \left[\int_0^{h_n} [\rho'_n(s)]^2 ds \right]^2 \leq C n^8 h_n^{10}. \end{aligned}$$

Используя неравенство

$$E[I_1^n + I_2^n]^4 \leq C E[I_1^n]^4 + C E[I_2^n]^4$$

и тот факт, что $h_n < 1/n$, получаем утверждение б) леммы 2.

Аналогично доказываются пункты а) и в).

Лемма 3. Если $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $1/n = o(h_n)$, то

$$\sup_{t \in T} E[S_n^p(t, \omega) - t]^2 \rightarrow 0.$$

Доказательство. Очевидно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^p [B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^2 - t \right]^2 \\ & \leq 2\mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^p [B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^2 - \sum_{k=1}^p [B(t_k, \omega) - B(t_{k-1}, \omega)]^2 \right]^2 \\ & \quad + 2\mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^p [B(t_k, \omega) - B(t_{k-1}, \omega)]^2 - t \right]^2 = 2I_1(t) + 2I_2(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Известно [18, с. 19], что если $h_n \rightarrow 0$, то

$$\sup_{t \in T} I_2(t) \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Справедлива следующая оценка для $I_1(t)$:

$$\begin{aligned} I_1(t) & \leq 4\mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^p (B_n(t_k, \omega) - B(t_k, \omega)) (B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)) \right]^2 \\ & \quad + 4\mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^p (B_n(t_{k-1}, \omega) - B(t_{k-1}, \omega)) (B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)) \right]^2 \\ & \quad + 4\mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^p (B_n(t_k, \omega) - B(t_k, \omega)) (B(t_k, \omega) - B(t_{k-1}, \omega)) \right]^2 \\ & \quad + 4\mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^p (B_n(t_{k-1}, \omega) - B(t_{k-1}, \omega)) (B(t_k, \omega) - B(t_{k-1}, \omega)) \right]^2 \\ & = 4J_1(t) + 4J_2(t) + 4J_3(t) + 4J_4(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Используя неравенство Гёльдера, мартингалное неравенство [16, с. 41] и пункт в) леммы 1, для $J_1(t)$ можно получить следующую оценку:

$$J_1(t) \leq \frac{Cp^2 h_n^2}{n} \leq \frac{C}{n}. \quad (1.5)$$

Аналогично доказывается, что

$$J_2(t) \leq \frac{C}{n}. \quad (1.6)$$

Рассмотрим $J_3(t)$. Используя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} J_3(t) & \leq p \sum_{k=1}^p \left(\mathbf{E} (B_n(t_k, \omega) - B(t_k, \omega))^4 \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\mathbf{E} (B(t_k, \omega) - B(t_{k-1}, \omega))^4 \right)^{1/2} \leq \frac{Cp^2 h_n}{n} \leq \frac{C}{nh_n}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Точно так же доказывается, что

$$J_4(t) \leq \frac{C}{nh_n}. \quad (1.8)$$

Таким образом, из соотношений (1.2)–(1.8) вытекает доказательство леммы.

Лемма 4. Если $h_n = o(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\sup_{t \in T} \mathbf{E}[S_n^p(t, \omega)]^2 \rightarrow 0.$$

Доказательство. Используя пункт б) леммы 2, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n^p(t, \omega)]^2 &\leq p \sum_{k=1}^p \mathbf{E}[B_n(t_k, \omega) - B_n(t_{k-1}, \omega)]^4 \\ &\leq p \sum_{k=1}^p Cn^2 h_n^4 \leq Cn^2 h_n^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма 5 [19, с. 73]. Предположим, что $C > 1$ постоянна. Тогда для почти всех ω существует такое $\delta = \delta(\omega) > 0$, что при $|t - t'| \leq \delta$

$$|B(t, \omega) - B(t', \omega)| \leq C[2|t - t'| \log |t - t'|^{-1}]^{1/2}.$$

Используя методику доказательства лемм 3 и 4, а также лемму 5, можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Лемма 6. Если для любого сколь угодно малого $\alpha > 0$ при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $\lambda_m \rightarrow 0$: $m/n^{1-\alpha} \rightarrow 0$, то равномерно по $t \in T$ для почти всех $\omega \in \Omega$

$$S_n^p(t, \omega) - t \rightarrow 0.$$

Лемма 7. Если для любого сколь угодно малого $\alpha > 0$ при $n \rightarrow \infty$,

$$\lambda_m n^{1+\alpha} \rightarrow 0,$$

то равномерно по $t \in T$ для почти всех $\omega \in \Omega$

$$S_n^p(t, \omega) \rightarrow 0.$$

2. Аппроксимация стохастического интеграла Ито в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов. Введем r -мерный стандартный процесс $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения $\bar{B}(t, \omega) = (B^1(t, \omega), \dots, B^r(t, \omega))$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, [16, с. 48–49] и через

$$(I) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^i(s, \omega), \quad t \in T, \quad \omega \in \Omega, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.1)$$

обозначим стохастический интеграл Ито [16, с. 53];

$C_B^l(\mathbf{R}^r)$ — множество действительных l раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbf{R}^r$ функций, ограниченных вместе со своими частными производными до порядка l включительно;

$\mathcal{G}(T, \Omega)^r, \mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^r$ — прямое произведение алгебр $\mathcal{G}(T, \Omega)$ и $\mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)$ соответственно.

