Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 5–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:53:26

© 2000 г. БОРОВКОВ А. А.*, МОГУЛЬСКИЙ А. А.*

ИНТЕГРО-ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ. II¹⁾

Настоящая статья является продолжением работ [1], [2]. Пусть $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$ есть сумма независимых невырожденных в $\mathbf{R}^d$ случайных векторов, распределенных как вектор ξ . Предполагается, что функция $\varphi(\lambda) = \mathbf{E} e^{\langle \lambda, \xi \rangle}$ конечна в окрестности некоторой точки $\lambda \in \mathbf{R}^d$. Получены асимптотические представления для вероятности $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x)\}$ и для функции восстановления $H(\Delta(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x)\}$, где $\Delta(x)$ есть куб в $\mathbf{R}^d$ с вершиной в точке x и со стороной Δ . При этом в отличие от [1], [2] либо по существу никаких предположений не делается, либо накладываемые условия являются очень слабыми.

Ключевые слова и фразы: большие отклонения, функция отклонений, функция восстановления, интегро-локальная теорема, арифметическое распределение, решетчатое распределение, нерешетчатое распределение.

1. Формулировки результатов

1.1. Введение. Напомним основные обозначения [1]. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ — невырожденный случайный вектор в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$, с распределением F и преобразованием Лапласа

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E} e^{\langle \lambda, \xi \rangle} = \int e^{\langle \lambda, x \rangle} F(dx), \quad \lambda \in \mathbf{R}^d,$$

где $\langle \lambda, x \rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i$ есть скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Условие невырожденности случайного вектора ξ запишем в виде: для любого $\lambda \neq 0$

$$\sup_t \mathbf{P}\{\langle \lambda, \xi \rangle = t\} < 1. \quad (1)$$

*Институт математики СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 96-01-01939, № 96-15-96295) и Международного научного фонда (CRDF Cooperating Grants Program, Award RM1-226).

Функцию уклонений, отвечающую вектору ξ (или его распределению F), обозначим

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{ \langle \lambda, \alpha \rangle - \ln \varphi(\lambda) \}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^d.$$

Это есть преобразование Лежандра над функцией $A(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$. Функция уклонений играет определяющую роль при описании вероятностей больших уклонений сумм

$$S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$$

независимых случайных векторов с общим распределением F . Свойства функции уклонений хорошо изучены (см., например, [3]).

Положим $\Phi = \{ \lambda \in \mathbf{R}^d: \varphi(\lambda) < \infty \}$ и обозначим через (Φ) внутренность Φ . Множество Φ всегда непусто ($0 \in \Phi$) и выпукло; его внутренность (Φ) непуста тогда и только тогда, когда выполнено условие Крамера

(C_1) При всех λ из некоторого открытого множества в $\mathbf{R}^d$ выполняется

$$\varphi(\lambda) < \infty.$$

В настоящей работе мы везде будем предполагать, что условия (1), (C_1) выполнены (если не оговорено противное), хотя многие формулировки остаются справедливыми и вне этих предположений (иногда теряя при этом свою содержательность).

Введем в рассмотрение множества

$$A' = \{ \alpha: \alpha = A'(\lambda) = \text{grad } A(\lambda), \lambda \in \Phi \}, \quad \Lambda = \{ \alpha: \Lambda(\alpha) < \infty \}.$$

Внутренность (A') множества A' будем считать пустой, если пусто (Φ) , т.е. если не выполнено (C_1) . Если выполнено условие (C_1) , то функция $\Lambda(\alpha)$ аналитична в области (A') ; при этом всегда $(A') \subseteq \Lambda$. Множество Λ всегда выпукло и замкнуто; оно является выпуклой оболочкой носителя распределения F [3]. Для $\alpha \in (A')$ обозначим

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{\det \Lambda''(\alpha)}, \quad b(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sigma(\alpha)}.$$

Пусть $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел на вещественной прямой $\mathbf{R}$. Рассмотрим также следующие условия (см. [1]).

(C_2) Либо (i) $\limsup_{|s| \rightarrow \infty} |\varphi(is)| < 1$, либо (ii) координаты случайного вектора ξ принимают целочисленные значения и для некоторого $y \in \mathbf{Z}^d$ такого, что $\mathbf{P}\{\xi = y\} > 0$, группа, порожденная множеством

$$\{ z: \mathbf{P}\{\xi = y + z\} > 0 \},$$

совпадает с множеством $\mathbf{Z}^d$ векторов $z = (z_1, \dots, z_d)$ с целочисленными координатами.

$(C_2^{(0)})$ Для всякого вектора $s \in \mathbf{R}^d$, $s \neq 0$, выполняется неравенство $|\varphi(is)| < 1$.

Будем говорить, что вектор ξ имеет нерешетчатое распределение, если он удовлетворяет условию $(C_2^{(0)})$.

Для точки $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ и положительного Δ обозначим через

$$\Delta(x) = \{y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbf{R}^d: x_i \leq y_i < x_i + \Delta, i = 1, \dots, d\}$$

куб с основанием в точке x и со стороной Δ .

При выполнении условий (C_1) , $\alpha \in (A')$, (C_2) авторами в [1] были получены так называемые интегро-локальные теоремы для сумм $S(n)$, описывающие асимптотику

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x)\}, \quad \alpha = \frac{x}{n} \in (A'), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

и включающие асимптотические разложения (в случае $(C_2)_{ii}$ координаты вектора x следует выбирать целочисленными). В [2] аналогичные результаты были получены для функции восстановления

$$H(\Delta(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x)\}. \quad (3)$$

Цель настоящей работы — получить асимптотические представления для вероятностей (2) и для функции восстановления (3), отбрасывая от условия (C_2) или от всех условий (C_1) , $\alpha \in (A')$, (C_2) . Естественно, снятие этих условий ведет к менее точным результатам.

1.2. «Структура» произвольного невырожденного случайного вектора. В этой работе мы не собираемся накладывать каких-либо существенных условий на «структуру» распределения слагаемых $\xi(k)$ (условий типа (C_2)). С другой стороны, как хорошо известно, асимптотика вероятностей (2) и функции восстановления (3) зависит от этой структуры (см., например, [1], [2]). В связи с этим необходимо выяснить, как может выглядеть эта «структура» в общем случае (для произвольного случайного вектора ξ). Отметим предварительно, что обе задачи об асимптотическом поведении (2), (3) в известном смысле инвариантны относительно линейных преобразований пространства без сдвига (т.е. преобразований сжатия и поворота). Пусть невырожденная матрица M соответствует такому преобразованию. Тогда знание асимптотик $\mathbf{P}\{S(n) \in x + B\}$, $H(x + B)$ для борелевского множества B будет означать знание асимптотик $\mathbf{P}\{S(n)M \in y + B_M\}$, $H_M(y + B_M)$ и наоборот; здесь $y = xM$, $B_M = \{v: vM^{-1} \in B\}$, $H_M(B) = \sum \mathbf{P}\{S(n)M \in B\}$.

Поэтому мы можем, не ограничивая общности, рассматривать вместо ξ случайный вектор $\zeta = \xi M$ и выбрать матрицу M так, чтобы сделать структуру ζ наиболее простой.

Оказалось, что в общем случае мы можем выбрать матрицу M так, что координаты ζ распадаются на следующие три группы.

Лемма 1. Матрицу M можно выбрать так, что все координаты ζ_i можно разбить на три группы

$$\begin{aligned}\zeta^{(1)} &= (\zeta_1, \dots, \zeta_{m_1}), & \zeta^{(2)} &= (\zeta_{m_1+1}, \dots, \zeta_{m_1+m_2}), \\ \zeta^{(3)} &= (\zeta_{m_1+m_2+1}, \dots, \zeta_d)\end{aligned}$$

размерностей m_1, m_2, m_3 соответственно, $m_1 + m_2 + m_3 = d$, таким образом, что:

1) первые m_1 координат составляют вектор $\zeta^{(1)} = (\zeta_1, \dots, \zeta_{m_1})$, который имеет арифметическое распределение с шагом 1 по каждой координате, т.е. все координаты принимают целочисленные значения и н.о.д. этих значений по каждой координате равен 1;

2) вторые m_2 координат составляют вектор

$$\zeta^{(2)} = a^{(2)} + \bar{\zeta}^{(2)}, \quad (4)$$

где вектор $a^{(2)} = (a_{m_1+1}, \dots, a_{m_1+m_2})$ имеет неслучайные координаты a_i , $0 < a_i < 1$, $m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2$, случайный вектор $\bar{\zeta}^{(2)}$ имеет арифметическое распределение с шагом 1 по каждой координате (как в первой группе);

3) последние m_3 координат составляют вектор $\zeta^{(3)}$ с нерешетчатым распределением (удовлетворяют условию $(C_2^{(0)})$).

Таким образом, если первые m_1 координат $(\zeta_1, \dots, \zeta_{m_1}) = \zeta^{(1)}$ имеют арифметическое распределение с шагом 1, то следующие m_2 координат $(\zeta_{m_1+1}, \dots, \zeta_{m_1+m_2}) = \zeta^{(2)}$ имеют арифметическое распределение со сдвигом $a^{(2)}$.

