Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Новиков, Мартингалы, тауберова теорема и стратегии азартных игр, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 810–826

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 06:53:32

© 1996 г.

НОВИКОВ А. А.*

МАРТИНГАЛЫ, ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА
И СТРАТЕГИИ АЗАРТНЫХ ИГР

В работе с помощью тауберовой теоремы получено асимптотическое соотношение, связывающее хвост распределения квадратической характеристики мартингала с математическим ожиданием его терминального значения. В случае мартингалов с непрерывным временем доказывается следующий результат: если τ — момент остановки стандартного винеровского процесса W_t , случайная величина W_τ интегрируема, то

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(P\{\tau > t\} \sqrt{t} \right) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} |EW_\tau|. \quad (1)$$

Используя соответствующий результат для мартингалов с дискретным временем, мы изучаем асимптотические свойства некоторых стратегий азартных игр и, в частности, стратегии Оскара.

Ключевые слова и фразы: непрерывные мартингалы, мартингалы с дискретным временем, винеровский процесс, преобразование Лапласа, стохастическая экспонента, нелинейные граничные задачи.

1. Введение. Толчком к написанию данной работы явились результаты К. Боровкова [1] об асимптотическом поведении времени достижения уровня капитала игрока, использующего так называемую оскарговскую стратегию игры. Как оказалось (см. п. 5 ниже), для изучения свойств этой и других подобных стратегий полезны соотношения, связывающие квадратическую характеристику мартингала с математическим ожиданием его терминального значения. Впервые результат такого типа был получен А. Вальдом [2] (см. также [3]). Для формулировки одного из наиболее полезных результатов в этом направлении введем следующие обозначения. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}_t$ (см. терминологию в [4]); мартингалы с дискретным временем параметром трактуются здесь как частный случай мартингалов с непрерывным временем) и $\xi_t \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2$ (классу локально квадратично интегрируемых мартингалов, $\xi_0 = 0$). Пусть $\langle \xi \rangle_t$ — квадратическая характеристика, то есть такой предсказуемый процесс, что $(\xi_t^2 - \langle \xi \rangle_t) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$.

*Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

Тогда

$$\mathbf{E}\sqrt{\langle \xi \rangle_\infty} < \infty \implies \mathbf{E}\xi_\infty = 0. \quad (2)$$

Этот результат для случая мартингалов с дискретным временем установлен в [5]; в случае стохастических интегралов по винеровскому процессу (непрерывных мартингалов) он впервые доказан в [6]. Оказывается, тождество $\mathbf{E}\xi_\infty = 0$ (которое мы называем тождеством Вальда) может выполняться и в случае $\mathbf{E}\sqrt{\langle \xi \rangle_\infty} = \infty$ (но, конечно, при условии $\mathbf{E}|\xi_\infty| < \infty$). Везде далее будут использоваться следующие обозначения:

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-}, \quad x^+ = \max(x, 0), \quad x^- = -(x \wedge 0) = -\min(x, 0),$$

C — положительная конечная константа (может быть, с индексом).

В п. 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\xi_t \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2$, $\sup_t |\Delta \xi_t| < C$, $\langle \xi \rangle_\infty < \infty$ п.н., $\mathbf{E}\xi_\infty^+ < \infty$ или $\mathbf{E}\xi_\infty^- < \infty$. Тогда

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{\langle \xi \rangle_\infty > t\}\sqrt{t}) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} |\mathbf{E}\xi_\infty|. \quad (3)$$

Следствие. Пусть τ — момент остановки стандартного винеровского процесса W_t , $\mathbf{E}W_\tau^+ < \infty$ или $\mathbf{E}W_\tau^- < \infty$. Тогда справедливо неравенство (1) и, в частности, если дополнительно $\mathbf{E}|W_\tau| < \infty$, то

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{\tau > t\}\sqrt{t}) = 0 \implies \mathbf{E}W_\tau = 0. \quad (4)$$

Последний результат является небольшим усилением одного из результатов работы [7] (в [7] рассматривался случай общих процессов с независимыми приращениями). Результат следствия естественным образом дополняет следующий результат работы [8] относительно равномерной интегрируемости непрерывных локальных мартингалов: если $\sup_{t>0} \mathbf{E}|W_{t \wedge \tau}| < \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{\tau > t\}\sqrt{t}) = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}|W_{t \wedge \tau}| = \mathbf{E}|W_\tau|.$$

Доказательство в [8] основано на использовании так называемых «лямбда-хороших» неравенств и является довольно техническим (возможно поэтому оно до сих пор и не обобщено на случай разрывных мартингалов). Доказательство теоремы 1 намного проще. Оно основано на использовании экспоненциальных мартингалов и чисто аналитического факта (тауберовой теоремы) о связи асимптотики преобразования Лапласа и хвоста распределения случайных величин (этот метод уже был использован автором в работах [7], [9] и [10] в контексте задач о пересечении нелинейных границ процессами с независимыми приращениями; см. также теорему 2 в п. 3). Мы приводим доказательство теоремы 1 раздельно для случая непрерывных мартингалов (см. п. 2) и мартингалов с дискретным временем (п. 4). Отметим, что чуть менее общий

результат был представлен в [7] для непрерывных мартингалов и в [11] для мартингалов с дискретным временем (см. замечание 3 ниже в п. 4). Естественный вопрос состоит в том, когда в (2) вместо знака « $\geq$ » можно поставить « $=$ » и, возможно, при этом же « $\liminf = \lim$ ». На самом деле, как будет видно из доказательства теоремы 1 (см. леммы 1 и 2 ниже), достаточным условием для выполнения указанных равенств являются, например, равномерное условие Крамера (т.е. $\sup_{t>0} E \exp(\lambda \xi_t) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$) и некоторые соотношения для квадратической характеристики $\langle \xi \rangle_\infty$, которые и выполнены, в частности, для мартингалов с ограниченными скачками (см. лемму 3 ниже), а также для мартингалов с неограниченными скачками, но при специфических ограничениях (см. доказательство теоремы 3 в п. 5). В то же время мы приводим простые примеры (см. п. 2), в которых левая часть (2) строго больше правой, а также пример, в котором $\liminf_{t \rightarrow \infty} (P\{\langle \xi \rangle_\infty > t\} \sqrt{t}) = 0$, но $E \xi_\infty^+ = E \xi_\infty^- = \infty$.