В данном пункте исследуется задача аппроксимации стохастического интеграла (2.1) конечными суммами элементов из прямого произведения алгебр обобщенных случайных процессов. Известно [20], что даже для «хороших» случайных функций $u(B)$ соответствующие «приближенные» интегралы не сходятся к стохастическому интегралу Ито. В работе [21] указанные выше трудности для некоторых аппроксимаций броуновского движения удалось преодолеть лишь с введением запаздывания. В рассматриваемом прямом произведении алгебр подобной ситуации не возникает.

Теорема 1. Для любой функции $u \in C_B^1(\mathbf{R}^r)$ и r -мерного стандартного случайного процесса броуновского движения найдутся такие элементы $\tilde{u} \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^r)$ и $\tilde{B} \in \mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^r$, что для любых представителей $(u_n) \in \tilde{u}$ и $(\bar{B}_n(s, \omega)) \in \tilde{B}$ справедливо неравенство

$$\sup_{t \in T} \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^r u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^i(t_k, \omega) - B_n^i(t_{k-1}, \omega)] - \sum_{i=1}^r (I) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^i(s, \omega) \right\}^2 \leq \frac{Cm}{n} + C\lambda_m,$$

если $1/n < \min_{1 \leq k \leq m} (t_k - t_{k-1})$, где $\bar{B}_n = (B_n^1, \dots, B_n^r)$.

Доказательство. Для простоты исследуем случай $r = 2$. Достаточно будет рассмотреть первое слагаемое. В качестве представителя функции $\tilde{u}$ выберем

$$u_n(t_1, t_2) = \int_0^{1/n} \int_0^{1/n} u(t_1 + s_1, t_2 + s_2) \bar{\rho}_n(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{\rho}_n(s_1, s_2) = n^2 \bar{\rho}(ns_1, ns_2), \quad (2.3)$$

а $\bar{\rho}(s_1, s_2)$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в квадрате $[0, 1]^2$, и $\int_{[0, 1]^2} \bar{\rho} ds_1 ds_2 = 1$; а в качестве представителя $\tilde{B}^i$ выберем

$$B_n^i(t, \omega) = (B^i * \rho_n)(t, \omega), \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.4)$$

Используя неравенство треугольника для нормы в $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, несложно видеть, что для произвольного $t \in T$

$$\left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u_n(B_n^1(t_{k-1}, \omega), B_n^2(t_{k-1}, \omega)) [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] - (I) \int_0^t u(B^1(s, \omega), B^2(s, \omega)) dB^1(s, \omega) \right\}^2 \right\}^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u_n(B_n^1(t_{k-1}, \omega), B_n^2(t_{k-1}, \omega)) [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^p u_n \left(B_n^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B_n^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right\}^2 \right\}^{1/2} \\
&+ \left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u_n \left(B_n^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B_n^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (I) \int_0^t u(B^1(s, \omega), B^2(s, \omega)) dB^1(s, \omega) \right\}^2 \right\}^{1/2} \\
&= I_1^{n,p}(t) + I_2^{n,p}(t).
\end{aligned}$$

Используя это же неравенство, для $I_2^{n,p}(t)$ получаем:

$$\begin{aligned}
I_2^{n,p}(t) &\leq \left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u_n \left(B_n^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B_n^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^p u_n \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right\}^2 \right\}^{1/2} \\
&+ \left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u_n \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^p u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right\}^2 \right\}^{1/2} \\
&+ \left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k=1}^p u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \\
 & \quad \times [B^1(t_k, \omega) - B^1(t_{k-1}, \omega)] \Bigg\}^2 \Bigg\}^{1/2} \\
 & + \left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
 & \quad \times [B^1(t_k, \omega) - B^1(t_{k-1}, \omega)] \\
 & \quad - \sum_{k=1}^p u(B^1(t_{k-1}, \omega), B^2(t_{k-1}, \omega)) \\
 & \quad \times [B^1(t_k, \omega) - B^1(t_{k-1}, \omega)] \Bigg\}^2 \Bigg\}^{1/2} \\
 & + \left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u(B^1(t_{k-1}, \omega), B^2(t_{k-1}, \omega)) \right. \right. \\
 & \quad \times [B^1(t_k, \omega) - B^1(t_{k-1}, \omega)] \\
 & \quad - (I) \int_0^t u(B^1(s, \omega), B^2(s, \omega)) dB^1(s, \omega) \Bigg\}^2 \Bigg\}^{1/2} \\
 & = I_{21}(t) + I_{22}(t) + I_{23}(t) + I_{24}(t) + I_{25}(t). \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Для оценки $I_{21}(t)$ будем использовать оценку в) из леммы 1, неравенство Гёльдера, теорему Лагранжа и ограниченность $\partial u_n / \partial x_i$:

$$\begin{aligned}
 I_{21}^2(t) & \leq p \sum_{k=1}^p \mathbf{E} \left\{ \left[u_n \left(B_n^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B_n^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - u_n \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right\}^2 \\
 & \leq Cp \sum_{k=1}^p \left\{ \mathbf{E} \left(B_n^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) - B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right)^4 \right. \\
 & \quad \left. + \mathbf{E} \left(B_n^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) - B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right)^4 \right\}^{1/2} \\
 & \quad \times (t_k - t_{k-1}) \leq \frac{Cp}{n}. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Используя те же факты, что и при оценивании $I_{21}(t)$, а также пред-

