Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, К. Фляйшманн, Отклонения от типичных пропорций в многотипных критических ветвящихся процессах Гальтона–Ватсона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 30–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 07:50:01

© 2000 г.

ВАТУТИН В. А.*; ФЛЯЙШМАНН К.**

ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ТИПИЧНЫХ ПРОПОРЦИЙ В МНОГОТИПНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА¹⁾

Пусть $\{Z(t): t = 0, 1, \dots\}$ — критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с K типами частиц, а $w = (w_1, \dots, w_K)^T$ — вектор с действительными компонентами. Известно, что при довольно общих условиях на характеристики исходного процесса последовательность $\langle Z(t), w \rangle := \sum_k Z_k(t) w_k$, при соответствующей нормировке и условии невырождения, сходится по распределению при $t \uparrow \infty$ ([8]). Однако этот предел является вырожденным с единичным атомом в 0, если вектор w существенно отличается от вектора «типичных» пропорций числа частиц различных типов, т.е. если w ортогонален левым собственным векторам, соответствующим максимальному собственному значению матрицы математических ожиданий числа потомков частиц процесса. В работе показано, что в этом случае (при естественных дополнительных ограничениях на законы распределения числа потомков частиц различных типов) существует нормировка, обеспечивающая невырожденность предельного закона. В отличие от случая конечной дисперсии числа непосредственных потомков, который был рассмотрен ранее в [1] и [3], предельный закон (например, его «показатель») существенно зависит от w .

Ключевые слова и фразы: типичные пропорции типов, невырожденный предел, невырождение, отклонения, асимптотическое разложение.

1. Введение

1.1. Предварительные сведения. Обозначим через $Z_k(t)$ число частиц типа $k \in \{1, \dots, K\} =: K$ в момент t в многотипном ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона $Z = (Z_1, \dots, Z_K)^T$. Предположим, что закон

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

**Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr., 39, D-10117 Berlin, Germany; e-mail: fleischmann@wias-berlin.de

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00012, № 96-15-96092, и фонда ИНТАС-РФФИ, грант № 95-0099.

распределения числа новых частиц задается векторной производящей функцией

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = (F_1(\mathbf{z}), \dots, F_K(\mathbf{z}))^\top, \quad (1)$$

где²⁾

$$F_j(\mathbf{z}) := E_j z_1^{Z_1(1)} \dots z_K^{Z_K(1)}, \quad \mathbf{z} \in E, \quad (2)$$

а $E := \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_K)^\top: z_k \text{ комплексные числа, } |z_k| \leq 1, k \in K\}$. Здесь символ E_j обозначает математическое ожидание относительно закона распределения P_j , порожденного ветвящимся процессом, начавшимся в момент $t = 0$ с одной частицы типа j . Обозначим через $\mathbf{M}$ матрицу математических ожиданий числа непосредственных потомков частиц процесса с элементами $m_{j,k} := E_j Z_k(1)$. Будем предполагать, что $\mathbf{M}$ неприводима, аperiodична и имеет перронов корень, равный 1 (*условие критичности*). Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_K)^\top > \mathbf{0}$ и $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_K) > \mathbf{0}^\top$ обозначают правый и левый собственные векторы матрицы $\mathbf{M}$, соответствующие ее перронову корню и нормированные так, что

$$\|\mathbf{u}\| := \sum_{j \in K} |u_j| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{1} \rangle = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{v}\mathbf{u} = \sum_{j \in K} v_j u_j = 1 \quad (3)$$

(где $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^\top$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$). Известно ([8], [5]), что если

$$\mathbf{v}(\mathbf{1} - \mathbf{F}(\mathbf{1} - x\mathbf{u})) \sim x - x^{1+\alpha} L(x) \quad \text{при } x \downarrow 0, \quad (4)$$

где $\alpha \in (0, 1]$, а $L(x)$ — (положительная) функция, медленно меняющаяся при $x \rightarrow 0+$, то *вероятность невырождения* имеет следующее асимптотическое представление:

$$Q_j(t) := P_j\{\mathbf{Z}(t) \neq \mathbf{0}\} \sim u_j t^{-1/\alpha} L^*(t) \quad \text{при } t \uparrow \infty. \quad (5)$$

Здесь L^* — некоторая функция, медленно меняющаяся на бесконечности. Наконец, для любого начального типа j условный случайный вектор $\{q(t) \mathbf{Z}(t) | \mathbf{Z}(t) \neq \mathbf{0}\}$, где

$$q(t) := \sum_{j \in K} v_j Q_j(t) \sim t^{-1/\alpha} L^*(t) \quad \text{при } t \uparrow \infty, \quad (6)$$

имеет предельное распределение, не зависящее от начального состояния и определяемое соотношением:³⁾

$$\lim_{t \uparrow \infty} E_j \left\{ \exp \left[-i q(t) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{w} \rangle \right] | \mathbf{Z}(t) \neq \mathbf{0} \right\} = 1 - \frac{i \mathbf{v} \mathbf{w}}{(1 + (i \mathbf{v} \mathbf{w})^\alpha)^{1/\alpha}}, \quad (7)$$

²⁾ Если вектор-столбец $\mathbf{z}$ оказывается аргументом какой-либо функции, то, допуская некоторую вольность в обозначениях, мы часто без объяснений преобразуем его в вектор $\mathbf{z}^\top$, если эта операция не приводит к двусмысленности.

³⁾ Если $\beta > 0$, то для комплексной функции $z \mapsto z^\beta$ мы всегда выбираем главную ветвь, т.е. ветвь, для которой $1^\beta = 1$.