В дальнейшем мы будем считать, что преобразование M уже сделано и новый вектор $\zeta = \xi M$ для упрощения обозначений мы вновь будем обозначать ξ . Таким образом, мы предполагаем, не ограничивая общности, что вектор ξ с самого начала обладает свойствами, описанными в лемме 1.

Отметим теперь, что при изучении асимптотики вероятностей (2) вторую группу координат можно объединить с первой, рассмотрев для этого случайные векторы $\xi^* = \xi - a$ и их суммы $S^*(n) = S(n) - na$, где d -мерный вектор a получен из $a^{(2)}$ добавлением $d - m_2$ нулевых координат на соответствующих местах. Асимптотика вероятностей (2) описана в этом случае в теоремах А, 1.

При изучении функции восстановления (3) положение со второй группой координат обстоит сложнее. Если мы произведем преобразование сдвига, то получим

$$H(\Delta(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S^*(n) \in \Delta(x) - na\}.$$

Предположим на время для простоты, что $m_2 = d$ (арифметическая и нерешетчатые координаты отсутствуют), и обозначим арифметический случайный вектор ξ^* снова через ξ . Тогда мы придем к задаче вычисления асимптотики

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x) - na\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x')\},$$

где $x' = x + na$. Но непосредственно применять теорему 1 (см. ниже) здесь нельзя, так как при $\Delta = 1$ положение единичного куба $\Delta(x')$ относительно целочисленной решетки будет с ростом n постоянно меняться. Это создает ряд трудностей, которые не всегда оказываются существенными, если речь идет о единичных кубах, а не о более мелких, и об асимптотике (3) с точностью до постоянного множителя. Более подробное обсуждение вопросов, связанных с присутствием второй группы координат, содержится в замечании после теоремы 3. При этом законченных собирательных результатов при произвольном $a \neq 0$ получить пока не удастся. Поэтому в основных утверждениях, касающихся функции восстановления (теорема 3) мы будем считать для простоты, что вторая группа отсутствует, т.е. $m_2 = 0$.

Итак, при изучении асимптотического поведения вероятностей $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x)\}$ и функции восстановления $H(\Delta(x))$ мы будем, не ограничивая общности, считать, что произвольный невырожденный случайный вектор ξ с помощью линейного преобразования приведен к виду, описанному в лемме 1. При этом в первом случае (при изучении вероятностей $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x)\}$) мы будем, не ограничивая общности, считать, что выполняется $m_2 = 0$, т.е. отсутствует вторая группа координат; во втором случае (при изучении функции $H(\Delta(x))$) мы тоже будем предполагать, что $m_2 = 0$, однако здесь это равенство будет уже условием, несколько ограничивающим общность.

Более точное описание и обоснование приведенной выше классификации и доказательство леммы 1 дано в пп. 2.1, 2.2.

Итак, в дальнейшем изложении, касающемся предельных теорем, случайный невырожденный вектор ξ имеет структуру, описанную леммой 1, где $m_2 = 0$. В этом случае важной характеристикой распределения случайного вектора ξ является число $m = m_1$ арифметических координат.

1.3. Предельные теоремы для сумм. В этом разделе в соответствии с соглашением п. 1.2, мы будем считать, что вектор $\xi^{(1)} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ является арифметическим с шагом 1 по каждой координате, а вектор $\xi^{(3)} = (\xi_{m+1}, \dots, \xi_d)$ является нерешетчатым. Обозначим

$$\mathbf{R}^d(m) = \mathbf{Z}^m \times \mathbf{R}^{d-m},$$

так что $\mathbf{R}^d(0) = \mathbf{R}^d$ и для $1 \leq m \leq d$

$$\mathbf{R}^d(m) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d: x_i \in \mathbf{Z}, 1 \leq i \leq m; x_i \in \mathbf{R}, m < i \leq d \right\}.$$

Очевидно, что при сделанном выше соглашении выполняется $\mathbf{P}\{\xi \in \mathbf{R}^d(m)\} = 1$. Поэтому при изучении вероятностей $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x)\}$ можно рассматривать лишь $x \in \mathbf{R}^d(m)$, а вместо куба $\Delta(x)$ рассматривать «вырожденный» куб $\Delta_0^{(m)}$, у которого некоторые стороны равны 0:

$$\Delta_0^{(m)}(x) = \left\{ y \in \mathbf{R}^d: y_j = x_j \text{ при } j = 1, \dots, m; \right. \\ \left. x_j \leq y_j < x_j + \Delta \text{ при } j = m+1, \dots, d \right\}. \quad (5)$$

Для целого r , $0 \leq r \leq d$, вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbf{R}^d$ и вещественного $\Delta > 0$ обозначим

$$\theta^{(r)}(\Delta, \lambda) = \prod_{i=r+1}^d \Delta^{-1} \int_0^\Delta e^{-v\lambda_i} dv - 1, \quad 0 \leq r \leq d-1, \quad \theta^{(d)}(\Delta, \lambda) = 0.$$

Следующая теорема является следствием теоремы 1 в [1].

Теорема А. Пусть выполнено условие (C_2) , т.е. целое m равно либо 0, либо d , и в случае $m = 0$ выполнено условие $(C_2)_i$. Тогда для любого компакта $K \subseteq (A')$, любого положительного числа δ , любого неотрицательного k при $\alpha = x/n$ выполняется

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta_0^{(m)}(x)\} \\ = \frac{\Delta^{d-m} b(\alpha)}{n^{d/2}} e^{-n\Lambda(\alpha)} \left(1 + \theta^{(d-m)}(\Delta, \lambda(\alpha)) + \varepsilon(n, \alpha, \Delta) \right), \quad (6)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K, x \in \mathbf{R}^d(m)} \sup_{n^{-k} \leq \Delta \leq \delta} |\varepsilon(n, \alpha, \Delta)| = 0. \quad (7)$$

Не вызывает сомнения, что теорема А сохранится и при произвольном m , лежащем между 0 и d , и при дополнительном условии $(C_2)_i$ для вектора $\xi^{(3)} = (\xi_{m+1}, \dots, \xi_d)$. Это соответствует случаю, когда случайный вектор ξ имеет как решетчатые, так и нерешетчатые координаты. Доказательство при этом потребует, конечно, модификаций, но все они укладываются в рамки существующих доказательств, так как основные

условия, необходимые для работы с формулами обращения, для решетчатой и нерешетчатой частей вектора ξ выполнены.

Одним из главных утверждений настоящей заметки является следующая теорема (условия вида (C_2) здесь не предполагаются).

Теорема 1. Для любого фиксированного $\Delta > 0$ и любого компакта $K \subset (A')$ найдутся целое число $n_0 < \infty$ и положительные числа $b_1(\Delta, K)$, $b_2(\Delta, K)$, $0 < b_1(\Delta, K) \leq b_2(\Delta, K) < \infty$, зависящие только от своих аргументов и от распределения F , такие, что для $n \geq n_0$, $\alpha = x/n \in K$, $x \in \mathbf{R}^d(m)$ выполняется

$$P\{S(n) \in \Delta_0^{(m)}(x)\} = \frac{\Delta^{(d-m)} b(\Delta, n, \alpha)}{n^{d/2}} e^{-n\Lambda(\alpha)}, \quad (8)$$

где $b_1(\Delta, K) \leq b(\Delta, n, \alpha) \leq b_2(\Delta, K)$.

Отметим, что константы $b_1(\Delta, K)$, $b_2(\Delta, K)$ в теореме 1 не зависят от n и $\alpha \in K$, но могут зависеть от параметра Δ . Конечно, выделение множителя Δ^{d-m} в этом случае теряет, вообще говоря, свой смысл; мы оставляем этот множитель для сохранения единой формы с теоремой А и в силу того, что в широких условиях константы $b_1(\Delta, K)$, $b_2(\Delta, K)$ оказываются отделенными от 0 и ∞ для всех $\Delta > 0$.

Таким образом, в отличие от теоремы А, где найдена точная асимптотика в интегро-локальной теореме для сумм $S(n)$, в теореме 1 и следствии 1 (см. далее) при отсутствии условия (C_2) получена асимптотика лишь с точностью до константы.

Остается открытым вопрос:

(Q₁) При каких дополнительных условиях при выполнении соглашения $m_2 = 0$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} b(\Delta, n, \alpha) = b(\alpha) + \theta^{(d-m)}(\Delta, \alpha)$ при $\alpha \in (A')$ и $\Delta > 0$?

Заметим, что в одномерном случае соглашение $m_2 = 0$ означает, что выполнено либо условие $(C_2)_{ii}$ (когда $m = d = 1$), либо условие $(C_2^{(0)})$ (когда $m = d - 1 = 0$). В одномерном случае $d = 1$ ответ на поставленный вопрос известен: дополнительные условия не требуются. Этот результат следует из теоремы А в случае $m = 1$ и из теоремы 1 в [10] и теоремы 1 в [11] в случае $m = 0$. Приведем здесь соответствующее утверждение, основанное на процитированных выше теореме А и теореме 1 в [11], которое часто бывает полезно:

Теорема 1А. Пусть $d = 1$. Тогда для любого компакта $K \subseteq (A')$ и любого $\Delta > 0$ при $\alpha = x/n \in K$ справедливо

$$\begin{aligned} P\{S(n) \in \Delta_0^{(m)}(x)\} \\ = \frac{\Delta^{(1-m)}}{(2\pi n)^{1/2} \sigma(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \theta^{(1-m)}(\Delta, \lambda(\alpha)) + \varepsilon(n, \alpha, \Delta)), \end{aligned}$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K, x \in \mathbf{R}^d(m)} |\varepsilon(n, \alpha, \Delta)| = 0$.