ставление u_n , для $I_{22}(t)$ имеем:

$$\begin{aligned}
 I_{22}^2(t) &\leq p \sum_{k=1}^p \mathbf{E} \left\{ \left[u_n \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right\}^2 \\
 &\leq p \sum_{k=1}^p \left\{ \mathbf{E} \left[\int_0^{1/n} \int_0^{1/n} \left[u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) + s_1, \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) + s_2 \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \bar{\rho}_n(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right]^4 \mathbf{E} [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)]^4 \Big\}^{1/2} \\
 &\leq p \sum_{k=1}^p C \frac{t_k - t_{k-1}}{n^2} \leq \frac{Cp}{n^2}. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Проводя стандартные рассуждения, для $I_{23}(t)$ получаем (здесь используем условие, что $1/n < \min_{1 \leq k \leq m} (t_k - t_{k-1})$):

$$\begin{aligned}
 I_{23}(t) &\leq \left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B^1(t_k, \omega)] \right\}^2 \right\}^{1/2} \\
 &+ \left\{ \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times [B_n^1(t_{k-1}, \omega) - B^1(t_{k-1}, \omega)] \right\}^2 \right\}^{1/2} = I_{231}(t) + I_{232}(t),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{231}^2(t) &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. \times [B_n^1(t_k, \omega) - B^1(t_k, \omega)] \right\}^2
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^p \mathbf{E} \left\{ u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \times [B_n^1(t_k, \omega) - B^1(t_k, \omega)] \right\}^2. \quad (2.8)$$

Тогда

$$I_{231}^2(t) \leq C \sum_{k=1}^p \mathbf{E} [B_n^1(t_k, \omega) - B^1(t_k, \omega)]^2 \leq \frac{Cp}{n}, \quad (2.9)$$

$$I_{232}^2(t) \leq C \sum_{k=1}^p \mathbf{E} [B_n^1(t_{k-1}, \omega) - B^1(t_{k-1}, \omega)]^2 \leq \frac{Cp}{n}. \quad (2.10)$$

Как и для $I_{23}(t)$, для $I_{24}(t)$ получаем:

$$I_{24}^2(t) \leq \sum_{k=1}^p \mathbf{E} \left[u \left(B^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) - u \left(B^1(t_{k-1}, \omega), B^2(t_{k-1}, \omega) \right) \right]^2 \times \mathbf{E} [B^1(t_k, \omega) - B^1(t_{k-1}, \omega)]^2 \leq \frac{C}{n}. \quad (2.11)$$

При получении последней оценки использовалась независимость случайных величин $u(B^1(t_{k-1} - 1/n, \omega), B^2(t_{k-1} - 1/n, \omega)) - u(B^1(t_{k-1}, \omega), B^2(t_{k-1}, \omega))$ и $B^1(t_k, \omega) - B^1(t_{k-1}, \omega)$, а также теорема Лагранжа, ограниченность $\partial u / \partial x_i$ и оценка а) леммы 1.

Положим по определению $\bar{B}(s, \omega) = B^i(t_{k-1}, \omega)$ для $s \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, m$. Тогда, используя определение стохастического интеграла Ито и изометрию (4.7) [22, с. 260], для $I_{25}(t)$ получим:

$$I_{25}^2(t) \leq C \lambda_m. \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.5)–(2.12) получаем

$$(I_2^{n,p}(t))^2 \leq \frac{Cp}{n} + \frac{Cp}{n^2} + \frac{C}{n} + C \lambda_m.$$

И, наконец, для оценки $I_1^{n,p}(t)$ используем неравенство Гёльдера, теорему Лагранжа, ограниченность $\partial u_n / \partial x_i$, пункты в) и г) леммы 1:

$$(I_2^{n,p}(t))^2 \leq p \sum_{k=1}^p \left\{ \mathbf{E} \left[u_n(B_n^1(t_{k-1}, \omega), B_n^2(t_{k-1}, \omega)) - u_n \left(B_n^1 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right), B_n^2 \left(t_{k-1} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \right]^4 \times \mathbf{E} [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)]^4 \right\}^{1/2}$$

$$\leq \frac{Cp}{n} \sum_{k=1}^p (t_k - t_{k-1}) \leq \frac{Cp}{n}.$$

Таким образом, для произвольного $t \in T$ получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u_n(B_n^1(t_{k-1}, \omega), B_n^2(t_{k-1}, \omega)) [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \right. \\ & \quad \left. - (\text{I}) \int_0^t u(B^1(s, \omega), B^2(s, \omega)) dB^1(s, \omega) \right\}^2 \\ & \leq \frac{Cp}{n} + \frac{Cp}{n^2} + \frac{C}{n} + C\lambda_m. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $\lambda_m \rightarrow 0$ так, что $m/n \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \sup_{t \in T} \mathbf{E} \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^i(t_k, \omega) - B_n^i(t_{k-1}, \omega)] \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^r (\text{I}) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^i(s, \omega) \right\}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть функция $u \in C(\mathbf{R}^r)$ и $\bar{B}(t, \omega)$ есть r -мерный стандартный случайный процесс $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения. Тогда найдутся такие элементы $\tilde{u} \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^r)$ и $\tilde{B} \in \mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^r$, что если для любого сколь угодно малого $\alpha > 0$ при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $\lambda_m \rightarrow 0$

$$\frac{m}{n^{1-\alpha}} \rightarrow 0,$$

то

$$\begin{aligned} \sup_{t \in T} \left| \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^i(t_k, \omega) - B_n^i(t_{k-1}, \omega)] \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^r (\text{I}) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^i(s, \omega) \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