$j \in K$, $\mathbf{w}^\top \in R^K$, где R — множество действительных чисел. Из этого равенства следует, что носитель предельного закона, задаваемого преобразованием Фурье (7), сосредоточен на луче $\{\lambda \mathbf{v}: \lambda \geq 0\}$ в R^K . В этом смысле левый собственный вектор $\mathbf{v}$ описывает «типичные» предельные пропорции частиц различных типов. Следовательно, для любого фиксированного вектора $\mathbf{w}$, удовлетворяющего соотношению $\mathbf{v}\mathbf{w} = 0$ (т.е. в ситуации, когда рассматривается случай «отклонения» типов от стандартных пропорций),

$$\{q(t) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{w} \rangle \mid \mathbf{Z}(t) \neq 0\} \xrightarrow{t \uparrow \infty} 0 \text{ по } P_j\text{-мере.} \quad (8)$$

Наша цель — найти в этом случае такую нормировку $\hat{q}(t)$, при которой для вектора $\mathbf{w} \neq 0$ существует нетривиальное предельное распределение условной случайной величины

$$\{\hat{q}(t) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{w} \rangle \mid \mathbf{Z}(t) \neq 0\}.$$

Атрейа и Ней [1] и Бадалбаев и Мухитдинов [3] решили эту задачу для процессов с конечными дисперсиями числа потомков различных типов (что, в частности, означает, что $\alpha = 1$ в (4)). При этом условии $\hat{q}(t) = \sqrt{q(t)}$ (и имеет порядок $t^{-1/2}$), а предельное распределение является «симметричным экспоненциальным» (с параметром, зависящим от $\mathbf{w}$).

1.2. Основной результат. Для нахождения подходящей нормировки мы накладываем на производящие функции процесса более сильное условие, чем (4). Для этого нам понадобятся дополнительные обозначения. Вспоминая (1) и (2), зададим векторы $\mathbf{D}(1 - \mathbf{z}) = (D_1(1 - z), \dots, D_K(1 - z))^\top$ равенством

$$1 - \mathbf{F}(\mathbf{z}) =: \mathbf{M}(1 - \mathbf{z}) - \mathbf{D}(1 - \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in E. \quad (9)$$

Заметим, что⁴⁾

$$|\mathbf{D}(1 - \mathbf{z})| \leq c \|\mathbf{1} - \mathbf{z}\|. \quad (10)$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{w}$ с $\mathbf{v}\mathbf{w} = 0$ и положим

$$J(\lambda, \mathbf{w}, t) = \sum_{r=t}^{\infty} \mathbf{v}\mathbf{D} \left(\mathbf{1} - \exp[-i\lambda \mathbf{M}^r \mathbf{w}] \right), \quad (11)$$

$\lambda \in R$, $t \geq 0$, где, по определению, $e^{\mathbf{z}} = \exp[\mathbf{z}]$ — вектор-столбец с компонентами $e^{z_1}, \dots, e^{z_K}$.

⁴⁾ Если $\mathbf{z}$ — вектор-строка, мы обозначаем через $|\mathbf{z}|^\beta$ вектор с компонентами $|z_k|^\beta$. Аналогичное соглашение действует для матриц. Кроме того, буквой c мы всюду обозначаем положительные константы, а символ $\leq$ используется для обозначения вектора с положительными постоянными компонентами. От формулы к формуле значения этих величин могут меняться.

З а м е ч а н и е 1. (i) (*корректность*). Заметим, что в силу критичности и соотношения $\mathbf{vw} = 0$ функция $J(\cdot, \mathbf{w}, \cdot)$ определена корректно, так как в этом случае для k -й компоненты вектора $\mathbf{M}^r \mathbf{w}$ справедливо соотношение

$$(\mathbf{M}^r \mathbf{w})_k = O(\varrho^r) \quad \text{при } r \uparrow \infty, \quad k \in K, \quad (12)$$

для некоторого $\varrho \in (0, 1)$ (см., например, [2, теорема Фробениуса 5.2.1]), и, следовательно, ввиду (10),

$$\left| D_j \left(1 - \exp[-i\lambda \mathbf{M}^t \mathbf{w}] \right) \right| \leq c \|\lambda \mathbf{M}^t \mathbf{w}\| \leq c |\lambda| \varrho^t, \quad (13)$$

$j \in K$, что обеспечивает сходимость ряда в (11).

(ii) (*сопряженность*). Поскольку

$$\overline{\mathbf{D}(1 - \mathbf{z})} = \mathbf{D}(1 - \bar{\mathbf{z}}), \quad \text{то } \overline{J(\lambda, \mathbf{w}, t)} = J(-\lambda, \mathbf{w}, t).$$

(iii) (*частный случай J*). Заметим, что соотношение

$$\mathbf{M}\mathbf{w} = 0 \quad (14)$$

влечет $\mathbf{vw} = 0$, поскольку $\mathbf{vw} = (\mathbf{vM})\mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{M}\mathbf{w})$. В этом частном случае $J(\lambda, \mathbf{w}, t) = 0$, $t \geq 1$, и $J(\lambda, \mathbf{w}, 0) = \mathbf{vD}(1 - e^{-i\lambda \mathbf{w}})$.

Для удобства ссылок введем следующие условия (соответствующий пример будет обсужден в следующем пункте статьи).

Условие А (*основные предположения*). Напомним, что мы исследуем критический ветвящийся процесс, удовлетворяющий (4), и что $\mathbf{w}$ является фиксированным вектором, для которого $\mathbf{vw} = 0$.