Существенным «недостатком» теорем А, 1, 1А является наличие в них условия $\alpha \in K \subseteq (A')$, которое ограничивает в ряде случаев (когда A' не совпадает с $\mathbf{R}^d$ и при этом величина ξ не ограничена) область рассматриваемых уклонений.

Мы перейдем теперь к «грубой интегро-локальной теореме» (локальному принципу больших уклонений), в которой на область рассматриваемых уклонений $\alpha = x/n$ ограничений по существу не накладывается. Тут нам понадобится условие

$(C_1^{(0)})$ При λ из некоторой окрестности точки $\lambda_0 = 0$ выполняется

$$\varphi(\lambda) < \infty.$$

Теорема 2 (локальный принцип больших уклонений). Для любого фиксированного $\Delta > 0$ и любого компакта $K \subset (\Lambda)$ для $\alpha = x/n \in K$

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta_0^{(m)}(x)\} = -\Lambda(\alpha) + \varepsilon(n, \Delta, \alpha), \quad (9)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K, x \in \mathbf{R}^d(m)} |\varepsilon(n, \Delta, \alpha)| = 0$. Утверждение (9) сохранится и в случае, когда условие (C_1) не выполнено; в этом случае $\Lambda(\alpha) \equiv 0$, и утверждению (9) можно придать вид: для любого фиксированного $\Delta > 0$ и любого компакта $K \subset \mathbf{R}^d$ для $\alpha = x/n \in K$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K, x \in \mathbf{R}^d(m)} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta_0^{(m)}(x)\} = 0. \quad (10)$$

Если выполнено условие $(C_1^{(0)})$, то для любого $M < \infty$ найдется $T = T(M) < \infty$ такое, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{|S(n)| \geq nT\} \leq -M. \quad (11)$$

Как мы уже отмечали, $\mathbf{P}\{n^{-1} S(n) \notin \Lambda\} = 0$; таким образом, соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta_0^{(m)}(x_n)\} = -\Lambda(\alpha)$$

для $x_n \in \mathbf{R}^d(m)$, $x_n/n \rightarrow \alpha$ верно, по существу, без каких бы то ни было ограничений.

Из утверждения (9) теоремы следует обычный принцип больших уклонений для нормированных сумм $S(n)/n$ (см., например, [3]; тут никаких предположений о структуре вектора ξ можно не делать):

(а) для любых ограниченных замкнутых множеств B

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left\{\frac{S(n)}{n} \in B\right\} \leq -\inf_{\alpha \in B} \Lambda(\alpha); \quad (12)$$

(b) для любых открытых множеств B

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left\{ \frac{S(n)}{n} \in B \right\} \geq - \inf_{\alpha \in B} \Lambda(\alpha). \quad (13)$$

В одномерном случае $d = 1$ соотношение (12) верно для любых замкнутых множеств B . В случае $d \geq 2$ это, вообще говоря, не так, о чем свидетельствует пример в [12]. Если же выполнено условие $(C_1^{(0)})$, то соотношение (12) верно для любых замкнутых множеств B в пространстве $\mathbf{R}^d$ любой размерности $d \geq 1$ (см., например, [3]).

Вернемся теперь к интегро-локальным теоремам 1, 1A и покажем, как из этих теорем получить утверждения интегрального типа.

Назовем множества

$$B^{(\varepsilon)} = \{x \in \mathbf{R}^d: \text{существует вектор } y \in B \text{ такой, что } |x - y| < \varepsilon\};$$

$$B^{(-\varepsilon)} = \{x \in B: \text{для всякого вектора } y \notin B \text{ выполняется } |x - y| > \varepsilon\}$$

соответственно внешней и внутренней ε -окрестностями множества B .

Непосредственным следствием из теоремы 1 является следующее утверждение (тут также никаких предположений о структуре вектора ξ можно не делать).

Следствие 1. Для некоторого $\delta \geq 0$, для любых $\Delta \geq \delta$ и компакта $K \subset (A')$ найдутся целое число $n_0 = n_0(\Delta, K) < \infty$ и положительные числа b_1, b_2 , $0 < b_1 \leq b_2 < \infty$, такие, что для всех $n \geq n_0$ и любого измеримого множества $B \subseteq K$ выполняется

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{n^{d/2}} \int_{B(-\Delta/n)} e^{-n\Lambda(\alpha)} d\alpha &\leq \mathbf{P}\{S(n) \in nB\} \\ &\leq \frac{b_2}{n^{d/2}} \int_{B(\Delta/n)} e^{-n\Lambda(\alpha)} d\alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

Если дополнительно выполнено условие $(C_2^{(0)})$, то (14) верно для любых $\Delta > 0$.

Если множество B таково, что для любого $\Delta > 0$ найдутся константы c, C , $0 < c \leq C < \infty$, такие, что для всех достаточно больших n выполняется

$$c \int_{B(\Delta/n)} e^{-n\Lambda(\alpha)} d\alpha \leq \int_B e^{-n\Lambda(\alpha)} d\alpha \leq C \int_{B(-\Delta/n)} e^{-n\Lambda(\alpha)} d\alpha, \quad (15)$$

то для этого B при всех достаточно больших n справедливо соотношение

$$\frac{b_1}{Cn^{d/2}} \int_B e^{-n\Lambda(\alpha)} d\alpha \leq \mathbf{P}\{S(n) \in nB\} \leq \frac{b_2}{cn^{d/2}} \int_B e^{-n\Lambda(\alpha)} d\alpha. \quad (16)$$

Условие (15) для множества B будет выполнено, если это множество в окрестности «наиболее вероятной» точки $\alpha_0 \in B$ (т.е. такой, что

$\Lambda(\alpha_0) = \inf_{\alpha \in B} \Lambda(\alpha)$; при $\Lambda(\alpha_0) > 0$ точка α_0 лежит на границе B) «телесно» и имеет «не очень рыхлую» границу.

Таким образом, для достаточно широкого класса множеств B асимптотика вероятности $P\{S(n) \in nB\}$ найдена с точностью до константы в форме (16). Этот результат в известном смысле неулучшаем: в рассматриваемых условиях (1), (C_1) даже для таких «простых» множеств B , как полупространство $\{\alpha: \langle \alpha, \lambda \rangle \geq c\}$, соотношение (16) нельзя заменить более точным утверждением

$$P\{S(n) \in nB\} = \frac{b + o(1)}{n^{d/2}} \int_B e^{-n\Lambda(\alpha)} d\alpha \quad (17)$$

для подходящей константы b (так может обстоять дело, например, в решетчатом одномерном случае для множества $B = \{\alpha: \alpha \geq \sqrt{2}\}$). Отметим еще, что результат (16) для более узкого класса $\mathcal{D}$ борелевских множеств B , представимых в виде $B = A_1 \setminus A_2$, где A_1, A_2 — выпуклые множества, был получен в [4]. Для более узкого класса отклонений $\alpha_0 = E\xi + o(1)$ и для класса множеств $\mathcal{D}$ в работах [4], [5] доказана эта более точная, чем (16), формула (17) (см. также близкие результаты в [6]–[8]). Отметим еще, что результат (17) невозможно вывести непосредственно из теоремы 1, в которой изначально найдена асимптотика с точностью до константы и которая тем самым ориентирована на изучение самой общей ситуации.

1.4. Предельные теоремы для функции восстановления. Обратимся теперь к изучению «многомерной» функции восстановления

$$H(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S(n) \in A\}, \quad A \subseteq \mathbf{R}^d. \quad (18)$$

В этом разделе, в соответствии с соглашением, принятым в п. 1.2, мы снова будем считать, что случайный вектор ξ имеет структуру, определенную леммой 1, и группа арифметических координат со сдвигом отсутствует ($m_2 = 0$). Напомним, что в этом случае первая группа состоит из $m = m_1$ арифметических координат, а остальные $d - m$ координат образуют нерешетчатый вектор.

В работе [2] авторы получили в условиях $(C_1), (C_2)$ асимптотические разложения для функции

$$H(\Delta(x)), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

В настоящей работе получен несколько менее точный результат, но без привлечения условия (C_2) .

В описании асимптотики функции восстановления определяющую роль играет так называемая *вторая функция отклонений*

$$D(\alpha) = \inf_{s>0} \frac{\Lambda(s\alpha)}{s}, \quad (19)$$

которая была введена и достаточно полно изучена авторами в [2]. В частности, функция $D(\alpha)$ выпукла: для $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^d$, $p_1, p_2 \geq 1$, $p_1 + p_2 = 1$,

$$D(p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2) \leq p_1D(\alpha_1) + p_2D(\alpha_2),$$

и линейна по любому направлению: для $\alpha \in \mathbf{R}^d$, $t \geq 0$ имеем $D(t\alpha) = tD(\alpha)$, и при этом $D(t\mathbf{E}\xi) = tD(\mathbf{E}\xi) = 0$.