для почти всех $\omega \in \Omega$. Здесь (u_n) и $(\bar{B}_n(s, \omega))$ — произвольные представители $\tilde{u}$ и $\tilde{B}$ соответственно, $C^l(\mathbf{R}^r)$ — множество вещественных l раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbf{R}^r$ функций.

Доказательство теоремы 2 проводится по методике, предложенной в доказательстве теоремы 1 с использованием леммы 5.

3. Аппроксимация стохастического интеграла Стратоновича в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов. Пусть

$$(S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^i(s, \omega), \quad t \in T, \quad \omega \in \Omega, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.1)$$

— стохастический интеграл Стратоновича [16, с. 109]. В этом пункте изучается аппроксимация стохастического интеграла (3.1) конечными суммами элементов из прямого произведения алгебр обобщенных случайных процессов.

Теорема 3. Для любой функции $u \in C_B^2(\mathbf{R}^r)$ и r -мерного стандартного случайного процесса $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения $\bar{B}(t, \omega)$ найдутся такие элементы $\tilde{u} \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^r)$ и $\tilde{B} \in \mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^r$, что для любых представителей $(u_n) \in \tilde{u}$ и $(\bar{B}_n) \in \tilde{B}$ справедливо неравенство

$$\sup_{t \in T} \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^j(t_k, \omega) - B_n^j(t_{k-1}, \omega)] - \sum_{j=1}^r (S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \right\}^2 \leq \frac{C}{n^{1/3}} + Cn^2 h_n^2 + Ch_n.$$

Доказательство. Введем обозначения. Выберем $N = N(h_n): (0, 1) \rightarrow \mathbf{Z}^+$ такое, что $h_n N(h_n) = \tilde{\delta} \rightarrow 0$, $N(h_n) \rightarrow \infty$, $1/n = o(\tilde{\delta})$ при $h_n \rightarrow 0$. Без существенного ограничения общности предположим, что $t = ph_n = NMh_n = M\tilde{\delta}$. Всюду в дальнейшем в доказательстве теоремы будем предполагать, что $h_n = o(1/n)$.

Представителей $\tilde{u}$ и $\tilde{B}$ определим посредством равенств (2.2) и (2.4) соответственно.

Используя связь между интегралами Ито и Стратоновича, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^j(t_k, \omega) - B_n^j(t_{k-1}, \omega)] \\ & - (S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \\ & = \left\{ \sum_{l=1}^M u_n(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega)) [B_n^j(l\tilde{\delta}, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta}, \omega)] - (I) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \right\} \\ & + \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \left[u_n(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega)) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - u_n \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right) \Big] \\
& \times \left[B_n^j((l-1) \tilde{\delta} + k h_n, \omega) - B_n^j((l-1) \tilde{\delta} + (k-1) h_n, \omega) \right] \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t u_j(\overline{B}(s, \omega)) ds \Big\} = I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

где $u_j = \partial u / \partial x_j$.

Рассмотрим I_1 . Согласно теореме 1,

$$E(I_1)^2 \leq \frac{C}{n \tilde{\delta}} + C \tilde{\delta}.$$

Запишем следующее очевидное представление для I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 = & \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \left[u_n \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta} + (k-1) h_n, \omega) - u_n \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right) \right) \right] \right. \\
& \times \left[B_n^j((l-1) \tilde{\delta} + k h_n, \omega) - B_n^j((l-1) \tilde{\delta} + (k-1) h_n, \omega) \right] \\
& \left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M u_{jn} \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B_n^j(l \tilde{\delta}, \omega) - B_n^j((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l=1}^M u_{jn} \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B_n^j(l \tilde{\delta}, \omega) - B_n^j((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right. \\
& \left. - \int_0^t u_j(\overline{B}(s, \omega)) ds \right\} = I_{21} + \frac{1}{2} I_{22}, \quad u_{jn} = \frac{\partial}{\partial x_j} u_n,
\end{aligned}$$

и рассмотрим каждое слагаемое в отдельности.