(а) (*показатель G*). Существует $G \in [\alpha, 1)$ и действительная константа φ , $|\varphi| \leq 1 - G$, такие, что

$$J(\lambda, \mathbf{w}, 0) \sim -e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} L_1(|\lambda|) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0 \pm, \quad (15)$$

где $L_1(x)$ — медленно меняющаяся функция при $x \rightarrow 0+$.

(б) (*оценка остатка ряда*). Для некоторого $\lambda_0 \in (0, 1)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon)$ такое, что для всех действительных λ с $|\lambda| \leq \lambda_0$ и всех $t \geq T$

$$\left| \sum_{r=t}^{\infty} D_k \left(1 - \exp[-i\lambda \mathbf{M}^r \mathbf{w}] \right) \right| \leq \varepsilon |J(\lambda, \mathbf{w}, 0)|, \quad k \in K. \quad (16)$$

(в) (*локальное поведение*). Существуют константа $\gamma \in [0, \alpha/2)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$|D_k(1 - \mathbf{z}) - D_k(1 - \mathbf{z}^*)| \leq c \left[\|\mathbf{1} - \mathbf{z}\|^{\alpha-\gamma} + \|\mathbf{1} - \mathbf{z}^*\|^{\alpha-\gamma} \right] \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\| \quad (17)$$

для всех $z, z^* \in E$, удовлетворяющих неравенствам $\|1 - z\| \leq \varepsilon$ и $\|1 - z^*\| \leq \varepsilon$.

Положим

$$R(x) := x^{1+G} L_1(x), \quad (18)$$

где функция L_1 та же, что и в (а), и пусть $\hat{R}$ обозначает «обратную» функцию, удовлетворяющую соотношениям

$$\hat{R}(R(x)) \sim x \text{ и } R(\hat{R}(x)) \sim x \text{ при } x \downarrow 0. \quad (19)$$

Согласно [6, 5°, с. 27], такая функция существует, является асимптотически единственной (в очевидном смысле) и

$$\hat{R}(x) = x^{1/(1+G)} \hat{L}_1(x), \quad (20)$$

где функция $\hat{L}_1(x)$ также правильно меняется в окрестности $x = 0+$. Более того, можно предполагать, что $\hat{R}(x)$ монотонна ([6, 4°, с. 25]). Поэтому в дальнейшем мы всюду считаем, что $\hat{R}(x)$ является монотонной неубывающей функцией, определенной для всех $x \in (0, \infty)$.

Вспоминая обозначение $q(t)$, введенное в (6), положим

$$\hat{q}(t) := \hat{R}(q(t)). \quad (21)$$

Ввиду (20) и (6)

$$\hat{q}(t) = q^{1/(1+G)}(t) \hat{L}(q(t)) \sim t^{-1/(\alpha(1+G))} (L^*(t))^{1/(1+G)} \hat{L}(t^{-1/\alpha} L^*(t)).$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат статьи:

Теорема (предельные отклонения). При выполнении комплекса условий А справедливы следующие утверждения. Для всех $j \in K$ и $\lambda \in R$

(а) (предельная теорема для отношений)

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \infty} E_j \left\{ \exp \left[-i\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{\langle Z(t), u \rangle} \right) \langle Z(t), w \rangle \right] \mid Z(t) \neq 0 \right\} \\ = \exp \left[-e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} \right]; \end{aligned}$$

(б) (абсолютная нормировка)

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \infty} E_j \left\{ \exp \left[-i\lambda \hat{q}(t) \langle Z(t), w \rangle \right] \mid Z(t) \neq 0 \right\} \\ = 1 - \frac{e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G}}{(1 + (e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G})^\alpha)^{1/\alpha}}. \end{aligned}$$

Следовательно, используя случайную нормировку, определенную в (а), мы получаем в пределе (ср. с [4, формула (XVII.3.18)]) *устойчивое* распределение с показателем $1 + G$ (заметим, что G может быть больше, чем α), в то время как неслучайная нормировка, указанная в (б), приводит в пределе к *смеси* таких законов с весами, выбранными согласно «классическому» предельному закону (7).

З а м е ч а н и е 2. ($G = 1$). Мы не рассматриваем случай $G = 1$, поскольку его анализ требует более деликатных рассуждений (см., например, ниже неравенства (34) и (50)) и мог бы привести к значительному увеличению размеров статьи.

После подготовительных рассуждений в разделе 2, доказательство основной теоремы будет дано в заключительном разделе работы.

1.3. Пример. В этом пункте мы хотим проиллюстрировать предположения нашей теоремы при помощи примера, в котором $G > \alpha$.

Рассмотрим случай $K = 3$ типов частиц. Для $\theta \in (0, \frac{1}{6})$ положим

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6} - \theta\right) + \left(\frac{1}{3} + \theta\right) z_1 + \frac{1}{3} z_2 + \frac{1}{6} z_3^2 \\ \left(\frac{1}{6} + \theta\right) + \left(\frac{1}{3} - \theta\right) \left(z_1 + \frac{1}{2} (1 - z_1)^{1+2/3}\right) + \frac{1}{3} z_2 + \frac{1}{6} z_3^2 \\ \frac{1}{3} z_1 + \frac{1}{3} z_2 + \frac{1}{3} \left(z_3 + \frac{1}{2} (1 - z_3)^{1+1/2}\right) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Ясно, что в этом случае