Обозначим

$$E = \{\lambda \in \mathbf{R}^d: \varphi(\lambda) \leq 1\}, \quad D = \{\alpha \in \mathbf{R}^d: \alpha \neq 0, D(\alpha) < \infty\}.$$

Множество E не пусто и выпукло; функция $D(\alpha)$ допускает следующее представление:

$$D(\alpha) = \sup_{\lambda \in E} \langle \lambda, \alpha \rangle = \sup_{\lambda \in \partial E} \langle \lambda, \alpha \rangle = \langle \mu(\alpha), \alpha \rangle,$$

где вектор $\mu(\alpha)$ лежит на границе ∂E множества E (см. [2]). Определим далее функцию $s(\alpha) > 0$ как значение s , при котором достигается $\inf$ в (19):

$$D(\alpha) \equiv \frac{\Lambda(s(\alpha)\alpha)}{s(\alpha)}.$$

Для $\alpha \in D$ определим подмножество $E_\alpha \subseteq E$:

$$E_\alpha = \{\lambda \in E: \langle \lambda, \alpha \rangle = D(\alpha)\}.$$

Тогда множество

$$(D_\Phi) = \{\alpha \in D: E_\alpha \subseteq (\Phi)\}$$

является сектором в $\mathbf{R}^d$ (ср. с определением множества (A')); оно играет роль множества регулярности для функции $D(\alpha)$, аналогично той, какую играет множество (A') для функции $\Lambda(\alpha)$. В частности, если $E \subseteq (\Phi)$, то введенный сектор совпадает со всем пространством: $(D_\Phi) = \mathbf{R}^d$.

Проекцию (D_Φ) на единичную сферу $\mathbf{R}^d$ обозначим

$$(D_\Phi^{(1)}) = \{\alpha \in (D_\Phi): |\alpha| = 1\}.$$

Аналогом теоремы А является следующая теорема В, которая вытекает из теорем 5, 6 в [2].

Теорема В. Пусть выполнено условие (C_2) , т.е. целое число m равно либо 0, либо d , и в случае $m = 0$ выполнено условие $(C_2)_i$. Пусть $t = |x|$, $v = x/|x|$.

1. Если $\mathbf{E}\xi \neq 0$, то для любого $\delta > 0$, любого $k > 0$, любого компакта $K \subseteq (D_\Phi^{(1)})$ выполняется

$$H(\Delta_0^{(m)}(x)) = \frac{h(v)\Delta^{d-m}}{t^{(d-1)/2}} e^{-tD(v)} (1 + \theta^{(d-m)}(\Delta, \mu(v)) + \varepsilon(x, \Delta)), \quad (20)$$

где

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{v \in K, x \in \mathbf{R}^d(m)} \sup_{t^{-k} \leq \Delta \leq \delta} |\varepsilon(x, \Delta)| = 0,$$

$$h(v) = \frac{(v \Lambda''(s(v)) v)^{-1/2}}{\sigma^2(s(v)) (2\pi)^{(d-1)/2} s(v)^{(d+3)/2}}.$$

II. Если выполнено условие $(C_1^{(0)})$, $\mathbf{E}\xi = 0$, $d \geq 3$, $B^2 = \mathbf{E}\xi^T \xi$, то для любых $\delta > 0$, $k > 0$ и компакта $K \subseteq (D_\Phi^{(1)})$ выполняется

$$H(\Delta(x)) = \frac{q(v) \Delta^d}{t^{d-2}} (1 + \varepsilon(x, \Delta)), \quad (21)$$

где

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{v \in K, x \in \mathbf{R}^d(m)} \sup_{t^{-k} \leq \Delta \leq \delta} |\varepsilon(x, \Delta)| = 0,$$

$$q(v) = \frac{1}{\sigma^2(0)(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty e^{-v B^{-1} v^T / (2u)} \frac{du}{u^{d/2}}.$$

Не вызывает сомнения, что теорема В сохранится и при произвольном m , лежащем между 0 и d , и при дополнительном условии $(C_2)_i$ для вектора $(\xi_{m+1}, \dots, \xi_d)$ (см. замечание, приведенное после теоремы А).

Одно из основных утверждений настоящей работы, касающееся функции уклонений, состоит в следующем (условия типа (C_2) здесь не предполагаются).

Теорема 3. Пусть $t = |x|$, $v = x/|x|$.

I. Если $\mathbf{E}\xi \neq 0$, то для любого $\Delta > 0$, любого компакта $K \subseteq (D_\Phi^{(1)})$ найдутся положительные числа $t_0 < \infty$, $h_1(\Delta, K)$, $h_2(\Delta, K)$, $0 < h_1(\Delta, K) \leq h_2(\Delta, K) < \infty$, такие, что при $t \geq t_0$, $v \in K$, $x \in \mathbf{R}^d(m)$ выполняется

$$H(\Delta_0^{(m)}(x)) = \frac{\Delta^{d-m} h(\Delta, x)}{t^{(d-1)/2}} e^{-tD(v)}, \quad (22)$$

где

$$h_1(\Delta, K) \leq h(\Delta, x) \leq h_2(\Delta, K). \quad (23)$$

II. Если $\mathbf{E}\xi = 0$, $d \geq 3$, то для любого $\Delta > 0$, любого компакта $K \subseteq (D_\Phi^{(1)})$ найдутся положительные числа $t_0 < \infty$, $q_1(\Delta, K)$, $q_2(\Delta, K)$, $0 < q_1(\Delta, K) \leq q_2(\Delta, K) < \infty$, такие, что при $t \geq t_0$, $v \in K$, $x \in \mathbf{R}^d(m)$ выполняется

$$H(\Delta_0^{(m)}(x)) = \frac{\Delta^{d-m} q(\Delta, x)}{t^{d-2}}, \quad (24)$$

где

$$q_1(\Delta, K) \leq q(\Delta, x) \leq q_2(\Delta, K). \quad (25)$$

Как и константы b_1, b_2 в теореме 1, константы h_1, h_2, q_1, q_2 в теореме 3 зависят, вообще говоря, от параметра Δ .

Сделаем теперь ряд замечаний, касающихся случая $m_2 > 0$ (см. п. 1.2), когда среди координат вектора ξ есть группа $\xi^{(2)}$ объема $m_2 \geq 1$ арифметических координат «со сдвигом» $a^{(2)} = (a_{m_1+1}, \dots, a_{m_1+m_2})$, $0 < a_i < 1$, $i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$.

Пусть для простоты $m_2 = d$. Как было отмечено в п. 1.2, задача оценивания асимптотики $H(\Delta(x))$ в этом случае сводится к задаче об асимптотике

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{S(n) \in \Delta(x')\}$$

для арифметического случайного вектора ξ , где $x' = x - na$. Непосредственно применять тут теорему 1 нельзя, так как положение куба $\Delta(x')$ относительно решетки $\mathbf{Z}^d$ при разных значениях n меняется и при $\Delta < 1$ вероятности $P\{S(n) \in \Delta(x')\}$ могут обращаться в 0. Но если $\Delta = 1$, то существует единственная точка $x^{(0)} \in \Delta(x')$ с целочисленными координатами, и мы можем, согласно теореме 1, найти асимптотику

$$P\{S(n) = x^{(0)}\} = P\{S(n) \in \Delta(x')\}.$$

Если теперь в полученном соотношении для $P\{S(n) = x^{(0)}\}$ в правой части в множителе $b(\alpha)e^{-n\Lambda(\alpha)}$ значение $\alpha = x^{(0)}/n$ заменим на $\alpha' = x'/n$, то мы получим выражение, которое отличается от исходного положительным множителем, отделенным от 0 и ∞ , и которое совпадает с тем, которое стоит в правой части теоремы 1. Таким образом, при $\Delta = 1$ утверждение теоремы 1 сохранится при любом x и, стало быть, с точки зрения утверждений теорем 1, 3 группа $m_2 = d$ арифметических координат со сдвигом обладает тем же свойством, что и группа нерешетчатых координат (при этом $m = m_1 = 0$, и под кубом $\Delta_0^{(m)}(x) = \Delta_0^{(0)}(x)$ следует понимать куб $\Delta(x)$).

Поэтому в общем случае при $0 \leq m_2 \leq d$ и при $\Delta \geq 1$ утверждения теорем 1, 3 остаются справедливыми (число m при этом сохраняет прежнее значение $m = m_1$).

Значительно более сложным является вопрос о том, когда утверждения теорем 1, 3 останутся справедливыми для более «мелких кубов» при $\Delta < 1$. Тут существенную роль начинают играть арифметические свойства координат a_i , $m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2$, вектора «сдвигов» $a^{(2)}$.

Пусть вновь для простоты $m_2 = d$. Если все a_i рациональны, то можно определить «более мелкую», чем $\mathbf{R}^d(d) = \mathbf{Z}^d$, решетку L , которая есть группа по операции сложения в $\mathbf{R}^d$, порожденная множеством $\mathbf{Z}^d + a$. На этой решетке L остается справедливой версия теоремы В о точной асимптотике $H(\Delta(x))$ для арифметического случая, но с меньшим постоянным множителем, равным l^{-1} , где l есть число точек решетки L в

единичном кубе $\Delta(0)$. Пусть, скажем, $d = m_2 = 1$ и $a_1 = \frac{1}{2}$; тогда мы будем иметь дело с «периодическим блужданием» ($S(2n)$ всегда целое), а «более мелкая» решетка L имеет вид $L = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^1$. В этом случае утверждение теоремы В для $x \in L$ сохранится с правой частью, помноженной на $\frac{1}{2}$.