Доказательство теоремы 1 в случае произвольных разрывных мартингалов с непрерывным временем проводится с использованием дополнительных понятий и фактов (меры скачков, стохастические экспоненты, и т.д.) и будет представлено в другой публикации.

В п. 4 на основе результата теоремы 1 (точнее, леммы 2 и леммы 3, которые используются при доказательстве этой теоремы) изучается асимптотическое поведение характеристик некоторых стратегий «справедливых» азартных игр, в которых капитал игрока есть мартингал вида $\xi_t = \sum_{k=1}^t Y_k X_k$, где X_k — независимые бернуллиевские случайные величины, $P\{X_k = 1\} = P\{X_k = -1\} = \frac{1}{2}$, Y_k — предсказуемый процесс (ставка, стратегия),

$$Y_k = \min(Y_{k-1} + I\{X_{k-1} = 1\}, N - \xi_{k-1}), \quad Y_1 = 1,$$

N — целое число, $I\{\}$ — индикаторная функция.

Вопрос состоит в том, какова асимптотика хвоста распределения момента остановки $\sigma_N = \inf\{t > 0: \xi_t \geq N\}$.

В работах [12], [13] оscarовская стратегия изучалась методами теории марковских процессов (пара (ξ_k, Y_k) представляет собой в случае оscarовской стратегии двумерный марковский процесс) и с помощью компьютерного моделирования при произвольном значении вероятности $P\{X_k = 1\}$. К. Боровков в работе [1], используя технику аппроксимации случайных блужданий винеровским процессом и некоторые результаты из [9] относительно асимптотики хвоста распределения времени достижения винеровским процессом нелинейных границ (см. также ниже теорему 2), показал, что в случае $P\{X_k = 1\} = \frac{1}{2}$ (это наиболее интересный с математической точки зрения случай) выполняется соотношение

$$P\{\sigma_N > t\} = O(t^{-3/2} \log t), \quad t \rightarrow \infty.$$

В п. 5 будет показано, что если $1 \leq Y_k \leq Ck^\beta$ при некотором $\beta \geq 0$ и выполнено некоторое условие типа закона больших чисел для процесса $\sum_{k=1}^t Y_k^2$ (эти условия верны для оscarовской стратегии при $\beta = 1$), то

$$P\{\sigma_N > t\} \asymp t^{-\beta-1/2}$$

(запись $x(t) \asymp y(t)$ означает, что $C_1 x(t) \leq y(t) \leq C_2 x(t)$ при достаточно больших t).

2. Случай непрерывных мартингалов. Пусть $\xi_t \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$, где $\mathcal{M}_{\text{loc}}^c$ — класс локальных непрерывных мартингалов с $\xi_0 = 0$, и $\langle \xi \rangle_\infty < \infty$ п.н. (при этом условии существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t := \xi_\infty$).

Лемма 1. Если $\sup_{t>0} E \exp(\lambda \xi_t) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$, то $0 \leq E \xi_\infty < \infty$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (P\{\langle \xi \rangle_\infty > t\} \sqrt{t}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E \xi_\infty. \quad (5)$$

Доказательство. Положим

$$\lambda_+ = \sup \left\{ \lambda > 0: \sup_{t>0} E \exp(\lambda \xi_t) < \infty \right\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$E \exp(\lambda \xi_\infty) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} E \exp(\lambda \xi_t) < \infty$$

и процесс ξ_t^+ — равномерно интегрируемый.

Пусть τ_n — локализующая последовательность моментов остановки для ξ_t , $\tau_n \rightarrow \infty$ п.н., $n \rightarrow \infty$. По определению локальных мартингалов $E \xi_{t \wedge \tau_n}^+ = E \xi_{t \wedge \tau_n}^-$, и поэтому по лемме Фату

$$E \xi_\infty^- \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} E \xi_{t \wedge \tau_n}^+ = E \xi_\infty^+ < \infty.$$

Следовательно,

$$0 \leq E \xi_\infty = E \xi_\infty^+ - E \xi_\infty^- < \infty.$$

Рассмотрим теперь экспоненциальный локальный мартингал

$$\Xi_t(\lambda) = \exp \left\{ \lambda \xi_t - \frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_t}{2} \right\}, \quad 0 < \lambda < \lambda_+.$$

В силу условия леммы 1 процесс $\Xi_t(\lambda)$ является равномерно интегрируемым и поэтому

$$E \Xi_\infty(\lambda) = 1, \quad 0 < \lambda < \lambda_+.$$

Теперь покажем, что

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{E} \exp \left\{ - \frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right\} &= \mathbf{E} \left[\Xi_\infty(\lambda) - \exp \left\{ - \frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right\} \right] \\ &= \lambda \mathbf{E} \left[\lambda^{-1} (\exp(\lambda \xi_\infty) - 1) \exp \left\{ - \frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right\} \right], \quad 0 < \lambda < \lambda_+. \end{aligned}$$