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \theta & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \theta & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} z_3^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \theta\right) z_1^{1+2/3} + \frac{1}{6} z_3^2 \\ \frac{1}{6} z_3^{1+1/2} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{M}$ математических ожиданий числа непосредственных потомков частиц процесса имеет собственные значения $1, \theta, 0$, причем векторы $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ и $\mathbf{u} = (3 - 3\theta)^{-1} (1, 1 - 2\theta, 1 - \theta)^T$ являются нормированными собственными векторами, отвечающими собственному значению 1. Таким образом,

$$\mathbf{v} (1 - \mathbf{F}(1 - x\mathbf{u})) = x - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} x\right)^{1+1/2} (1 + o(1)) \quad \text{при } x \downarrow 0,$$

и, следовательно, (4) выполнено с $\alpha = \frac{1}{2}$ и $L(x) \equiv \frac{1}{6} (\frac{1}{3})^{3/2}$. С другой стороны, вектор $\mathbf{w} = (1, -1, 0)^T$ удовлетворяет соотношениям $\mathbf{v}\mathbf{w} = 0$,

$M^r w = \theta^r w$, $r \geq 0$, и, ввиду специального вида вектор-функции D ,

$$J(\lambda, w, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \theta \right) \sum_{r=t}^{\infty} \left(1 - \exp[-i\lambda\theta^r] \right)^{1+2/3}.$$

Ясно, что при $\lambda \rightarrow 0 \pm$

$$\begin{aligned} J(\lambda, w, t) &\sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \theta \right) (i\lambda)^{1+2/3} \sum_{r=t}^{\infty} \theta^{r(1+2/3)} \\ &= -e^{i(\pi/2)(1/3) \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+2/3} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \theta \right) \theta^{t(1+2/3)} \left(1 - \theta^{1+2/3} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Итак, пп. (а) и (б) условия А выполнены с $G = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} = \alpha$, $\varphi = \frac{1}{3} = 1 - G$ и $L_1(x) \equiv c$. Более того, п. (в) справедлив при $\gamma = 0$ и всюду в E . Наконец, $q(t) \sim ct^{-2}$, $\hat{R}(x) \sim cx^{3/5}$ и, следовательно, $\hat{q}(t) \sim ct^{-6/5}$.

2. Предварительные рассуждения: асимптотическое разложение

2.1. Ключевое разложение. Рассмотрим производящую вектор-функцию $F(t, z) = (F_1(t, z), \dots, F_K(t, z))^T$ процесса $Z(t)$, которая в силу свойства ветвления удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$F(t+1, z) = F(F(t, z)), \quad t \geq 0, \quad z \in E. \quad (23)$$

Положим

$$Q(t, z) := 1 - F(t, z), \quad Q(t) := Q(t, 0). \quad (24)$$

Из оценки

$$|Q(1, z)| \leq M |1 - z| \quad (25)$$

(см., например, [7, с. 114]), получаем

$$|Q(t+1, z)| = |Q(1, F(t, z))| \leq M |Q(t, z)|. \quad (26)$$

Итерирование дает

$$|Q(t, z)| \leq M^t |1 - z|, \quad t \geq 0, \quad z \in E. \quad (27)$$

Из (23) и (9) вытекает, что при $t \geq 1$

$$Q(t+1, z) = 1 - F(1 - Q(t, z)) = MQ(t, z) - D(Q(t, z)), \quad (28)$$

что после итерирования приводит к равенству

$$Q(t+1, z) = M^t Q(1, z) - \sum_{0 \leq r < t-1} M^r D(Q(t-r, z)), \quad t \geq 0. \quad (29)$$

Положим теперь

$$D(1, z) := D(1 - z), \quad (30)$$

где $z = e^{-i\lambda w}$ для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $w^T \in \mathbb{R}^K$, и определим последовательно

$$D(t+1, z) := MD(t, z) + D(1 - \exp[-i\lambda M^t w]), \quad t \geq 1. \quad (31)$$

Отсюда для $t \geq 0$ получаем

$$D(t+1, z) = M^t D(1 - e^{-i\lambda w}) + \sum_{0 \leq p < t} M^p D(1 - \exp[-i\lambda M^{t-p} w]). \quad (32)$$

Следующее утверждение является ключевым в наших рассуждениях.

Предложение (асимптотическое разложение). Пусть выполнен комплекс условий А. Определим векторы $\Delta(t, \lambda)$ соотношениями

$$Q(t, e^{-i\lambda w}) = i\lambda M^t w - D(t, e^{-i\lambda w}) + \Delta(t, \lambda), \quad t \geq 1. \quad (33)$$

Существуют положительные константы β, δ и λ_0 такие, что

$$|\Delta_j(t, \lambda)| \leq c t^\beta (|\lambda|^{(1+G+\delta)\wedge 2} + \varrho^t), \quad (34)$$

$t \geq 1$, $|\lambda| \leq \lambda_0$, $j \in K$, где ϱ взято из теоремы Фробениуса (12), а $a \wedge b = \min(a, b)$.

Доказательство этого утверждения требует предварительных рассуждений и будет завершено в конце п. 2.4.

2.2. Предварительные оценки. В качестве первого шага в доказательстве предложения рассмотрим случай $t = 1$. Из определения (33) вектора $\Delta(1, \lambda)$ и (9) вытекает, что

$$\Delta(1, \lambda) = M(1 - e^{-i\lambda w} - i\lambda w). \quad (35)$$

Но

$$|1 - e^{-ix} - ix| \leq \frac{1}{2} |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (36)$$

и, следовательно,

$$|\Delta(1, \lambda)| \leq M |1 - e^{-i\lambda w} - i\lambda w| \leq c |\lambda|^2. \quad (37)$$

Последнее доказывает (34) для $t = 1$.