Таким образом, в общем случае, когда $d \geq m_2 > 0$ и координаты a_i вектора $a^{(2)}$ рациональны, можно считать $m = m_1 + m_2$, и утверждение теоремы 3 сохранится для любого $\Delta > 0$ и $x \in L$, где L есть группа по операции сложения в $\mathbf{R}^d$, порожденная множеством $\mathbf{Z}^d(m) + a$, вектор $a \in \mathbf{R}^d$ получается из вектора $a^{(2)}$ присоединением нулевых координат на соответствующих местах.

Если все a_i иррациональны и «несоизмеримы», так что дробные части $\{na^{(2)}\}$ чисел $na^{(2)}$ при $m_2 = d$ равномерно заполняют единичный куб $\Delta(0)$ (отношение числа попаданий элементов последовательности $\{ka^{(2)}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, в телесное множество $B \subseteq \Delta(0)$ к числу n сходится при $n \rightarrow \infty$ к лебеговой мере B), то утверждение теоремы 3 сохранится для любого $\Delta > 0$ и $x \in \mathbf{R}^d$. Отсюда нетрудно получить, что в общем случае $0 < m_2 \leq d$ для «несоизмеримых» иррациональных координат a_i , $m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2$, утверждение теоремы 3 также останется в силе; но при этом вторую группу из m_2 координат следует «объединить» с третьей, так что в этом случае $m = m_1$.

Если же a_i иррациональны и соизмеримы, то описание асимптотики $H(\Delta(x))$ будет более сложным (например, для $d = m_2 = 2$, $a_1 = a_2 = \sqrt{2}/2$ числа $\{na^{(2)}\}$ заполняют диагональ единичного куба).

Таким образом, вопрос об общих условиях, обеспечивающих справедливость теоремы 3 в случае, когда $m_2 \geq 1$ и среди чисел a_i есть иррациональные, остается открытым. Открытым также остается вопрос: при каких дополнительных условиях в теореме 3 существуют пределы

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty, x/|x| \rightarrow v} h(\Delta, x) = h(v), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty, x/|x| \rightarrow v} q(\Delta, x) = q(v) \quad (26)$$

при фиксированных $v \in (D_{\Phi}^{(1)})$ и $\Delta > 0$?

Очевидно, что ответ на вопрос (Q_1) дает ответ на последний вопрос. Поэтому в одномерном случае $d = 1$ никаких дополнительных условий для существования пределов (26) не требуется.

Приведем теперь «грубую интегро-локальную теорему» для функции восстановления H , соответствующую части I теоремы 3 и справедливую без привлечения каких-либо соглашений о структуре вектора ξ .

Теорема 4. Пусть $E\xi \neq 0$, $t = |x|$, $v = x/|x|$. Тогда найдется $\Delta_0 \geq 0$ такое, что для любого $\Delta \geq \Delta_0$ и для любого компакта

$K \subseteq (D_{\Phi}^{(1)})$ выполняется

$$\frac{1}{t} \ln H(\Delta(x)) = -D(v) + \varepsilon(x, \Delta), \quad (27)$$

где $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{v \in K} |\varepsilon(x, \Delta)| = 0$.

В качестве простого следствия из теоремы 4 получаем интегро-локальную теорему для функции восстановления H в форме, которая может быть удобна для приложений.

Следствие 2. Пусть $E\xi \neq 0$ и $D(x) < \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда для некоторого $\Delta_0 \geq 0$ и для любых $\varepsilon > 0$, $\Delta \geq \Delta_0$ найдется $C < \infty$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется

$$\frac{1}{C} e^{-D(x) - \varepsilon|x|} \leq H(\Delta(x)) \leq C e^{-D(x) + \varepsilon|x|}.$$

Из теоремы 4 вытекает принцип больших отклонений для функции восстановления, полученный в [2]: при $E\xi \neq 0$

(а) для любых ограниченных замкнутых множеств B

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln H(B) \leq - \inf_{\alpha \in B} D(\alpha); \quad (28)$$

(б) для любых открытых множеств B

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln H(B) \geq - \inf_{\alpha \in B} D(\alpha). \quad (29)$$

2. Доказательства основных утверждений

2.1. Минимальная решетка для невырожденного случайного вектора. Для произвольных целого m , $0 \leq m \leq d$, невырожденной квадратной матрицы $M = (M_{ij})_{i,j=1}^d$ и вектора $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ введем множество

$$L_m = L_m(M, a) = \{x \in \mathbb{R}^d: xM \in a + \mathbb{R}^d(m)\},$$

где, как и прежде, $\mathbb{R}^d(m) = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^{d-m}$. Множество $L_m(M, a)$ назовем решеткой (невырожденной) в $\mathbb{R}^d$ размерности m . В частности, само множество $\mathbb{R}^d(m)$ есть решетка в $\mathbb{R}^d$ размерности m . Заметим, что в определении решетки $L_m(M, a)$ можно считать, не ограничивая общности, что $0 \leq a_i < 1$ для $i \in \{1, \dots, m\}$ и координаты вектора a с номерами $i \in \{m+1, \dots, d\}$ выбраны нулевыми. Что касается матрицы M , то свою роль в определении решетки $L_m(M, a)$ играют только столбцы этой матрицы с номерами $i \in \{1, \dots, m\}$; остальные столбцы можно выбирать произвольным образом, сохраняя при этом невырожденность M .

Множество $L_m(M, 0)$ является замкнутой подгруппой (по операции сложения векторов) в пространстве $\mathbf{R}^d$, поэтому решетка $L_m(M, a)$ является «сдвинутой» замкнутой подгруппой в $\mathbf{R}^d$ (см. (32) ниже). Структура замкнутых подгрупп в $\mathbf{R}^d$ описана, например, в [9] (теорема 21.2):

Пусть Γ — замкнутая подгруппа в $\mathbf{R}^d$. Пусть r — максимальная размерность линейных подпространств в Γ и $r+m \leq d$ — максимальное число линейно независимых векторов в Γ . Тогда существуют такие линейно независимые векторы $z_1, \dots, z_m; y_1, \dots, y_r$ в Γ , что

$$\Gamma = \{x = k_1 z_1 + \dots + k_m z_m + t_1 y_1 + \dots + t_r y_r; \\ k_i \in \mathbf{Z}, 1 \leq i \leq m; t_j \in \mathbf{R}, 1 \leq j \leq r\}. \quad (30)$$

Заметим, что в (30) можно считать, не ограничивая общности, что пары векторов z_i, y_j ортогональны для всех $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$.

Пусть размерность замкнутой подгруппы Γ^* в $\mathbf{R}^d$ совпадает с d , т.е. $m+r=d$. Рассмотрим квадратную невырожденную матрицу

$$B = (z_1^T, \dots, z_m^T, y_1^T, \dots, y_r^T), \quad (31)$$

столбцы которой составлены из координат векторов $z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_r$. Можно проверить, что $\Gamma^* = L_m(B^{-1}, 0)$ и для любого вектора $a^* \in \mathbf{R}^d$ справедливо

$$a^* + \Gamma^* = L_m(B^{-1}, a^* B^{-1}). \quad (32)$$

Будем называть решетку $L_m = L_m(M, a)$ минимальной решеткой, отвечающей невырожденному случайному вектору ξ , если

$$\mathbf{P}\{\xi \in L_m\} = 1 \quad (33)$$

и не существует другой решетки $L_{m'}(M', a')$, которая обладала бы свойством (33) и была бы собственным подмножеством решетки $L_m(M, a)$.

Ниже, в п. 2.2 мы приведем алгоритм построения минимальной решетки для невырожденного вектора ξ с помощью характеристической функции $f(t) = \varphi(it)$. Тем самым, будет установлено, что любому невырожденному случайному вектору ξ отвечает его минимальная решетка. Такую минимальную решетку, отвечающую невырожденному вектору ξ , будем обозначать L^ξ , а ее размерность m обозначим m^ξ .

Нерешетчатому вектору ξ (т.е. удовлетворяющему условию $(C_2^{(0)})$) отвечает минимальная решетка $L^\xi = L_0(M, a) = \mathbf{R}^d$ размерности 0.

Будем, следуя [9], называть вектор ξ решетчатым, если найдется решетка $L_d = L_d(M, a)$ размерности d такая, что

$$\mathbf{P}\{\xi \in L_d(M, a)\} = 1.$$

Если решетчатый вектор ξ является невырожденным, то очевидно, что ему будет соответствовать минимальная решетка $L^\xi = L_d(M, a)$ размерности d . Отметим еще, что приведенное выше условие $(C_2)_{ii}$ можно переписать в виде:

$(C_2)_{ii}$ Минимальная решетка L^ξ совпадает с $\mathbf{Z}^d$.

2.2. Доказательство леммы 1. Осуществим построение минимальной решетки для невырожденного вектора ξ . Если выполнено условие $(C_2^{(0)})$, то положим $L^\xi = \mathbf{R}^d = L_0$.