В силу неравенств $|e^x - 1| \leq x^+ e^x$ и $\mathbf{E}|\xi_\infty| \exp(\lambda \xi_\infty) < \infty$, $0 < \lambda < \lambda_+$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$1 - \mathbf{E} \exp \left\{ - \frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right\} = \lambda \mathbf{E} \xi_\infty + o(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Полагая $\lambda^2/2 = u$ и интегрируя по частям в левой части, получим

$$\int_0^\infty \exp(-ut) \mathbf{P}\{\langle \xi \rangle_\infty > t\} dt = \sqrt{\frac{2}{u}} \mathbf{E} \xi_\infty + o\left(\sqrt{\frac{1}{u}}\right), \quad u \rightarrow 0.$$

Теперь, применяя классическую тауберову теорему (см., например, [13]), согласно которой для любой монотонной неотрицательной функции $f(t)$ и константы $F \geq 0$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sqrt{u} \int_0^\infty \exp(-ut) f(t) dt = F \iff \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \sqrt{t} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} F,$$

получаем утверждение леммы 1.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим марковский момент

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0: \xi_t \geq A\}, \quad A > 0,$$

предполагая (как всегда), что $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Остановленный локальный мартингал $\xi_t^A = \xi_{t \wedge \tau_A} \leq A$ удовлетворяет условию леммы 1, неравенству $\langle \xi^A \rangle_\infty = \langle \xi \rangle_{\tau_A} \leq \langle \xi \rangle_\infty$ п.н., и поэтому для любого $A > 0$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{\langle \xi \rangle_\infty > t\} \sqrt{t}) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbf{E} \xi_{\tau_A}.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{E} \xi_{\tau_A} = \mathbf{E}(I\{\tau_A = \infty\} \xi_\infty) + A \mathbf{P}\{\tau_A = \infty\} \geq \mathbf{E}(I\{\tau_A = \infty\} \xi_\infty).$$

Поскольку $\tau_A \uparrow \infty$ п.н., $A \rightarrow \infty$, по теореме о монотонной сходимости (напомним, что существование $\mathbf{E} \xi_\infty$ предполагается) получаем

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \mathbf{E}(I\{\tau_A = \infty\} \xi_\infty) = \mathbf{E} \xi_\infty.$$

Таким образом, мы показали, что левая часть (3) не меньше, чем $\sqrt{2/\pi} \mathbf{E} \xi_\infty$. Повторяя эти же рассуждения с марковским моментом $\tau_A =$

$\inf\{t \geq 0: \xi_t \leq -A\}$, $A > 0$, мы заключаем, что левая часть (3) не меньше, чем $\sqrt{2/\pi} E(-\xi_\infty)$. Это и завершает доказательство теоремы 1.

З а м е ч а н и е 1. Равенство (5) может выполняться, когда равномерное условие Крамера не выполнено, но, к примеру, $E\xi_\infty^- < \infty$ и выполнено следующее условие:

$$\sup_{t>0} \left(\lambda \xi_t - \frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_t}{2} \right) < C, \quad 0 < \lambda < \varepsilon,$$

где ε — некоторое положительное число (пример, в котором эти условия выполняются, появится в процессе доказательства теоремы 2 ниже). В самом деле, легко видеть, что в случае выполнения этих условий $E\xi_\infty(\lambda) = 1$, $0 < \lambda < \varepsilon$, и, предполагая дополнительно, что $E\xi_\infty^+ < \infty$, мы также имеем (5) (по теореме о монотонной сходимости). В случае же $E\xi_\infty^+ = \infty$, можно применить тот же прием, что и выше с усечением мартингала ξ_t на уровне $A \rightarrow \infty$.

П р и м е р ы. 1) Пусть

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0: W_t = a\}.$$

Хорошо известно, что плотность распределения τ_a равна

$$(2\pi t^3)^{-1/2} |a| \exp \left\{ -\frac{a^2}{2t} \right\}, \quad t > 0,$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (P\{\tau_a > t\} \sqrt{t}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} |a|$$

(конечно, этот факт также следует из леммы 1). Рассмотрим теперь момент останова

$$\sigma_{a,b} = \inf\{t \geq \tau_a: W_t = b\}.$$

В силу симметричности распределения винеровского процесса и его строго марковского свойства (или, по принципу отражения), нетрудно проверить, что при $a > 0$ и $a > b$

$$P\{\sigma_{a,b} > t\} = P\{\tau_{2a-b} > t\}, \quad t \geq 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (P\{\sigma_{a,b} > t\} \sqrt{t}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2a - b).$$

Поскольку $W_{\sigma_{a,b}} = b$ и $2a - b > |b|$, мы получаем строгое неравенство в (3).

2) Пусть σ — неотрицательная случайная величина с распределением $P\{\sigma > t\} = (t+1)^{-1/2}$, $t > 0$, и σ не зависит от винеровского процесса

W_t . Определим локальный непрерывный мартингал следующим образом:

$$\xi_t = \int_0^{t \wedge \sigma} g(s) dW_s,$$

где $g(s)$ — неслучайная положительная функция. Используя, к примеру, замену времени, легко увидеть, что в данном примере

$$E\xi_\infty^+ = E\xi_\infty^- = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(\sqrt{\langle \xi \rangle_\infty})$$

с $\langle \xi \rangle_\infty = G(\sigma)$, $G(t) = \int_0^t g^2(s) ds$. Обозначим через $Q(t)$ обратную функцию для $G(t)$. Тогда

$$P\{\langle \xi \rangle_\infty > t\} = P\{\sigma > Q(t)\} \sim (Q(t))^{-1/2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Положим теперь $g^2(t) = (\log t)^{-\alpha}$, $t > 2$, $\alpha > 0$, и $g(t) = 1$ для $0 \leq t \leq 2$. Тогда по свойству регулярных функций (см., например, [15])

$$G(t) \sim t(\log t)^{-\alpha}, \quad Q(t) \sim t(\log t)^\alpha, \quad t \rightarrow \infty,$$

и поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (P\{\langle \xi \rangle_\infty > t\} \sqrt{t}) = 0. \quad (6)$$

С другой стороны, легко проверить, что в этом примере при $0 < \alpha < 2$

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} E\xi_\infty^+ &= \sqrt{2\pi} E\xi_\infty^- = E\sqrt{\langle \xi \rangle_\infty} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (G(t))^{-1/2} g^2(t) (t+1)^{-1/2} dt = \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (6) само по себе не влечет за собой существование математического ожидания случайной величины ξ_∞ .