Случай произвольного t требует более деликатных рассуждений и, в частности, для этого необходимо вспомнить определение (11) величины $J(\lambda, w, t)$.

Лемма 1. Существует $\lambda_0 \in (0, 1)$ такое, что при выполнении комплекса условий А для всех $\varepsilon > 0$ найдется $T = T(\varepsilon) \geq 1$ такое, что

$$\left| D_k(t, e^{-i\lambda \mathbf{w}}) - u_k J(\lambda, \mathbf{w}, 0) \right| \leq \varepsilon |J(\lambda, \mathbf{w}, 0)| + t^2 \varrho^t, \quad (38)$$

$|\lambda| \leq \lambda_0$, $t \geq T$, $k \in K$, где ϱ то же, что и в (12).

Доказательство. В силу (32) и определения (11)

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{D}(t, e^{-i\lambda \mathbf{w}}) - \mathbf{u} J(\lambda, \mathbf{w}, 0) \right| &\leq \mathbf{u} \left(\mathbf{v} \left| \sum_{p=t}^{\infty} \mathbf{D}(1 - \exp[-i\lambda \mathbf{M}^p \mathbf{w}]) \right| \right) \\ &+ \sum_{p=0}^{t-1} |\mathbf{M}^p - \mathbf{u}\mathbf{v}| \left| \mathbf{D}(1 - \exp[-i\lambda \mathbf{M}^{t-p-1} \mathbf{w}]) \right|. \end{aligned} \quad (39)$$

Согласно теореме Фробениуса (см., например, [2, теорема 5.2.1]),

$$|\mathbf{M}^p - \mathbf{u}\mathbf{v}| \leq c \varrho^p \mathbf{I}, \quad (40)$$

где ϱ то же самое, что и в (12), а $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Из условия (в) в комплексе предположений А (с $\mathbf{z}^* = 1$) вытекает, что существуют константы $\gamma \in [0, \alpha/2)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$|\mathbf{D}(1 - \mathbf{z})| \leq c \|\mathbf{1} - \mathbf{z}\|^{1+\alpha-\gamma} \quad (41)$$

для всех $\mathbf{z} \in E$, удовлетворяющих неравенству $\|\mathbf{1} - \mathbf{z}\| \leq \delta$. В силу (12)

$$\|\mathbf{1} - \exp[-i\lambda \mathbf{M}^{t-p-1} \mathbf{w}]\| \leq \|\lambda \mathbf{M}^{t-p-1} \mathbf{w}\| \leq |\lambda| c \varrho^{t-p-1} \quad (42)$$

Выберем $\lambda_0 = \lambda_0(\delta) \in (0, 1)$ так, чтобы последнее выражение было меньше, чем δ , как только $|\lambda| \leq \lambda_0$. Для таких значений λ соотношения (41) и (42) дают

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{D}(1 - \exp[-i\lambda \mathbf{M}^{t-p-1} \mathbf{w}]) \right| &\leq c \left(|\lambda| \varrho^{t-p-1} \right)^{1+\alpha-\gamma} \\ &\leq c |\lambda|^{1+\alpha-\gamma} \varrho^{t-p-1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Комбинируя эту оценку с (40), получаем, что

$$\sum_{p=0}^{t-1} |\mathbf{M}^p - \mathbf{u}\mathbf{v}| \left| \mathbf{D}(1 - \exp[-i\lambda \mathbf{M}^{t-p-1} \mathbf{w}]) \right| \leq t c \varrho^{t-1} \mathbf{1} \leq t^2 \varrho^t \mathbf{1}$$

для всех достаточно больших t . Для завершения доказательства осталось подставить найденную оценку в (39) и использовать п. (б) из комплекса условий А для оставшегося члена в (39).

Следствие. При выполнении комплекса условий А найдутся константы $\gamma \in [0, \alpha/2)$ и $\lambda_0 \in (0, 1)$ такие, что для всех $|\lambda| \leq \lambda_0$ и $t \geq 1$

$$|D_k(t, e^{-i\lambda w})| \leq c \left(|\lambda|^{1+G-\gamma} + t^2 \varrho^t \right), \quad k \in K.$$

Доказательство. Это следует из предыдущей леммы и п. (а) комплекса условий А.

Для удобства мы сформулируем следующее простое наблюдение.

Лемма 2. Пусть $B > 0$ — некоторое фиксированное число. Для любых комплексных чисел $x, y \neq 0$

$$|(x+y)^{B+1} - x^{B+1}| \leq c |yx^B| \left(1 + \left| \frac{y}{x} \right|^B \right) = c (|yx^B| + |y^{B+1}|).$$

Доказательство. Действительно,

$$|(x+y)^{B+1} - x^{B+1}| = |yx^B| \left| \frac{(1+z)^{B+1} - 1}{z} \right| \quad (44)$$

для $z = y/x$. Ясно, что

$$\left| \frac{(1+z)^{B+1} - 1}{z} \right| \leq c (1 + |z|^B). \quad (45)$$

(Для того чтобы убедиться в справедливости данного соотношения, нужно отдельно рассмотреть случаи $|z| \downarrow 0$ и $|z| \uparrow \infty$.) Отсюда легко следует необходимое неравенство.