Несложно убедиться, что

$$\begin{aligned}
I_{22} = & \left\{ \sum_{l=1}^M u_{jn} \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B_n^j(l \tilde{\delta}, \omega) - B_n^j((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right. \\
& \left. - \sum_{l=1}^M u_j \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B_n^j(l \tilde{\delta}, \omega) - B_n^j((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right\} \\
& + \left\{ \sum_{l=1}^M u_j \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B_n^j(l \tilde{\delta}, \omega) - B_n^j((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right. \\
& \left. - \sum_{l=1}^M u_j \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B^j(l \tilde{\delta}, \omega) - B^j((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right\} \\
& + \left\{ \sum_{l=1}^M u_j \left(\overline{B}_n((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B^j(l \tilde{\delta}, \omega) - B^j((l-1) \tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{l=1}^M u_j \left(\bar{B}((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B^j(l\tilde{\delta}, \omega) - B^j((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \Big\} \\
 & + \left\{ \sum_{l=1}^M u_j \left(\bar{B}((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B^j(l\tilde{\delta}, \omega) - B^j((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^t u_j(\bar{B}(s, \omega)) ds \right\} = I_{22}^0 + I_{22}^1 + I_{22}^2 + I_{22}^3.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим I_{22}^1 . Действуем точно так, как и при доказательстве леммы 3. В результате получим оценку

$$E(I_{22}^1)^2 \leq \frac{C}{n\tilde{\delta}}.$$

Для оценки $E(I_{22}^2)^2$ воспользуемся r -мерной формулой Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 E(I_{22}^2)^2 & \leq CM \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^M E \left(\left[B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) - B^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \right. \\
 & \quad \left. \times \left[B^j(l\tilde{\delta}, \omega) - B^j((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right)^2 \\
 & \leq CM \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^M \left\{ E \left[B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) - B^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^4 \right. \\
 & \quad \left. \times E \left[B^j(l\tilde{\delta}, \omega) - B^j((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^8 \right\}^{1/2} \\
 & \leq \frac{CM^2 \tilde{\delta}^2}{n} \leq \frac{C}{n}.
 \end{aligned}$$

Стандартными методами, используя определение интеграла от случайного процесса, несложно получить, что

$$E(I_{22}^3)^2 \leq C\Delta,$$

где $\Delta = O(\tilde{\delta})$ при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$.

Используя представление u_{jn} и неравенство Гёльдера, получаем $E(I_{22}^0)^2 \leq C/n^2$.

Итоговая оценка для I_{22} будет следующей:

$$E(I_{22})^2 \leq \frac{C}{n\tilde{\delta}} + \frac{C}{n} + C\tilde{\delta} + \frac{C}{n^2}.$$

Исследуем I_{21} . Для этого воспользуемся формулой Тейлора для функции u :

$$I_{21} = \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_{in} \left(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[B_n^i((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\
& \times \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\
& + \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N u_{jn} \left(\overline{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right) \\
& \times \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\
& \times \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^r u_{iin}(\theta) \left[B_n^i((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right. \\
& \quad \left. - B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\
& \times \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\
& + \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \sum_{i,p=1}^r u_{ipn}(\theta) \left[B_n^i((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right. \\
& \quad \left. - B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\
& \times \left[B_n^p((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^p((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\
& \times \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M u_{jn} \left(\overline{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B_n^j(l\tilde{\delta}, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\
& = I_{21}^1 + I_{21}^2 + I_{21}^3 + I_{21}^4, \quad u_{ipn} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_p} u_n.
\end{aligned}$$

Рассмотрим I_{21}^1 . Положим по определению

$$\begin{aligned}
\overline{B}_n' \left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{n}, \omega \right) = & \left(B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega), B_n^2((l-1)\tilde{\delta}, \omega), \dots, \right. \\
& \left. B_n^j \left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{n}, \omega \right), \dots, B_n^r((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right).
\end{aligned}$$

Несложно видеть, что в этом случае $u_{in}(B_n'((l-1)\tilde{\delta} - 1/n, \omega))$ независит от третьего сомножителя в I_{21}^1 . Очевидно следующее представление:

$$\begin{aligned}
I_{21}^1 = & I_{21}^1 - \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_{in} \left(B_n' \left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \\
& \times \left[B_n^i((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\
 & + \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_{in} \left(B_n^i \left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right) \\
 & \times \left[B_n^i((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\
 & \times \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\
 & = I_{21}^{11} + I_{21}^{12}.
 \end{aligned}$$

Пользуясь независимостью сомножителей, получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(I_{21}^{12})^2 & \leq CMNE \left[B_n^i((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\
 & \quad \times \mathbf{E} \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right]^2 \\
 & \leq C\tilde{\delta}nh_n.
 \end{aligned}$$

Используя формулу Лагранжа и ограниченность на $\mathbf{R}^r$ вторых частных производных u , имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(I_{21}^{11})^2 & \leq CM^2N^2\mathbf{E} \left\{ \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta}, \omega) - B_n^j \left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{n}, \omega \right) \right]^2 \right. \\
 & \quad \times \left. \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right]^2 \right\} \\
 & \quad \times \mathbf{E} \left[B_n^i((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^i((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\
 & \leq C\tilde{\delta} + Cn^3h_n^3\tilde{\delta}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{E}(I_{21}^1)^2 \leq C\tilde{\delta}$.