Было бы интересно построить пример (автору это не удалось), в котором $E|\xi_\infty| < \infty$ и выполняются следующие соотношения:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (P\{\langle \xi \rangle_\infty > t\} \sqrt{t}) > \liminf_{t \rightarrow \infty} (P\{\langle \xi \rangle_\infty > t\} \sqrt{t}) = 0.$$

3. Время первого пересечения винеровским процессом односторонней нелинейной границы.

Теорема 2. Пусть W_t — стандартный винеровский процесс,

$$\tau_f = \inf \{t \geq 0: W_t = f(t)\},$$

где $f(t)$ есть непрерывная монотонная функция, $f(0) > 0$. Тогда $0 \leq EW_{\tau_f} \leq \infty$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (P\{\tau_f > t\} \sqrt{t}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} EW_{\tau_f}. \quad (7)$$

Если, дополнительно, $f(t)$ — неубывающая функция, то $EW_{\tau_f} > 0$ и

$$EW_{\tau_f} < \infty \iff \int_1^\infty f(t)t^{-3/2}dt < \infty. \quad (8)$$

Кроме того, если $f(t)$ — невозрастающая функция, то $E\tau_f < \infty$ и

$$EW_{\tau_f} > 0 \iff \int_1^\infty |f(t)|t^{-3/2}dt < \infty. \quad (9)$$

Этот результат доказан в [10] при дополнительном предположении о выпуклости функции $f(t)$ (имеется в виду случай невозрастающих функций), используя тауберову теорему и другие, довольно громоздкие, аргументы. Приводимое ниже (для полноты изложения) доказательство для случая неубывающих границ без предположения о выпуклости основано, фактически, на неравенстве Чебышева. Этот же метод доказательства будет использован в п. 5.

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $f(t)$ — неубывающая функция такая, что $\tau_f < \infty$ п.н. (если $P\{\tau_f = \infty\} > 0$, то результат теоремы тривиален). Тогда в силу непрерывности траекторий винеровского процесса выполнено равенство $W_{\tau_f} = f(\tau_f)$. Интегрируя по частям, имеем

$$EW_{\tau_f} = Ef(\tau_f) < \infty \iff \int_1^\infty P\{\tau_f > t\}df(t) < \infty.$$

Поскольку

$$P\{\tau_f > t\} \geq P\{\tau_{f(0)} > t\} = P\{W_s < f(0), s \leq t\} \sim Ct^{-1/2}, \quad t \rightarrow \infty,$$

получаем (опять интегрированием по частям)

$$EW_{\tau_f} < \infty \implies \int_1^\infty f(t)t^{-3/2}dt < \infty.$$

Предположим теперь, что $\int_1^\infty f(t)t^{-3/2}dt < \infty$. В силу монотонности функции $f(t)$ имеем

$$f(t) \leq 2\sqrt{t} \int_t^\infty f(s)s^{-3/2}ds = o(\sqrt{t}), \quad t \rightarrow \infty,$$

и поэтому $f(t) \leq C_1\sqrt{t} + C_2$ для всех $t > 0$. Этот факт влечет за собой оценку $W_{t \wedge \tau_f} \leq C_1\sqrt{t \wedge \tau_f} + C_2$, и, следовательно,

$$\sup_{t>0} \left(\lambda W_{t \wedge \tau_f} - \frac{1}{2} \lambda^2 t \wedge \tau_f \right) \leq \frac{C_1^2}{2} + \lambda C_2, \quad \lambda > 0.$$

Теперь ясно, что выполнено соотношение (7) (в силу замечания 1). Кроме того, мы можем применить неравенство Чебышева в следующей форме: при всех $\lambda > 0$, $\kappa > 0$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tau_f \wedge \kappa > t\} &= \mathbf{P}\left\{1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_f \wedge \kappa\right) > 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_f \wedge \kappa\right)\right\} \\ &\leq \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\right)^{-1} \mathbf{E}\left[\left(\exp(\lambda W_{\kappa \wedge \tau_f}) - 1\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_f \wedge \kappa\right)\right] \\ &\leq \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\right)^{-1} \lambda \mathbf{E}\left[f(\tau_f \wedge \kappa) \exp\left(\frac{1}{2}C_1^2 + \lambda C_2\right)\right], \end{aligned}$$

где мы использовали неравенство $e^x - 1 \leq x^+ e^x$. Полагая далее $\lambda = t^{-1/2}$, получим, что при любых $t > 1$ и $\kappa > 0$

$$\mathbf{P}\{\tau_f \wedge \kappa > t\} \leq C_3 t^{-1/2} \mathbf{E}f(\tau_f \wedge \kappa) \quad (10)$$

с константой $C_3 = (1 - 1/\sqrt{e})^{-1} \exp(\frac{1}{2}C_1^2 + C_2)$.