2.3. Первые оценки для $\bar{Q}$ и Δ . Заметим прежде всего, что в силу (27),

$$|Q(t, e^{-i\lambda w})| \leq M^t |1 - e^{-i\lambda w}| \leq M^t |w| |\lambda| \leq c |\lambda|, \quad (46)$$

$t \geq 1, \lambda \in \mathbb{R}$, где на последнем шаге мы использовали критичность рассматриваемого процесса. Отсюда, как и в (41), следует, что найдутся константы $\gamma \in [0, \alpha/2)$ и $\lambda_0 \in (0, 1)$ такие, что

$$|D(Q(t, e^{-i\lambda w}))| \leq c \|Q(t, e^{-i\lambda w})\|^{1+\alpha-\gamma} \leq c |\lambda|^{1+\alpha-\gamma} \quad (47)$$

для всех $|\lambda| \leq \lambda_0$. Положим

$$\bar{Q}(t, e^{-i\lambda w}) := Q(t, e^{-i\lambda w}) - i\lambda M^t w, \quad t \geq 1. \quad (48)$$

Наша следующая цель — убедиться в справедливости формулируемой ниже леммы.

Лемма 3 (первые оценки). *Существуют константы $\gamma \in [0, \alpha/2)$ и $\lambda_0 \in (0, 1)$ такие, что для всех $k \in \mathbb{K}$, $t \geq 1$ и $|\lambda| \leq \lambda_0$*

$$|\overline{Q}_k(t, e^{-i\lambda w})| \leq ct|\lambda|^{1+\alpha-\gamma}, \quad (49)$$

$$|\Delta_k(t, \lambda)| \leq ct^2|\lambda|^{(1+2(\alpha-\gamma)) \wedge 2}. \quad (50)$$

Доказательство. Используя (28), определение (33) величины $\Delta(t, \lambda)$ и прибавляя и вычитая член D , мы получаем для $t \geq 1$ представление

$$\begin{aligned} Q(t+1, e^{-i\lambda w}) &= M \left[i\lambda M^t w - D(t, e^{-i\lambda w}) + \Delta(t, \lambda) \right] \\ &\quad - D(1 - \exp[-i\lambda M^t w]) \\ &\quad - \left[D(Q(t, e^{-i\lambda w})) - D(1 - \exp[-i\lambda M^t w]) \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу того же определения (33)

$$Q(t+1, e^{-i\lambda w}) = i\lambda M^{t+1} w - D(t+1, e^{-i\lambda w}) + \Delta(t+1, \lambda). \quad (51)$$

Опираясь на соотношение (31), мы приходим к следующей рекуррентной формуле:

$$\Delta(t+1, \lambda) = M\Delta(t, \lambda) - \left[D(Q(t, e^{-i\lambda w})) - D(1 - \exp[-i\lambda M^t w]) \right],$$

$t \geq 1$. Отсюда для $t \geq 0$ находим:

$$\begin{aligned} \Delta(t+1, \lambda) &= M^t \Delta(1, \lambda) \\ &\quad - \sum_{0 \leq p < t} M^p \left[D(Q(t-p, e^{-i\lambda w})) - D(1 - \exp[-i\lambda M^{t-p} w]) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Ввиду (28) при $t \geq 1$

$$|\overline{Q}(t+1, z)| \leq M|\overline{Q}(t, z)| + |D(Q(t, z))|, \quad (53)$$

что после итерирования приводит к неравенству

$$|\overline{Q}(t+1, z)| \leq M^t |\overline{Q}(1, z)| + \sum_{0 \leq r < t} M^r |D(Q(t-r, z))|, \quad t \geq 0.$$

Положим $z = e^{-i\lambda w}$ и используем (47) для оценки второго члена в правой части этого неравенства, а также запишем первое слагаемое, как и в (33), и оценим два полученных слагаемых $|D(1, e^{-i\lambda w})| = |D(1 - e^{-i\lambda w})|$ и $|\Delta(1, \lambda)|$ при помощи (41) и (37) соответственно. В результате мы получим (49).

Ясно, что, ввиду (52) и критичности нашего процесса, при всех $t \geq 1$ справедливо неравенство

$$|\Delta(t, \lambda)| \leq c \left[|\Delta(1, \lambda)| + \sum_{0 < r \leq t-1} \left| D(Q, (r, e^{-i\lambda w})) - D(1 - \exp[-i\lambda M^r w]) \right| \right]. \quad (54)$$

Вспоминая (46) и предположение (в) из комплекса условий А, мы видим, что при $k \in K$ и $r \geq 1$

$$\begin{aligned} & \left| D_k(Q(r, e^{-i\lambda w})) - D_k(1 - \exp[-i\lambda M^r w]) \right| \\ & \leq c \left[\|Q(r, e^{-i\lambda w})\|^{\alpha-\gamma} + \|1 - \exp[-i\lambda M^r w]\|^{\alpha-\gamma} \right] \\ & \quad \times \|1 - \exp[-i\lambda M^r w] - Q(r, e^{-i\lambda w})\|. \end{aligned}$$

Применяя такие же оценки, как и в (46), к первой строке в правой части этого неравенства и обозначение (48) ко второй, последнее неравенство можно преобразовать к виду

$$\leq c |\lambda|^{\alpha-\gamma} \left(\|1 - \exp[-i\lambda M^r w] - i\lambda M^r w\| + \|\overline{Q}(r, e^{-i\lambda w})\| \right).$$

Комбинируя эти оценки с (36) и используя условие критичности, находим

$$\begin{aligned} & \left| D_k(Q(r, e^{-i\lambda w})) - D_k(1 - \exp[-i\lambda M^r w]) \right| \\ & \leq c |\lambda|^{\alpha-\gamma} \left(\lambda^2 + \|\overline{Q}(r, e^{-i\lambda w})\| \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Отсюда, обращаясь к (49), получаем

$$\left| D_k(Q(r, e^{-i\lambda w})) - D_k(1 - \exp[-i\lambda M^r w]) \right| \leq c r |\lambda|^{1+2(\alpha-\gamma)}. \quad (56)$$

Подставляя это неравенство в (54) и применяя оценку (37) к $|\Delta(1, \lambda)|$, мы убеждаемся в справедливости и второго неравенства. Доказательство завершено.