Легко установить справедливость следующего тождества:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\
 & \quad \times \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\
 & = \frac{1}{2} \left[B_n^j(l\tilde{\delta}, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\
 & \quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right]^2.
 \end{aligned}$$

Используя это тождество и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(I_{21}^2)^2 &\leq \frac{1}{4} \mathbf{E} \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N u_j \left(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right) \right. \\ &\quad \times \left[B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^j((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right]^2 \left. \right\}^2 \\ &\leq CM^2 N^2 n^2 h_n^4 \leq Cn^2 h_n^2. \end{aligned}$$

Учитывая ограниченность функции u и ее частных производных, для $\mathbf{E}(I_{21}^3)^2$ и $\mathbf{E}(I_{21}^4)^2$ получаем

$$\mathbf{E}(I_{21}^z)^2 \leq Cn\tilde{\delta}^2, \quad z = 3, 4.$$

Тогда для $\mathbf{E}(I_{21})^2$ получаем оценку

$$\mathbf{E}(I_{21})^2 \leq C\tilde{\delta}nh_n + C\tilde{\delta} + Cn\tilde{\delta}^2 + Cn^2 h_n^2.$$

В итоге получена следующая оценка:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^j(t_k, \omega) - B_n^j(t_{k-1}, \omega)] \right. \\ \left. - (S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^j(s, \omega) \right\}^2 \\ \leq \frac{C}{n\tilde{\delta}} + C\tilde{\delta} + C\tilde{\delta}nh_n + Cn\tilde{\delta}^2 + Cn^2 h_n^2. \end{aligned}$$

В завершение доказательства теоремы укажем, что оптимальный результат оценивания достигается для $\tilde{\delta} = n^{-2/3}$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 3, тогда если $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $h_n = o(1/n)$, то

$$\begin{aligned} \sup_{t \in T} \mathbf{E} \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^i(t_k, \omega) - B_n^i(t_{k-1}, \omega)] \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^r (S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^i(s, \omega) \right\}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для случая интеграла Стратоновича справедливо утверждение, аналогичное теореме 2.

Теорема 4. Пусть функция $u \in C^1(\mathbf{R}^r)$ и $\bar{B}(t, \omega)$ есть r -мерный стандартный случайный процесс $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения. Тогда найдутся такие элементы $\tilde{y} \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^r)$ и $\tilde{B} \in \mathcal{G}(\tilde{T}, \Omega)^r$, что если для любого сколь угодно малого $\alpha > 0$ при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$

$$h_n = o\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right),$$

то

$$\sup_{t \in T} \left| \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^i(t_k, \omega) - B_n^i(t_{k-1}, \omega)] - \sum_{i=1}^r (S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^i(s, \omega) \right| \rightarrow 0$$

для почти всех $\omega \in \Omega$. Здесь (u_n) и $(\bar{B}_n)$ — произвольные представители $\tilde{u}$ и $\tilde{B}$ соответственно.

4. Смешанный случай. В этом пункте мы рассматриваем задачу аппроксимации одновременно стохастического интеграла Ито и стохастического интеграла Стратоновича конечными суммами элементов из прямого произведения алгебр обобщенных случайных процессов. Подобные исследования, насколько нам известно, проводятся впервые.

Рассмотрим случай $r = 2$. Пусть обобщенный случайный процесс броуновского движения $\tilde{B}(t, \omega)$ из $\mathcal{G}(T, \Omega)^2$ имеет вид: $\tilde{B} = [(\bar{B}_n)] = ([B_n^1], [B_n^2])$, где $B_n^1(t, \omega) = (B^1 * \rho_n)(t, \omega)$, $B_n^2(t, \omega) = (B^2 * \rho_n^1)(t, \omega)$, $\rho_n(t)$ из (1.1), а $\rho_n^1(t) = \varphi(n) \rho(\varphi(n)t)$, $n \in \mathbf{N}$, $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — монотонно неубывающая функция. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. Для любой $u \in C_B^2(\mathbf{R}^2)$ и двумерного стандартного случайного процесса $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения $\bar{B}(t, \omega)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in T} \mathbf{E} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^i(t_k, \omega) - B_n^i(t_{k-1}, \omega)] - (S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^1(s, \omega) - (I) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^2(s, \omega) \right\}^2 \\ & \leq \frac{C}{n^{1/3}} + Ch_n + Cn^2 h_n^2 + \frac{C}{\varphi(n) h_n}, \end{aligned}$$

где $u_n(s) = (u * \bar{\rho}_n)(s)$, а $\bar{\rho}_n$ из (2.3).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай Ито. Используя ту же методику доказательства, что и в теореме 1, получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^2(t_k, \omega) - B_n^2(t_{k-1}, \omega)] - (I) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^2(s, \omega) \right\}^2 \\ & \leq \frac{C}{\varphi(n) h_n} + \frac{C}{\varphi(n)} + Ch_n + \frac{C}{n^2 h_n}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

А теперь оценим разность

$$\sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] - (S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^1(s, \omega).$$

Выберем такое $N = N(h_n): (0, 1) \rightarrow \mathbf{Z}^+$, что $h_n N(h_n) = \tilde{\delta} \rightarrow 0$, $N(h_n) \rightarrow \infty$, $1/n = o(\tilde{\delta})$ при $h_n \rightarrow 0$. Без существенного ограничения общности предположим, что $t = ph_n = NMh_n = M\tilde{\delta}$.