Чтобы показать, что это неравенство приводит к импликации (8), заметим, что условие $\int_1^\infty f(s)s^{-3/2}ds < \infty$ влечет за собой существование такой монотонной непрерывной неотрицательной функции $g(t)$, что $f(t) = o(g(t))$, $t \rightarrow \infty$, и $\int_1^\infty g(s)s^{-3/2}ds < \infty$ (к примеру, $g(t) = f(t)(\int_t^\infty f(s)s^{-3/2}ds)^{-\alpha}$ с $0 < \alpha < 1$). Интегрируя обе части (10) по $dg(t)$ на интервале $(1, \infty)$, получаем для любого $\kappa > 0$

$$\mathbf{E}g(\tau_f \wedge \kappa) \leq \int_1^\infty \mathbf{P}\{\tau_f \wedge \kappa > t\} dg(t) + C \leq C_{11} \mathbf{E}f(\tau_f \wedge \kappa) + C. \quad (11)$$

Теперь заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая константа C_ε , что $f(t) \leq \varepsilon g(t) + C_\varepsilon$. Выбирая теперь $\varepsilon < 1/C_{11}$, находим следующую оценку (равномерную по $\kappa > 0$):

$$\mathbf{E}g(\tau_f \wedge \kappa) < (1 - \varepsilon C_{11})^{-1} C < \infty.$$

Переходя к пределу при $\kappa \rightarrow \infty$, заключаем, что $\mathbf{E}g(\tau_f) < \infty$ и, значит, $\mathbf{E}W_{\tau_f} = \mathbf{E}f(\tau_f) < \infty$.

Чтобы завершить рассмотрение случая неубывающих границ, остается только заметить, что выполнение равенства (7) в случае

$$\int_1^\infty f(s)s^{-3/2}ds = \infty$$

(т.е. когда $\mathbf{E}W_{\tau_f} = \infty$) вытекает непосредственно из теоремы 1.

Случай невозрастающих границ. В этом случае всегда $W_{t \wedge \tau_f} \leq f(0)$, и поэтому по лемме 1 справедливы неравенства $0 \leq \mathbf{E}W_{\tau_f} < \infty$, а

также соотношение (7). Поскольку $|W_{\tau_f}| = |f(\tau_f)|$, имеем $E|f(\tau_f)| < \infty$ и (интегрируя по частям) получаем, что

$$\int_1^\infty P\{\tau_f > t\} d|f(t)| < \infty.$$

Предположим теперь, что $EW_{\tau_f} > 0$. Тогда, в силу (7),

$$P\{\tau_f > t\} \sim Ct^{-1/2}, \quad t \rightarrow \infty,$$

и поэтому (опять интегрированием по частям) находим, что

$$\int_1^\infty t^{-1/2} d|f(t)| < \infty, \quad \int_1^\infty |f(t)| t^{-3/2} dt < \infty.$$

Таким образом, остается только показать, что

$$\int_1^\infty |f(t)| t^{-3/2} dt < \infty \implies EW_{\tau_f} > 0. \quad (9')$$

Этот факт доказан в [12] с использованием преобразования Гирсанова–Маруямы–Скорехода винеровской меры, которое для любой монотонной, выпуклой функции приводит к следующей оценке:

$$P\{\tau_f > t\} \sqrt{t} \geq C \exp \left\{ -C \int_1^t |f(t)| t^{-3/2} dt \right\} > 0. \quad (12)$$

Принимая во внимание соотношение (7) (см. также (4)), выводим импликацию (9').

З а м е ч а н и е 2. Оценка (12) была также получена (независимо) в работах [16] и [17] в связи с изучением асимптотики решения нелинейного параболического уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова. Было бы интересно найти элементарный способ доказательства этой оценки.

4. Случай мартингалов с дискретным временем. Здесь мы рассматриваем мартингалы $\xi_t \in \mathcal{M}_{loc}^2$, $t = 0, 1, \dots$, и используем следующие обозначения:

$$\Delta \xi_t = \xi_t - \xi_{t-}, \quad \langle \xi \rangle_t = \sum_{k=1}^t E[(\Delta \xi_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}],$$

предполагая всегда, что $\langle \xi \rangle_\infty < \infty$ п.н.

Определим предсказуемую функцию $\psi_k(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, из следующего соотношения:

$$E[\exp(\lambda \Delta \xi_k) | \mathcal{F}_{k-1}] := \exp(\psi_k(\lambda)).$$

Если $E[\exp(\lambda \Delta \xi_k) | \mathcal{F}_{k-1}] < \infty$ при некотором $\lambda = \lambda_0 < \infty$ и $E[\Delta \xi_k | \mathcal{F}_{k-1}] = 0$, то по неравенству Йенсена заключаем, что $\psi_k(\lambda)$, $0 \leq \lambda < \lambda_0$, есть неотрицательная выпуклая функция.

Теорема 1 для рассматриваемого класса мартингалов следует из следующего аналога леммы 1.

Лемма 2. Пусть $\sup_{t>0} E \exp(\lambda \xi_t) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$ и при всех достаточно малых $\lambda > 0$

$$\frac{\lambda^2}{2} \langle \xi \rangle_\infty (1 - \lambda \eta^-)^+ \leq \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2} \langle \xi \rangle_\infty (1 + \lambda \eta^+), \quad (13)$$

где η^- и η^+ — неотрицательные случайные величины, $E\eta^- < \infty$ и $E\eta^+ < \infty$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (P\{\langle \xi \rangle_\infty > t\} \sqrt{t}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E\xi_\infty. \quad (14)$$

Доказательство. В идейном плане доказательство этой леммы повторяет доказательство леммы 1, и поэтому некоторые очевидные теперь детали опускаются. Из условия леммы вытекает, что при $0 < \lambda < \lambda_+ = \sup\{\lambda > 0: \sup_{t>0} E \exp(\lambda \xi_t) < \infty\}$

$$0 \leq E\xi_\infty < \infty, \quad E \exp(\lambda \xi_\infty) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} E \exp(\lambda \xi_t) < \infty.$$

Рассмотрим теперь следующий экспоненциальный мартингал (так называемый фундаментальный вальдовский мартингал)

$$\Xi_t(\lambda) = \exp \left\{ \lambda \xi_t - \sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda) \right\}, \quad 0 < \lambda < \lambda_+.$$