2.4. Индуктивный переход. Лемма 3 может быть обобщена в следующем направлении.

Лемма 4 (оценки более высокого порядка). Если выполнен комплекс условий А, то существует константа $\gamma \in [0, \alpha/2)$ и для каждого фиксированного $N \geq 1$ существуют положительные константы $C_{1,N}, C_{2,N}, \beta_{1,N}, \beta_{2,N}$ и $\lambda_N \in (0, 1)$ такие, что

$$|\overline{Q}_k(t, e^{-i\lambda w})| \leq C_{1,N} t^{\beta_{1,N}} \left[|\lambda|^{1+G-\gamma} + |\lambda|^{1+N(\alpha-\gamma)} + \varrho^t \right], \quad (57)$$

$$|\Delta_k(t, \lambda)| \leq C_{2,N} t^{\beta_{2,N}} \left(|\lambda|^{(1+G+\alpha-2\gamma)\wedge 2} + |\lambda|^{1+N(\alpha-\gamma)} + \varrho^t \right), \quad (58)$$

$t \geq 1, |\lambda| \leq \lambda_N, k \in K$, где $0 < \varrho < 1$ то же, что и в (12).

Доказательство. Мы будем использовать индукцию по N . Прежде всего, для $N = 1$ нужное утверждение вытекает из леммы 3. Предположим, что утверждения (57) и (58) установлены для некоторого $N \geq 1$. Ввиду (55) это означает, что при $1 \leq r \leq t$

$$\begin{aligned} & \left| D_k(Q(r, e^{-i\lambda w})) - D_k(1 - \exp[-i\lambda M^r w]) \right| \\ & \leq c |\lambda|^{\alpha-\gamma} t^{\beta_{1,N}} \left(|\lambda|^{1+G-\gamma} + |\lambda|^{1+N(\alpha-\gamma)} + e^t \right) \\ & \leq c t^{\beta_{1,N}} \left(|\lambda|^{1+G+\alpha-2\gamma} + |\lambda|^{1+(N+1)(\alpha-\gamma)} + e^t \right). \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (54) и комбинируя ее с оценкой (37) для $|\Delta(1, \lambda)|$, мы видим, что при $t \geq 1$

$$\begin{aligned} |\Delta_k(t, \lambda)| & \leq c \left\{ |\lambda|^2 + t^{1+\beta_{1,N}} \left(|\lambda|^{1+G+\alpha-2\gamma} + |\lambda|^{1+(N+1)(\alpha-\gamma)} + e^t \right) \right\} \\ & \leq c t^{1+\beta_{1,N}} \left(|\lambda|^{(1+G+\alpha-2\gamma) \wedge 2} + |\lambda|^{1+(N+1)(\alpha-\gamma)} + e^t \right). \end{aligned}$$

Это неравенство влечет (58) с заменой N на $N + 1$.

Из определения (33) величины $\Delta_k(t, \lambda)$ следует, что

$$|\bar{Q}_k(t, e^{-i\lambda w})| \leq |D_k(t, e^{-i\lambda w})| + |\Delta_k(t, \lambda)|, \quad t \geq 1. \quad (59)$$

Применим теперь следствие из п. 2 к первому слагаемому в правой части этого соотношения и уже доказанную оценку (58) (с заменой N на $N + 1$) ко второму. Тогда

$$\begin{aligned} |\bar{Q}_k(t, e^{-i\lambda w})| & \leq c \left\{ |\lambda|^{1+G-\gamma} + t^2 e^t \right. \\ & \quad \left. + t^{\beta_{2,N+1}} \left(|\lambda|^{(1+G+\alpha-2\gamma) \wedge 2} + |\lambda|^{1+(N+1)(\alpha-\gamma)} + e^t \right) \right\}. \end{aligned}$$

Последнее убеждает в справедливости (57) для $N + 1$, что и завершает доказательство по индукции.

Доказательство предложения (о к о н ч а н и е). Ясно, что теперь интересующее нас предложение является простым следствием неравенства (58) из леммы 4. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать N так, чтобы выполнялось неравенство $1 + N(\alpha - \gamma) > 1 + G$.

3. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы все еще требует дополнительных аргументов, опирающихся, в частности, на некоторые идеи из [1]. Начиная с этого момента, мы фиксируем тип $j \in K$ первоначальной частицы процесса. Исходным пунктом наших рассуждений будет следующее

представление⁵⁾:

$$\mathbf{Z}(t+s) = \sum_{k \in K} \sum_{n=1}^{Z_k(t)} \mathbf{Z}^{(k,n)}(t,s), \quad t, s \geq 0, \quad (60)$$

где $\mathbf{Z}^{(k,n)}(t,s)$ обозначает вектор числа частиц различных типов в момент $t+s$, являющихся потомками n -й частицы типа k из числа существовавших в момент t . Положим

$$X(t) := \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{u} \rangle \quad \text{и} \quad Y(t) := \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{w} \rangle. \quad (61)$$

Тогда

$$Y(t+s) = \sum_{k \in K} \sum_{n=1}^{Z_k(t)} \langle \mathbf{Z}^{(k,n)}(t,s), \mathbf{w} \rangle. \quad (62)$$