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^1(t_k, \omega) - B_n^1(t_{k-1}, \omega)] \\ & - (S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^1(s, \omega) \\ & = \left\{ \sum_{l=1}^M u_n(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega)) [B_n^1(l\tilde{\delta}, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega)] \right. \\ & \quad \left. - (I) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^1(s, \omega) \right\} \\ & + \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \left[u_n(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - u_n(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega)) \right] \right. \\ & \quad \left. \times [B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega)] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{B}(s, \omega)) ds \right\} = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Для J_1 , используя (4.1), получаем следующую оценку:

$$\mathbf{E}[J_1]^2 \leq \frac{C}{n^2 \tilde{\delta}} + \frac{C}{n \tilde{\delta}} + C \tilde{\delta} + \frac{C}{n}.$$

Представим слагаемое J_2 в виде

$$\begin{aligned} J_2 = & \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \left[u_n(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega)) - u_n(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega)) \right] \right. \\ & \times [B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega)] \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M \frac{\partial u_n}{\partial x_1}(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega)) [B_n^1(l\tilde{\delta}, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega)]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l=1}^M \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \left(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B_n^1(l\tilde{\delta}, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x_1} (\bar{B}(s, \omega)) ds \right\} = I_{21} + \frac{1}{2} I_{22}.$$

Применяя методику, предложенную в доказательстве теоремы 3, получаем следующую оценку для $E[I_{22}]^2$:

$$E[I_{22}]^2 \leq C \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\varphi(n)} \right) + \frac{C}{n\tilde{\delta}} + C\Delta,$$

где $\Delta = O(\tilde{\delta})$.

Исследуем теперь I_{21} . Применяя многомерную формулу Тейлора, можем получить

$$\begin{aligned} I_{21} \leq & \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \left(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right) \right. \right. \\ & \times \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ & \times \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \Big\} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \left(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right) \left[B_n^1(l\tilde{\delta}, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \Big\} \\ & + \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \left(\bar{B}_n((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right) \right. \\ & \times \left[B_n^2((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^2((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ & \times \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \Big\} \\ & + 2 \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2} (\theta_1) \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\ & \times \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\ & + 2 \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2} (\theta_2) \left[B_n^2((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^2((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\ & \times \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\ & = I_{21}^1 + I_{21}^2 + I_{21}^3 + I_{21}^4. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера, для I_{21}^3 находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(I_{21}^3)^2 &\leq MN \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \mathbf{E} \left\{ \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \right. \\ &\quad \times \left. \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \right\}^2 \\ &\leq CM^2 N^2 \tilde{\delta}^2 n h_n^2 \leq Cn \tilde{\delta}^2. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка получается для $\mathbf{E}(I_{21}^4)^2$.

Представим I_{21}^2 в виде:

$$\begin{aligned} I_{21}^2 &= I_{21}^2 - \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \left(B_n^1\left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{n}, \omega\right), B_n^2\left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{\varphi(n)}, \omega\right) \right) \\ &\quad \times \left[B_n^2((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^2((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ &\quad \times \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\ &\quad + \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \left(B_n^1\left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{n}, \omega\right), B_n^2\left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{\varphi(n)}, \omega\right) \right) \\ &\quad \times \left[B_n^2((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^2((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ &\quad \times \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] = I_{21}^{21} + I_{21}^{22}. \end{aligned}$$

Оценим I_{21}^{21} и I_{21}^{22} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(I_{21}^{21})^2 &\leq CMN \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \mathbf{E} \left\{ \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega) - B_n^1\left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{n}, \omega\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left[B_n^2((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^2((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ &\quad \times \left. \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \right\}^2 \\ &\quad + CMN \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \mathbf{E} \left\{ \left[B_n^2((l-1)\tilde{\delta}, \omega) - B_n^2\left((l-1)\tilde{\delta} - \frac{1}{\varphi(n)}, \omega\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left[B_n^2((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^2((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ &\quad \times \left. \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \right\}^2 \\ &\leq C\tilde{\delta} + \frac{C\tilde{\delta}n}{\varphi(n)} \leq C\tilde{\delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(I_{21}^{22})^2 &\leq C \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \mathbf{E} \left[B_n^2((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^2((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\ &\quad \times \mathbf{E} \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right]^2 \\ &\leq CMN \tilde{\delta} n h_n^2 \leq Cn \tilde{\delta} h_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим I_{21}^1 . Воспользуемся следующим тождеством:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^N \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right] \\ &\quad \times \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[B_n^1(l\tilde{\delta}, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta}, \omega) \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right]^2. \end{aligned}$$

В результате имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(I_{21}^1)^2 &\leq CMN \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \mathbf{E} \left[B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + kh_n, \omega) \right. \\ &\quad \left. - B_n^1((l-1)\tilde{\delta} + (k-1)h_n, \omega) \right]^4 \\ &\leq CM^2 N^2 n^2 h_n^4 \leq Cn^2 h_n^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}(I_{21})^2 \leq Cn\tilde{\delta} + C\tilde{\delta} + Cn^2 h_n^2.$$

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда, если $\varphi(n) \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ так, что $h_n = o(1/n)$, $1/\varphi(n) = o(h_n)$, то

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in T} \mathbf{E} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^p u_n(\overline{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^i(t_k, \omega) - B_n^i(t_{k-1}, \omega)] \right. \\ &\quad \left. - (S) \int_0^t u(\overline{B}(s, \omega)) dB^1(s, \omega) - (I) \int_0^t u(\overline{B}(s, \omega)) dB^2(s, \omega) \right\}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема 6. Пусть функция $u \in C_B^1(\mathbf{R}^2)$, а $\overline{B}(t, \omega)$ — двумерный стандартный случайный процесс $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения. Тогда если для любых сколь угодно малых $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ $\varphi(n) \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ так, что

$$h_n = o\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right), \quad \frac{1}{\varphi(n)} = o(h_n^{1+\delta}),$$

то

$$\sup_{t \in T} \left| \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^p u_n(\bar{B}_n(t_{k-1}, \omega)) [B_n^i(t_k, \omega) - B_n^i(t_{k-1}, \omega)] - (S) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^1(s, \omega) - (I) \int_0^t u(\bar{B}(s, \omega)) dB^2(s, \omega) \right|^2 \rightarrow 0$$

для почти всех $\omega \in \Omega$. Здесь u_n и $\bar{B}_n = (B_n^1, B_n^2)$ такие же, как и в теореме 5.