Если условие $(C_2^{(0)})$ не выполнено, то определено отличное от $\{0\}$ множество

$$T = T^\xi = \{t \in \mathbf{R}^d: |f(t)| = 1\}.$$

Пусть m есть размерность линейного подпространства Π_1 , порожденного множеством T . Последняя и будет размерностью m^ξ решетки L^ξ . Обозначим Π_2 ортогональное дополнение к Π_1 и представим случайный вектор ξ в виде суммы

$$\xi = \xi_1 + \xi_2,$$

где ξ_i есть проекция ξ на подпространство Π_i , $i = 1, 2$. Очевидно, что вектор ξ_1 является решетчатым вектором в $\mathbf{R}^d$ (вырожденным в $\mathbf{R}^d$, если $\Pi_1 \neq \mathbf{R}^d$) и при этом невырожденным в Π_1 ; вектор ξ_2 является невырожденным нерешетчатым вектором в Π_2 .

Пусть Γ есть дискретная подгруппа в Π_1 , порожденная множеством

$$\{x \in \Pi_1: \mathbf{P}\{\xi_1 = x_0 + x\} > 0\},$$

где $x_0 \in \Pi_1$ — произвольный вектор в $\mathbf{R}^d$ такой, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = x_0\} > 0$. В силу лемм 21.4 и 21.6 в [9] эта подгруппа Γ является минимальной группой, связанной с ξ_1 , т.е. единственной дискретной подгруппой со следующими свойствами: (1) $\mathbf{P}\{\xi_1 = x + \Gamma\} = 1$ для всякого $x \in \Pi_1$ такого, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = x\} > 0$; (2) если Γ_1 — любая замкнутая подгруппа такая, что $\mathbf{P}\{\xi_1 \in y + \Gamma_1\} = 1$ при некотором $y \in \Pi_1$, то $\Gamma \subseteq \Gamma_1$. В силу теоремы 21.1 в [9] (см. (31) выше) в Γ существует ровно m линейно независимых векторов $z_1, \dots, z_m$ таких, что

$$\Gamma = \{x = k_1 z_1 + \dots + k_m z_m: k_i \in \mathbf{Z}, i = 1, \dots, m\}.$$

Выберем, далее, $r = d - m$ линейно независимых векторов $y_1, \dots, y_r$ в Π_2 и введем в рассмотрение замкнутую подгруппу размерности d

$$\Gamma^* = \{x = k_1 z_1 + \dots + k_m z_m + t_1 y_1 + \dots + t_r y_r: \\ k_i \in \mathbf{Z}, 1 \leq i \leq m; t_j \in \mathbf{R}, 1 \leq j \leq r\}.$$

Пусть, далее, a^* есть произвольный вектор в Π_1 такой, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = a^*\} > 0$; тогда искомая минимальная решетка L^ξ имеет вид

$$L^\xi = L_m(M, a) = a^* + \Gamma^*,$$

где матрица M и вектор a строятся по группе Γ^* и вектору a^* (см. (32)). Минимальная решетка $L_m(M, a)$ для вектора ξ построена.

Завершим теперь доказательство леммы 1. Умножая вектор ξ справа на матрицу M , мы получаем $\xi M = a + \xi^*$, где координаты вектора ξ^* образуют два класса: первый класс $(\xi_1^*, \dots, \xi_m^*)$ составляет арифметический вектор с н.о.д. по каждой координате равным 1, второй класс

$$(\xi_{m+1}^*, \dots, \xi_d^*)$$

составляет нерешетчатый вектор. Этот второй класс и образует третью группу объема $m_3 = d - m$ в доказываемой лемме. Осталось разделить первый класс координат $(\xi_1^*, \dots, \xi_m^*)$ на первую и вторую группы в доказываемой лемме: координата ξ_i^* относится к первой группе, если $\{a_i\} = 0$, и относится ко второй группе, если $\{a_i\} > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ (напомним, что $\{t\}$ есть дробная часть числа t). Лемма 1 доказана.

2.3. Доказательство теоремы 1. Воспользуемся следующим преобразованием меры F (известное преобразование Крамера [3]):

$$F^{(\alpha)}(A) = \frac{\mathbf{E}(e^{\langle \lambda(\alpha), \xi \rangle}; \xi \in A)}{\varphi(\lambda(\alpha))},$$

где $\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha)$, $\alpha \in (A')$. Обозначим $\xi^{(\alpha)}(1), \xi^{(\alpha)}(2), \dots$ последовательность независимых случайных векторов с общим распределением $F^{(\alpha)}$. Соответственно суммы таких векторов обозначим $S^{(\alpha)}(n) = \xi^{(\alpha)}(1) + \dots + \xi^{(\alpha)}(n)$. В этих обозначениях справедливо соотношение (см. [3])

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta^{(m)}(n\alpha)\} \\ &= e^{-n\Lambda(\alpha)} \mathbf{E}(e^{-\langle \lambda(\alpha), S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \rangle}; S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in \Delta^{(m)}(0)). \end{aligned}$$

Поскольку для компакта $K \subseteq (A')$ верно $\lambda(K) \equiv \sup_{\alpha \in K} |\lambda(\alpha)| < \infty$, то справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in \Delta^{(m)}(0)\} \left(1 - e^{-\lambda(K)\Delta d^{1/2}}\right) \\ & \leq e^{n\Lambda(\alpha)} \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta^{(m)}(n\alpha)\} \\ & \leq \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in \Delta^{(m)}(0)\} \left(e^{\lambda(K)\Delta d^{1/2}} - 1\right). \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 1 будет следовать из двух лемм.

Лемма 2. Для любого $\Delta > 0$, любого компакта $K \subset (A')$ найдутся целое $n_0 < \infty$ и вещественное $C < \infty$ такие, что для $n \geq n_0$, $\alpha \in K$ выполняется

$$\mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in \Delta^{(m)}(0)\} \leq \frac{C}{n^{d/2}}. \quad (34)$$

Лемма 3. Для любого $\Delta > 0$, любого компакта $K \subset (A')$ найдутся целое $n_0 < \infty$ и вещественное $c > 0$ такие, что для $n \geq n_0$, $\alpha \in K$, $n\alpha \in \mathbf{R}^d(m)$, выполняется

$$\mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in \Delta^{(m)}(0)\} \geq \frac{c}{n^{d/2}}. \quad (35)$$

Доказательства лемм 2, 3 будут приведены в разделе 3.

Теорема 1 доказана.

2.4. Доказательство теоремы 2. I. Предположим сначала, что выполнено условие (C_1) , и докажем оценку сверху для верхнего предела в утверждении (9). В силу неравенства Чебышева справедливо (см., например, [3])

$$\ln \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(n\alpha)\} \leq - \min_{\beta \in \Delta_1(\alpha)} \Lambda(\beta),$$

где $\Delta_1 = \Delta/n$. Поэтому оценка сверху в (9) будет следовать из соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K} |\varepsilon(n, \Delta, \alpha)| = 0, \quad (36)$$

где $\varepsilon(n, \Delta, \alpha) = \Lambda(\alpha) - \min_{x \in \Delta_1(\alpha)} \Lambda(x)$. Для доказательства (36) выберем $\delta > 0$ и компакт $K_1 \subseteq (\Lambda)$ такие, что $U_\delta(K) = \{x: |x - y| < \delta, y \in K\} \subseteq K_1$. Очевидно, далее, что если

$$r(n) \equiv \frac{d^{1/2}\Delta}{n} \leq \delta, \quad (37)$$

то $\Delta_1(\alpha) \subseteq K_1$. Поэтому, если $r(n)$ удовлетворяет (37), то для $\alpha \in K$ выполняется неравенство

$$|\varepsilon(n, \Delta, \alpha)| \leq \omega_{K_1}(r(n)),$$

где $\omega_{K_1}(r)$ есть модуль непрерывности функции $\Lambda(x)$ на компакте K_1 . Поскольку функция уклонений $\Lambda(x)$ на компакте $K_1 \subseteq (\Lambda)$ равномерно непрерывна, то $\omega_{K_1}(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$; соотношение (36) доказано. Оценка сверху для верхнего предела в утверждении (9) установлена. Заметим попутно, что если условие (C_1) не выполнено, то оценка сверху для верхнего предела в (10) тривиальна и не требует доказательства.

II. Пусть выполнено условие $(C_1^{(0)})$; докажем утверждение (11) теоремы 2. Заметим, что (см., например, [3])

$$\mathbf{P}\{|S(n)| \geq nT\} \leq \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^n |\xi(k)| \geq nT\right\} \leq \exp\left\{-n \inf_{t \geq T} \Lambda_1(t)\right\},$$

где $\Lambda_1(t) = \sup_u \{tu - \ln \mathbf{E} e^{u|\xi|}\}$ есть функция уклонений случайной величины $|\xi|$. Поскольку при выполнении условия $(C_1^{(0)})$ справедливо (см. [3]) $\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{t \geq T} \Lambda_1(t) = \infty$, то соотношение (11) доказано.