Ясно, что $\Xi_t(\lambda)$ является равномерно интегрируемым мартингалом, и, значит,

$$E\Xi_\infty(\lambda) = 1, \quad 0 < \lambda < \lambda_+.$$

Далее, как и при доказательстве леммы 1, получаем асимптотическое соотношение

$$1 - E \exp \left\{ - \sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda) \right\} = \lambda E\xi_\infty + o(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$E \exp \left\{ - \sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda) \right\} = E \exp \left\{ - \frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right\} + o(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Этот факт доказывается на основе следующих оценок, справедливых в силу (13), неравенства $1 - e^{-x} \leq x^+$ и следующих оценок:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right\} - \mathbf{E} \exp \left\{ -\sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda) \right\} \\
 &= \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right\} \left(1 - \exp \left\{ -\left(\sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda) - \frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right) \right\} \right) \right] \\
 &\leq \frac{1}{2} \lambda \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right\} \lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty \eta^+ \right]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Поскольку функция $\exp(-x^+)x^+$ ограничена, $\mathbf{E}\eta^+ < \infty$ и $\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty \rightarrow 0$ п.н. при $\lambda \rightarrow 0$, по теореме о монотонной сходимости правая часть (15) есть $o(\lambda)$, $\lambda \rightarrow 0$.

Другая оценка выводится подобным же образом. Используя неравенство $1 - \exp(-x) \leq \min(x^+, 1)$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E} \exp \left\{ -\sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda) \right\} - \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{\lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty}{2} \right\} \\
 &\leq \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty (1 - \lambda \eta^-)^+ \right\} \min \left(\frac{1}{2} \lambda^3 \langle \xi \rangle_\infty \eta^-, 1 \right) \right] \\
 &\leq \mathbf{P}\{2\lambda \eta^- > 1\} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \left[I\{2\lambda \eta^- \leq 1\} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty \right\} \lambda^3 \langle \xi \rangle_\infty \eta^- \right] \\
 &\leq 2\lambda \mathbf{E} [I\{2\lambda \eta^- > 1\} \eta^-] \\
 &\quad + \frac{\lambda}{2} \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{4} \lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty \right\} \lambda^2 \langle \xi \rangle_\infty \eta^- \right] = o(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы для оценки первого слагаемого применили неравенство Чебышева, а для второго — теорему о мажорируемой сходимости.

Доказательство леммы 2 завершено.

Лемма 3 (Гальчук–Новиков, [9]). Если $\sup_{t>0} |\Delta \xi_t| < C$, то неравенства (13) справедливы с $\eta^- = \eta^+ = C$.

Далее доказательство теоремы 1 ничем, фактически, не отличается от приведенного выше для непрерывного случая и поэтому опускается.

З а м е ч а н и е 3. Результат теоремы 1 является небольшим усилением следующего результата, доказанного в [11]: если $\xi_t \in \mathcal{M}^2$, $\sup_{t>0} |\Delta \xi_t| < C$, $\langle \xi \rangle_\infty < \infty$ п.н., $\mathbf{E}|\xi_\infty| < \infty$, и существует такая положительная возрастающая функция $g(t)$, что

$$\mathbf{E}g(\langle \xi \rangle_\infty) < \infty \quad \text{и} \quad \int_1^\infty g(t)t^{-3/2}dt < \infty,$$

то $\mathbf{E}\xi_\infty = 0$.

В самом деле, если выполнены условия на функцию $g(t)$, то (интегрированием по частям) получим соотношения

$$\int_1^\infty \mathbf{P}\{(\xi)_\infty > t\} dg(t) < \infty \quad \text{и} \quad \int_1^\infty t^{-1/2} dg(t) < \infty.$$

Отсюда следует, что $\liminf_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{(\xi)_\infty > t\} \sqrt{t}) = 0$.

5. Асимптотические характеристики одного класса стратегий азартных игр. Пусть $\xi_t = \sum_{k=1}^t Y_k X_k$, $t = 0, 1, \dots$, $\mathbf{P}\{X_k = 1\} = \mathbf{P}\{X_k = -1\} = \frac{1}{2}$, X_k — независимые случайные величины, Y_k — предсказуемый процесс (стратегия, ставка), принимающий целочисленные значения, $1 \leq Y_k$. Положим

$$\sigma_N = \inf\{t \geq 1: \xi_t \geq N\}.$$

Перед выводом асимптотических результатов относительно $\mathbf{P}\{\sigma_N > t\}$, $t \rightarrow \infty$, покажем, что при единственном ограничении $Y_k \geq 1$ случайная величина σ_N конечна п.н.

Лемма 4. Если $Y_k \geq 1$, то $\mathbf{P}\{\sigma_N < \infty\} = 1$.

Доказательство. Рассмотрим, как всегда, экспоненциальный мартингал

$$\Xi_t(\lambda) = \exp \left\{ \lambda \xi_t - \sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda) \right\}, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (16)$$

где в рассматриваемом случае $\psi_k(\lambda) = \log \cosh(\lambda Y_k)$. Так как

$$\log \cosh(\lambda) \geq (\lambda - \log 2)^+,$$

то

$$\lambda \xi_{t \wedge \sigma_N} - \sum_{k=1}^{t \wedge \sigma_N} \psi_k(\lambda) \leq \lambda(N + Y_{t \wedge \sigma_N}) - (\lambda Y_{t \wedge \sigma_N} - \log 2).$$

Поэтому $\Xi_{t \wedge \sigma_N}(\lambda) \leq 2 \exp(\lambda N)$. Следовательно, $\Xi_{t \wedge \sigma_N}$ — равномерно интегрируемый мартингал такой, что $\mathbf{E} \Xi_{\sigma_N}(\lambda) = 1$. Заметим, что на множестве $\{\sigma_N = \infty\} = \{\sup_{t \geq 0} \xi_t < N\}$

$$\Xi_t(\lambda) \leq \exp \{ \lambda N - t \log \cosh(\lambda) \} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (\lambda > 0).$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$1 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{E}(I\{\sigma_N < \infty\} \Xi_{\sigma_N}(\lambda)) = \mathbf{P}\{\sigma_N < \infty\}.$$