З а м е ч а н и е. Пусть функция $u \in C^2(\mathbf{R})$, B — одномерный стандартный процесс $\mathcal{F}_t$ -броуновского движения,

$$u_n = u * \rho_n, \quad B'_n = B * \rho_n, \quad B''_n = B * \rho_n^1,$$

а ρ_n и ρ_n^1 выбираем такими же, как и в теореме 5. Тогда из теорем 1 и 3 вытекает, что выражения

$$S_{np}^m(t, \omega) = \sum_{k=1}^p u_n(B'_n(t_{k-1}, \omega)) [B'_n(t_k, \omega) - B'_n(t_{k-1}, \omega)],$$

$$I_{np}^m(t, \omega) = \sum_{k=1}^p u_n(B''_n(t_{k-1}, \omega)) [B''_n(t_k, \omega) - B''_n(t_{k-1}, \omega)]$$

при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $\lambda_m \rightarrow 0$ аппроксимируют стохастический интеграл

$$\int_0^t u(B(s, \omega)) dB(s, \omega), \quad t \in T, \quad (4.2)$$

понимаемый, соответственно, в смысле Ито или Стратоновича.

Таким образом, учитывая связь между стохастическими интегралами Ито и Стратоновича (см. доказательство теоремы 3), получаем, что при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $\lambda_m \rightarrow 0$ разность $S_{np}^m - I_{np}^m$ сходится в $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ равномерно по $t \in T$ к интегралу

$$\frac{1}{2} \int_0^t u'(B(s, \omega)) ds.$$

Подобная ситуация возникла в результате того, что почти все траектории случайного процесса B имеют неограниченную вариацию на любом отрезке. Для случайных процессов с более гладкими траекториями поведение разности будет иным. Так, например, если траектории случайного процесса в интеграле типа (4.2) — из класса $C^1(\mathbf{R})$, то рассматриваемая разность будет сходиться к нулю.

В общем случае предельное поведение выражения вида $S_{np}^m - I_{np}^m$ при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $\lambda_m \rightarrow 0$ будет зависеть от степени гладкости функций в стохастическом интеграле и способа их аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schwartz L.* Théorie des distributions. I-II. Paris: Hermann, 1950.
2. *Dirac P. A.* Theory of emission and absorption of radiation. — Proc. Roy. Soc. Serie A, 1927, v. 114, p. 243–262.
3. *Mikusinski J.* On the square of the Dirac delta distribution. — Bull. Acad. Polish. Sci., 1966, v. 14, № 9, p. 511–513.
4. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М.: Мир, 1976, 311 с.
5. *Ливчак Я. Б.* К теории обобщенных функций. — Труды Рижского алгебр. семинара, 1969, с. 98–164.
6. *Colombeau J. F.* A multiplication of distributions. — J. Math. Anal. Appl., 1983, v. 94, № 1, p. 96–115.
7. *Oberguggenberger M.* Distributions associated with multiplication of distributions in the Colombeau algebra. — Boll. unione mat. ital., 1986, t. 5-A, № 6, p. 423–429.
8. *Todorov T. D.* Sequential approach to Colombeau's theory of generalized functions. — International Centre for Theoretical Physics. Trieste, 1987, v. 126.
9. *Егоров Ю. В.* К теории обобщенных функций. — Успехи матем. наук, 1990, т. 45, в. 5, с. 3–40.
10. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Об общем методе построения алгебр обобщенных функций. — Докл. АН СССР, 1991, т. 318, № 2, с. 267–270.
11. *Гельфанд И. М.* Обобщенные случайные процессы. — Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 5, с. 853–856.
12. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. (Обобщенные функции. В. 4.) М.: Физматгиз, 1961, 472 с.
13. *Урбаник К.* Случайные процессы, реализации которых являются обобщенными функциями. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. I, в. 1, с. 146–149.
14. *Лазакович Н. В.* Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов. — Докл. АН Беларуси, 1994, т. 38, № 5, с. 23–27.
15. *Лазакович Н. В.* Аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений конечно-разностными. — Докл. АН Беларуси, 1995, т. 39, № 3, с. 20–22.
16. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 448 с.
17. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
18. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975, 320 с.
19. *Худа Т.* Броуновское движение. М.: Наука, 1987, 304 с.
20. *Wong E., Zakai M.* On the relationship between ordinary and stochastic differential equations. — Internat. J. Engin. Sci., 1965, v. 3, p. 213–229.
21. *Мацкявичюс В.* Некоторые аппроксимации стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений. — Литов. матем. сб., 1978, т. 18, № 3, с. 101–108.
22. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989, 320 с.

Поступила в редакцию
3.VII.1995