III. Докажем оценку снизу в утверждениях (9), (10) теоремы 2. Пусть случайная величина $\gamma \geq 1$ не зависит от вектора ξ и $\mathbf{E}e^{u\gamma} < \infty$ для всех u . Для произвольного $1 \leq N \leq \infty$ введем новый случайный вектор $\xi_{(N)}$ с распределением

$$F_{(N)}(V) = \mathbf{P}\{\xi_{(N)} \in V\} \equiv \mathbf{P}\{\xi \in V \mid |\xi| \leq N\gamma\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi \in V; |\xi| \leq N\gamma\}}{\mathbf{P}\{|\xi| \leq N\gamma\}}.$$

Поскольку носители распределений F и $F_{(N)}$ совпадают, то векторы ξ и $\xi_{(N)}$ имеют одинаковые минимальные решетки. Иначе говоря, процедура построения вектора $\xi_{(N)}$ с помощью случайного уровня $N\gamma$ не меняет структуры исходного вектора ξ , в то время, как та же процедура с не случайным уровнем N может привести к другой структуре вектора $\xi_{(N)}$ (скажем, превратить нерешетчатую часть исходного вектора в решетчатую). С другой стороны, вектор $\xi_{(N)}$ обладает следующим свойством, которого может не быть у исходного вектора ξ : для любых $N \geq 1$, $\lambda \in \mathbf{R}^d$

$$\varphi_{(N)}(\lambda) \equiv \mathbf{E}e^{\langle \lambda, \xi_{(N)} \rangle} < \infty. \quad (38)$$

Обозначим далее $\xi_{(N)}(1), \xi_{(N)}(2), \dots$ независимые случайные векторы с общим распределением $F_{(N)}$; суммы таких векторов обозначим $S_{(N)}(n) = \xi_{(N)}(1) + \dots + \xi_{(N)}(n)$. Все обозначения, отвечающие распределению $F_{(N)}$, снабдим нижним индексом (N) ; например,

$$\begin{aligned} \varphi_{(N)}(\lambda) &= \mathbf{E}e^{\langle \lambda, \xi_{(N)} \rangle}, \quad \lambda \in \mathbf{R}^d; \\ \Lambda_{(N)}(\alpha) &= \sup_{\lambda} \left\{ \langle \lambda, \alpha \rangle - \ln \varphi_{(N)}(\lambda) \right\}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^d. \end{aligned}$$

Для произвольного $N < \infty$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(n\alpha)\} \\ & \geq \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(n\alpha), |\xi(i)| \leq N\gamma, i = 1, \dots, n\} \\ & \geq \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{S_{(N)}(n) \in \Delta(n\alpha)\} + \ln \mathbf{P}\{|\xi(1)| \leq N\gamma\}. \end{aligned} \quad (39)$$

В силу (38) область $(A'_{(N)})$ аналитичности функции $\Lambda_{(N)}(\alpha)$ совпадает с множеством $(\Lambda_{(N)}) = (\Lambda)$. Поэтому компакт K лежит в области $(A'_{(N)})$, и мы можем воспользоваться теоремой 1, в силу которой существуют константы $b_1 = b_1(N, K) > 0$, $n_0 = n_0(N, K) < \infty$ такие, что для $\alpha \in K, n\alpha \in \mathbf{R}^d(m)$, $n \geq n_0$ выполняется

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{S_{(N)}(n) \in \Delta(n\alpha)\} \geq -\Lambda_{(N)}(\alpha) - \frac{1}{n} \ln(b_1(N)n^{d/2}).$$

Поэтому, в силу (39), получаем для $\alpha \in K, n\alpha \in \mathbf{R}^d(m)$

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(n\alpha)\} \geq -\Lambda(\alpha) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(N) \equiv \ln \mathbf{P}\{|\xi| \leq N\gamma\}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2(N) \equiv \sup_{\alpha \in K} |\Lambda_{(N)}(\alpha) - \Lambda(\alpha)|,$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3(N, n) \equiv \frac{1}{n} \ln(b_1(N)n^{d/2}).$$

Очевидно, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_1(N) = 0$. Поскольку для любого $\lambda \in \mathbf{R}^d$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{(N)}(\lambda) = \varphi(\lambda)$, то в том случае, когда выполнено условие (C_1) , в силу теоремы 1 в [3] для любого $\alpha \in (\Lambda)$ имеет место сходимость функций уклонений

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_{(N)}(\alpha) = \Lambda(\alpha). \quad (40)$$

Если же условие (C_1) не выполнено, то мы не можем воспользоваться упомянутой теоремой 1 в [3], поскольку это условие присутствует в ней. В этом случае для любого $\lambda \in \mathbf{R}^d$, $\lambda \neq 0$, выполняется $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{(N)}(\lambda) = \infty$, поэтому сходимость (40) в форме $\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_{(N)}(\alpha) = 0$ тоже имеет место. Из (40), в силу выпуклости функций $\Lambda_{(N)}(\alpha)$, $\Lambda(\alpha)$, вытекает сходимость $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_2(N) = 0$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_3(N, n) = 0$, для любого фиксированного N , то найдется функция $N = N(n)$, стремящаяся к ∞ достаточно медленно, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon_1(N(n)) + \varepsilon_2(N(n)) + \varepsilon_3(N(n), n)) = 0.$$

Оценки снизу для нижних пределов в утверждениях (9), (10) доказаны; теорема 2 доказана.

Поскольку доказательства теорем 3, 4 (на базе уже доказанных теорем 1, 2) практически не отличаются от доказательств теорем 4, 5 и 6 в [2], то мы их опускаем.

3. Доказательство вспомогательных лемм

3.1. Доказательство леммы 2. Обозначим

$$\chi^{(\alpha)}(u) = \inf_{|\lambda|=1} \mathbf{E} \left(\langle \lambda, \xi^{(\alpha)} - \xi^{(\alpha)'} \rangle^2; |\langle \lambda, \xi^{(\alpha)} - \xi^{(\alpha)'} \rangle| < u \right),$$

где случайные векторы $\xi^{(\alpha)}$, $\xi^{(\alpha)'}$ независимы и имеют общее распределение $F^{(\alpha)}$;

$$N^{(\alpha)}(\Delta) = \sup_{u \geq \Delta} \frac{\chi^{(\alpha)}(u)}{u^2}.$$

Непосредственно из следствия из теоремы 6.2 в [13] вытекает утверждение: *существует константа $C(d)$, зависящая только от d , такая, что для всех $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbf{R}^d$ выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in \Delta^{(m)}(0)\} \leq \frac{C(d)}{n^{d/2}} N^{(\alpha)}(\Delta).$$

Поэтому лемма 2 будет следовать из неравенства

$$\sup_{\alpha \in K} N^{(\alpha)}(\Delta) < \infty. \quad (41)$$

Докажем (41). Легко видеть, что для $u > 0$ $\chi^{(\alpha)}(u) \leq 2\mathbf{E}|\xi^{(\alpha)}|^2$, поэтому

$$N^{(\alpha)}(\Delta) \leq \frac{2\mathbf{E}|\xi^{(\alpha)}|^2}{\Delta^2}.$$

Следующее утверждение будет доказано несколько позже, в п. 3.4.

Лемма 4. Для любого компакта $K \subset (A')$ найдется число $C < \infty$ такое, что для $\alpha \in K$ выполняется

$$\mathbf{E}|\xi^{(\alpha)}|^2 \leq C. \quad (42)$$

В силу (42) для любого $\alpha \in G_1$ выполняется $N^{(\alpha)}(\Delta) \leq 2C/\Delta^2$. Соотношение (41) установлено; лемма 2 доказана.

3.2. Доказательство леммы 3. Введем, следуя [14], для любых векторов $b, r \in \mathbf{R}^d(m)$ числа

$$D_n(\alpha, b, r) = \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in b + \Delta_0^{(m)}(0)\} - \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in b + r + \Delta_0^{(m)}(0)\}.$$

Следующее утверждение, которое будет доказано в п. 3.3, является аналогом леммы 3 [14].

Лемма 5. Для любого $\Delta > 0$, любого компакта $K \subset (A')$ найдется число $C_0 < \infty$ такое, что выполняется

$$\sup_{\alpha \in K, n\alpha \in \mathbf{R}^d(m)} \sup_{b \in \mathbf{R}^d(m)} |D_n(\alpha, b, r)| \leq \frac{C_0|r|/\sqrt{n} + \varepsilon_n(r)}{n^{d/2}}, \quad (43)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in \mathbf{R}^d(m)} |\varepsilon_n(r)| = 0$.

Покажем, как с помощью леммы 5 доказать лемму 3. Для этого нам потребуется следующее утверждение, которое будет доказано в п. 3.4.