Дополнительную информацию о моментах случайной величины σ_N можно получить из импликации (2). Действительно, если $Y_k \leq Ck^\beta$, $\beta \geq 0$, то в этом случае $(\xi)_{\sigma_N} \leq C\sigma_N^{2\beta+1} < \infty$ п.н., $\xi_{\sigma_N} \geq N > 0$ и поэтому

$E\sigma_N^{\beta+1/2} = \infty$. Из следующей теоремы следует, что, на самом деле, при указанных ограничениях сверху на Y_k и некотором требовании на рост $\sum_{k=1}^t Y_k^2$ справедлива оценка $E\sigma_N^\alpha < \infty$ при любом $\alpha < \beta + \frac{1}{2}$.

Теорема 3. Пусть $1 \leq Y_k \leq C_{15}k^\beta$, $\beta \geq 0$, и существуют такие константы C_1, C_2 и $\delta > 0$, что

$$P\left\{\sum_{k=1}^t Y_k^2 < C_1 t^{2\beta+1} - C_2 t^{2\beta+1-\delta}\right\} = O(t^{-\beta-1/2}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Тогда $P\{\sigma_N > t\} \asymp t^{-\beta-1/2}$.

Доказательство. Рассмотрим остановленный экспоненциальный мартингал $\Xi_{t \wedge \sigma_N}(\lambda)$, определенный в (16). Так как $\log \cosh(\lambda) \leq \lambda^2/2$, то

$$\sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^t Y_k^2 = \frac{\lambda^2}{2} \langle \xi \rangle_t, \quad (18)$$

то есть в рассматриваемом случае выполняется неравенство в правой части (13) с $\eta^+ = 0$.

Чтобы получить оценку снизу, применим элементарное неравенство $\log \cosh(\lambda) \geq (\lambda^2/2 - \lambda^3/3)^+$, $\lambda > 0$, которое дает

$$\sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda) \geq \frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^t \left[Y_k^2 \left(1 - \frac{2\lambda}{3} Y_k \right)^+ \right] \geq \frac{\lambda^2}{2} \langle \xi \rangle_t (1 - C\lambda t^\beta). \quad (19)$$

Это означает, что левое неравенство в (13) выполняется с $\eta^- = C\sigma_N^\beta$.

Теперь покажем, что $E\eta^- = C E\sigma_N^\beta < \infty$. Для этого воспользуемся тем же приемом с применением неравенства Чебышева, который уже использовался в доказательстве теоремы 2. Напомним, что $\Xi_{t \wedge \sigma_N}(\lambda) \leq 2 \exp(\lambda N)$. Получаем при любом $\kappa > 0$, достаточно малых $\lambda > 0$ и достаточно больших t

$$\begin{aligned} P\{\sigma_N \wedge \kappa > t\} &= P\left\{1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{\sigma_N \wedge \kappa} \psi_k(\lambda)\right) > 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^t \psi_k(\lambda)\right)\right\} \\ &\leq P\left\{\sum_{k=1}^t Y_k^2 < C_1 t^{2\beta+1} - C_2 t^{2\beta+1-\delta}\right\} \\ &\quad + \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2(C_1 t^{2\beta+1} - C_2 t^{2\beta+1-\delta})(1 - \lambda C t^\beta)^+\right\}\right]^{-1} \\ &\quad \times \lambda E\xi_{\sigma_N \wedge \kappa} 2 \exp(\lambda N). \end{aligned}$$

Положим теперь здесь $\lambda = t^{-2\beta-1}$. Поскольку $\xi_{\sigma_N \wedge \kappa} \leq N + C(\sigma_N \wedge \kappa)^\beta$, в силу условия (17) имеем при любом $\kappa > 0$

$$P\{\sigma_N \wedge \kappa > t\} \leq C t^{-\beta-1/2} + C t^{-\beta-1/2} E(\sigma_N \wedge \kappa)^\beta. \quad (20)$$

Интегрируя обе части этого неравенства по dt^α на интервале $(1, \infty)$ при $\beta < \alpha < \beta + \frac{1}{2}$, получим при любом $\kappa > 0$ и достаточно малых $\epsilon > 0$:

$$\mathbf{E}(\sigma_N \wedge \kappa)^\alpha \leq C + C\mathbf{E}(\sigma_N \wedge \kappa)^\beta \geq C + \epsilon \mathbf{E}(\sigma_N \wedge \kappa)^\alpha.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{E}(\sigma_N)^\alpha < \infty$. Переходя к пределу при $\kappa \rightarrow \infty$ в (20), заключаем, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{\sigma_N > t\} t^{\beta+1/2}) \leq C\mathbf{E}(\sigma_N)^\beta < \infty.$$

Чтобы получить нужную оценку снизу с помощью леммы 2, рассмотрим мартингал

$$\xi_t^* = \sum_{k=1}^t Y_k^* X_k, \quad Y_k^* = Y_k \wedge (N - \xi_{k-1}^*),$$

и момент останова $\sigma_N^* = \inf\{t > 0: \xi_t^* \geq N\}$. Важным обстоятельством здесь является то, что

$$\sigma_N^* \leq \sigma_N.$$

Этот факт был замечен К. Боровковым [1, Lemma 3] и доказывается он прямым сравнением траекторий мартингалов ξ_t и ξ_t^* до пересечения уровня N . В силу оценок $\mathbf{E}(\sigma_N)^\beta < \infty$, (18) и (19), условие (13) в лемме 2 выполнено, и поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma_N^*} Y_k^{*2} > t \right\} \sqrt{t} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbf{E} \xi_{\sigma_N^*}^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} N > 0.$$