Лемма 6. Для любого $\Delta > 0$, любого компакта $K \subset (A')$ найдется число $c > 0$ такое, что для $0 < \tau \leq 1$ выполняется

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\alpha \in K} \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in \tau\sqrt{n}\Delta(0)\} \geq \tau^d c. \quad (44)$$

В силу (44) для любого $0 < \tau < 1$ найдется последовательность векторов $x(n, \alpha) \in \mathbf{R}^d$, $|x| \leq \tau\Delta\sqrt{dn}$, для которой выполняется

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\alpha \in K} \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in x(n, \alpha) + \Delta(0)\} \geq \frac{c}{n^{d/2}}.$$

Пусть теперь $\Delta < 1$. Тогда очевидно, что для любого $0 < \tau < 1$ найдется последовательность векторов $x'(n, \alpha) \in \mathbf{R}^d(m)$, $|x'| \leq ((\tau\Delta\sqrt{dn})^2 + d^2)^{1/2}$, для которой выполняется

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\alpha \in K} \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in x'(n, \alpha) + \Delta_0^{(m)}(0)\} \geq \frac{c}{n^{d/2}}. \quad (45)$$

Тогда для $\Delta < 1$ и любого $0 < \tau < 1$ в силу (43), (45) найдется целое $n_0 = n_0(\tau, \Delta) < \infty$ такое, что для всех $n \geq n_0$ справедливо

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in \Delta_0^{(m)}(0)\} \\ & \geq \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha \in x'(n, \alpha) + \Delta_0^{(m)}(0)\} - D_n(\alpha, 0, x'(n, \alpha)) \\ & \geq \frac{c - C_0((\tau\Delta\sqrt{dn})^2 + d^2)^{1/2}/\sqrt{n} - \varepsilon_n}{n^{d/2}}. \end{aligned}$$

Поэтому, выбирая $\tau > 0$ достаточно малым, получаем утверждение леммы 3.

3.3. Доказательство леммы 5. Обозначим $k = d - m$ число нерешетчатых координат вектора ξ . Для $x \in \mathbf{R}^d$ через $x_{(1)} \in \mathbf{R}^d$ обозначим проекцию этого вектора на подпространство, порожденное векторами $e_1, \dots, e_m$. Иначе говоря, для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ выполняется $x_{(1)} = (x_{(1)1}, \dots, x_{(1)d})$, $x_{(1)j} = x_j$ при $1 \leq j \leq m$, $x_{(1)j} = 0$ при $m+1 \leq j \leq d$. Аналогично определим $x_{(2)} = x - x_{(1)}$: $x_{(2)} = (x_{(2)1}, \dots, x_{(2)d})$, $x_{(2)j} = 0$ при $1 \leq j \leq m$, $x_{(2)j} = x_j$ при $m+1 \leq j \leq d$.

Соответственно, обозначим

$$\mathbf{R}_{(s)}^d = \{x \in \mathbf{R}^d: x = x_{(s)}\}, \quad s = 1, 2.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим (см. доказательство леммы 3 в [14]) случайный вектор $\eta_\varepsilon \in \mathbf{R}_{(2)}^d$ такой, что $\mathbf{P}\{|\eta_\varepsilon| \leq \varepsilon\} = 1$ и для соответствующей этому вектору характеристической функции $f_\varepsilon(t_{(2)}) = \mathbf{E}e^{(t_{(2)}, \eta_\varepsilon)}$ при $k = d - m \geq 1$ выполняется неравенство

$$|f_\varepsilon(t_{(2)})| \leq \frac{c}{\varepsilon^{k+1}|t_{(2)}|^{k+1}},$$

где c не зависит от $t_{(2)}$ и ε . Вектор η_ε будет сглаживать «нерешетчатую» часть $S_{(2)}(n) - n\alpha_{(2)}$ вектора $S(n) - n\alpha$ при $n\alpha \in \mathbf{R}^d(m)$.

Отметим, что для $x \in \mathbf{R}^d(m)$ выполняется $x_{(1)} \in \mathbf{R}_{(1)}^d(m)$, где $\mathbf{R}_{(1)}^d(m) = \mathbf{Z}^d \cap \mathbf{R}_{(1)}^d$; соответственно, $x_{(2)} \in \mathbf{R}_{(2)}^d$. В пространстве $\mathbf{R}^d(m)$ через $\nu = \nu(A)$ обозначим меру, определяемую соотношением:

$$\nu(dx) = \nu_{(1)}(dx_{(1)}) \nu_{(2)}(dx_{(2)}),$$

где $\nu_{(1)}$ — считающая мера в $\mathbf{R}_{(1)}^d(m)$, $\nu_{(2)}$ — мера Лебега в $\mathbf{R}_{(2)}^d$. Для $n\alpha \in \mathbf{R}^d(m)$ введем теперь плотность распределения случайного вектора

$S^{(\alpha)}(n) - n\alpha + \eta_\epsilon$ относительно меры ν :

$$p(S^{(\alpha)}(n) - n\alpha + \eta_\epsilon; x) = \frac{\mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha + \eta_\epsilon \in dx\}}{\nu(dx)}$$

в точке $x \in \mathbf{R}^d(m)$. Будем использовать следующее представление для этой плотности:

$$p(S^{(\alpha)}(n) - n\alpha + \eta_\epsilon; x) = \frac{1}{(2i\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^m \times \mathbf{R}^k} e^{-i\langle t, x \rangle} f^n(\alpha; t) e^{-i\langle t, n\alpha \rangle} f_\epsilon(t) dt, \quad (46)$$

где $f(\alpha; t) = \mathbf{E}e^{i\langle t, \xi^{(\alpha)}(1) \rangle}$, $[-\pi, \pi]^m \times \mathbf{R}^k = \{t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbf{R}^d: t_j \in [-\pi, \pi], 1 \leq j \leq m, t_j \in \mathbf{R}^1, m+1 \leq j \leq d\}$.

Формула (46) получается, если рассмотреть производящую функцию по «решетчатым» координатам и характеристическую функцию по остальным координатам и сначала написать формулу обращения для сглаженной характеристической функции (это будет интеграл по $\mathbf{R}^k$), а затем обратить производящую функцию (для чего потребуется интеграл по компакту $[-\pi, \pi]^m$).

Следующее утверждение будет доказано в п. 3.4.

Лемма 7. Для любого компакта $K \subset (A')$, любого $t \in [-\pi, \pi]^m \times \mathbf{R}^k$, $t \neq 0$, выполняется $\sup_{\alpha \in K} |f(\alpha; t)| < 1$.

Далее доказательство леммы 5 (с использованием представления (46) и леммы 7) является практически дословным повторением доказательства леммы 3 в [14], поэтому мы его опускаем. Лемма 5 доказана.

3.4. Доказательство лемм 4, 6, 7. Доказательство леммы 4. Очевидно, что для любого компакта $K \subset (A')$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\sup_{\alpha \in K} \mathbf{E}e^{|\delta| |\xi^{(\alpha)}(1)|} < \infty. \quad (47)$$

Из (47) следует утверждение леммы 4.

Доказательство леммы 6. Из (47) следует

$$\sup_{\alpha \in K} \mathbf{E}|\xi^{(\alpha)}(1) - \alpha|^3 < \infty. \quad (48)$$

Кроме того, в силу известных свойств функции уклонений (см., например, [3]), для $\alpha \in (A')$ выполняется

$$\mathbf{E}\xi^{(\alpha)} = \alpha, \quad B(\alpha) \equiv \mathbf{E}(\xi^{(\alpha)} - \alpha)^T (\xi^{(\alpha)} - \alpha) = (\Lambda''(\alpha))^{-1},$$

поэтому для $\sigma^2(\alpha) = \det(B(\alpha))$ справедливо

$$\inf_{\alpha \in K} \sigma(\alpha) > 0. \quad (49)$$

Из соотношений (48), (49), в силу известных оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме, получаем утверждение леммы 6.

Доказательство леммы 7. Очевидно, что для любого $t \in [-\pi, \pi]^m \times \mathbf{R}^k$, $t \neq 0$, выполняется $|f(\alpha; t)| < 1$. Поэтому утверждение леммы 7 является непосредственным следствием леммы 8 в [3] (с. 56).

В заключение авторы выражают благодарность А. Ю. Зайцеву, который обратил наше внимание на работу [14], а также рецензенту, который указал нам на работы [4]–[8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Мозульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие отклонения. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, № 1, с. 3–17.
2. Боровков А. А., Мозульский А. А. Вторая функция отклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий. — Сиб. матем. журн., 1996, т. 37, № 4, с. 745–782.
3. Боровков А. А., Мозульский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992, 222 с.
4. von Barh B. Multi-dimensional integral limit theorem for large deviations. — Ark. Mat., 1967, v. 7, p. 89–99.
5. Осипов Л. В. Вероятности больших отклонений сумм независимых случайных векторов для некоторых классов множеств. — Матем. заметки, 1982, т. 31, № 1, с. 147–155.
6. Osipov L. V. On large deviations for sums of random vectors in $\mathbf{R}^k$. — J. Multivariate Anal., 1981, v. 11, p. 115–126.
7. Алешкявичене А. К. Многомерные интегральные предельные теоремы для вероятностей больших отклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 3, с. 62–82.
8. Алешкявичене А., Светулявичене В. Вероятности умеренно больших отклонений в многомерном случае. — Литов. матем. журн., 1984, т. 24, с. 201–209.
9. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
10. Bahadur R. R., Ranga Rao R. On deviations of the sample mean. — Ann. Math. Statist., 1960, v. 31, № 4, p. 1015–1027.
11. Петров В. В. О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
12. Dinwood I. H. A note on the upper bound for i.i.d. large deviations. — Ann. Probab., 1991, v. 19, № 2, p. 1732–1736.
13. Esseen C. G. On the concentration function of a sum of independent random variables. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1968, B. 9, S. 290–308.
14. Музин А. Б. О локальных вероятностях сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 4, с. 677–685.

Поступила в редакцию
12.II.1999