Так как $Y_k^* \leq C_3 k^\beta$, то $\sum_{k=1}^t Y_k^{*2} \leq C_3 t^{2\beta+1} (1 + o(1)) / (2\beta + 1)$, $t \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{\sigma_N > t\} t^{\beta+1/2}) \geq \sqrt{\frac{4\beta+2}{\pi C_3}} N > 0. \quad (21)$$

Пример. О с к а р о в с к а я с т р а т е г и я (см. ее описание в п. 1). В данном случае $Y_k \leq k$ и $\beta = 1$. Вместо прямой проверки условия (17) применим тот же прием с усечением стратегии, что использовался выше (как уже отмечалось, этот прием был предложен К. Боровковым в [1]). Нетрудно убедиться в том, что

$$\sigma_N \leq \inf \left\{ t > 0: \xi_t^\# = \sum_{k=1}^t S_k X_k \geq N \right\} := \sigma_N^\#,$$

где $S_t = \sum_{k=2}^t X_{k-1}$, $S_1 = 1$.

Условие (17) для стратегии S_t легко проверяется. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^t S_k^2 &= \sum_{k=1}^t \left(S_k - \frac{k+1}{2} + \frac{k+1}{2} \right)^2 \geq \sum_{k=1}^t \left(S_k - \frac{k+1}{2} \right) (k+1) \\ &\quad + \sum_{k=1}^t \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 = \sum_{k=1}^t \frac{1}{2} \left(\sum_{i=2}^t X_{i-1} \right) (k+1) + \frac{t^3}{12} + O(t^2) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^t (t-k) X_{k-1} \right) + \frac{t^3}{12} - Ct^2, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

По экспоненциальному неравенству Чебышева для любого $\lambda > 0$ и $A > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^t S_k^2 < \frac{t^3}{12} - At^{5/2} \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^t (t-k) X_{k-1} < Ct^2 - At^{5/2} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\lambda At^{5/2} + \lambda Ct^2 \right\} \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \sum_{k=2}^t (t-k) \left(X_{k-1} - \frac{1}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \sum_{k=2}^t (t-k) \left(X_{k-1} - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ = \prod_{k=2}^t \cosh \left(\lambda(t-k) \right) \leq \exp \left\{ \frac{\lambda^2}{2} t^3 \right\}, \end{aligned}$$

полагая $\lambda = t^{-3/2}$, получаем, что

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^t S_k^2 < \frac{t^3}{12} - At^{5/2} \right\} \leq C \exp \left(-\frac{1}{2} At \right).$$

Следовательно, по теореме 3

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{\sigma_N > t\} t^{3/2}) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\sigma_N^\# > t\} t^{3/2} < \infty.$$

Нижняя оценка выполнена по теореме 3, поскольку $Y_k \leq S_k \leq k$, условие (17), как уже было показано, выполнено, и в соответствии с оценкой (21)

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}\{\sigma_N > t\} t^{3/2}) \geq \sqrt{\frac{6}{\pi}} N > 0.$$

Автор признателен К. Боровкову за предоставление препринта [1] и стимулирующие дискуссии в Мельбурнском университете, а также Л. Гальчуку, М. Джекобсону, М. Йору, Ю. Кабанову, Н. Кордзахия,

А. Ле Бретону и А. Ширяеву за весьма полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borovkov K.* On a gambling system. — Preprint. Melbourne University, 1996.
2. *Wald A.* Sequential analysis of statistical hypotheses. — *Ann. Math. Statist.*, 1945, v. 16, № 1, p. 117–186.
3. *Blackwell D.* On an equation of Wald. — *Ann. Math. Statist.*, 1946, v. 17, № 1, p. 84–87.
4. *Жакоб Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. — Т. 1; 2. М.: Изд. фирма «Физ. мат. лит.», 1994, 542 с.; 367 с.
5. *Burkholder D. L., Gundy R. F.* Extrapolation and interpolation of quasilinear operators on martingales. — *Acta Math.*, 1970, v. 124, № 3/4, p. 249–304.
6. *Новиков А. А.* О моментах остановки винеровского процесса. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1971, т. XVI, в. 3, с. 458–465.
7. *Novikov A. A.* A martingale approach to first passage problems and a new condition for Wald's identity. (Proc. of the 3rd IFIP-WG 7/1 Working Conf., Visegrad, 1980.) — *Lect. Notes Control Inform. Sci.*, 1981, v. 36, p. 146–156.
8. *Azema J., Gundy R. F., Yor M.* Sur l'intégrabilité uniforme des martingales continues. — *Lect. Notes Math.*, 1979, v. 784, p. 53–61.
9. *Новиков А. А.* Мартингалный подход в задачах о времени первого пересечения нелинейных границ. — *Труды Матем. ин-та АН СССР*, 1981, т. 158, с. 130–152.
10. *Новиков А. А.* О времени пересечения односторонней нелинейной границы суммами независимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1982, т. XXVII, в. 4, с. 643–656.
11. *Galtchouk L., Novikov A.* On Wald equation. Discrete time case. — Preprint № 25, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg, 1995.
12. *Ethier S. N.* Analysis of a gambling system. — Preprint, Utah University, 1994.
13. *Ethier S. N.* A gambling systems and a Markov chain. — Preprint, Utah University, 1995.
14. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.
15. *Seneta E.* Regularly varying functions. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
16. *Uchiyama K.* Brownian first exit from and sojourn over one-sided moving boundary and application. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1980, B. 54, H. 1, S. 75–116.
17. *Gartner J.* Upper and lower bounds for brownian first exit densities and propagation of wave front. — Preprint. Berlin University, 1981.

Поступила в редакцию
8.IV.1996