Таким образом, на событиях $\mathcal{N}_t := \{\mathbf{Z}(t) \neq 0\}$, с учетом ограничений, наложенных на $\hat{R}$ после формулы (20), имеем

$$\begin{aligned} \hat{R} \left(\frac{1}{X(t)} \right) Y(t+s) &= \hat{R} \left(\frac{1}{X(t)} \right) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{M}^s \mathbf{w} \rangle \\ &+ \sum_{k \in K} \frac{\hat{R}(1/X(t))}{\hat{R}(1/Z_k(t))} \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \sum_{n=1}^{Z_k(t)} \eta_k^{(n)}(t,s), \end{aligned} \quad (63)$$

где $\eta_k^{(n)}(t,s) := \langle \mathbf{Z}^{(k,n)}(t,s), \mathbf{w} \rangle - (\mathbf{M}^s)_k \mathbf{w}$, $k \in K$, $n \geq 1$, $s \geq 0$, а $(\mathbf{M}^s)_k$ обозначает k -ю строку матрицы $\mathbf{M}^s$. Начнем с оценки первого слагаемого в правой части (63).

Лемма 5. Пусть $s = b \ln t$, где константа b выбрана столь большой, чтобы выполнялось неравенство $b \ln \rho + \frac{1}{2} \alpha < 0$. Тогда

$$\left\{ \hat{R} \left(\frac{1}{X(t)} \right) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{M}^s \mathbf{w} \rangle \mid \mathcal{N}_t \right\} \rightarrow 0 \quad \text{по } P_j\text{-мере при } t \uparrow \infty.$$

Доказательство. Поскольку, в соответствии с нашим выбором, функция $\hat{R}$ не убывает на множестве $(0, \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ и $\theta \in (0, 1/\alpha)$

$$\begin{aligned} &P_j \left\{ \left| \hat{R} \left(\frac{1}{X(t)} \right) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{M}^s \mathbf{w} \rangle \right| > \varepsilon \mid \mathcal{N}_t \right\} \\ &\leq P_j \left\{ X(t) < t^{-\theta+1/\alpha} \mid \mathcal{N}_t \right\} + P_j \left\{ \left| \hat{R} \left(t^{\theta-1/\alpha} \right) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{M}^s \mathbf{w} \rangle \right| > \varepsilon \mid \mathcal{N}_t \right\}. \end{aligned}$$

⁵⁾ Конечно, такое представление требует более точного построения процесса, чем то, которое мы дали в п. 1.1. Однако мы опускаем детальное описание вероятностного пространства с деревьями в качестве элементарных событий и предполагаем, что читатель знаком с такого рода конструкциями.

Заметим, что в силу (7) с $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ и асимптотического представления (6) для нормирующей функции $q(t)$

$$P_j \left\{ X(t) < t^{-\theta+1/\alpha} \mid \mathcal{N}_t \right\} < \varepsilon \quad \text{для достаточно больших } t. \quad (64)$$

С другой стороны, в силу неравенства Маркова,

$$P_j \left\{ \left| \hat{R}(t^{\theta-1/\alpha}) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{M}^s \mathbf{w} \rangle \right| > \varepsilon \mid \mathcal{N}_t \right\} \leq \frac{\hat{R}(t^{\theta-1/\alpha})}{\varepsilon P_j(\mathcal{N}_t)} E_j |\langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{M}^s \mathbf{w} \rangle|.$$

Ввиду (20) и (5) для $\delta \in (0, 1 - G)$

$$\frac{\hat{R}(t^{\theta-1/\alpha})}{P_j(\mathcal{N}_t)} \leq c t^{1/\alpha+\delta} (t^{\theta-1/\alpha})^{1/(1+G+\delta)}.$$

Легко проверить, что степень, в которую возводится t , можно оценить сверху величиной $\delta + \theta + \alpha^{-1}(1 - (1 + G + \delta)^{-1})$. Но разность в скобках меньше, чем $\frac{1}{2}$, и, следовательно, все выражение не больше, чем $1/(2\alpha)$, для достаточно малых δ и θ . Объединяя этот факт с (64), получаем, что

$$P_j \left\{ \left| \hat{R} \left(\frac{1}{X(t)} \right) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{M}^s \mathbf{w} \rangle \right| > \varepsilon \mid \mathcal{N}_t \right\} \leq \varepsilon + c \varepsilon^{-1} t^{1/2\alpha} E_j |\langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{M}^s \mathbf{w} \rangle|$$

для достаточно больших t . Ввиду теоремы Фробениуса (12) и условия критичности, это неравенство можно несколько огрубить

$$\leq \varepsilon + c \varepsilon^{-1} t^{1/2\alpha} \varrho^s \leq \varepsilon + c \varepsilon^{-1} t^{1/2\alpha + b \ln \varrho},$$

где на последнем шаге мы взяли $s = b \ln t$ с тем же b , что и в условии леммы. Для завершения доказательства леммы осталось устремить t к бесконечности и учесть, что $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым.

Доказательство п. (а) теоремы. По построению случайные величины $\eta_k^{(n)}(t, s)$ имеют нулевые средние, а их характеристические функции

$$\phi_k(\lambda, s) := E_k \exp \left[-i\lambda \eta_k^{(n)}(t, s) \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (65)$$

не зависят от t и n . Мы можем записать их в виде

$$\begin{aligned} \phi_k(\lambda, s) &= 1 + \left(1 - \exp[i\lambda(\mathbf{M}^s)_k \mathbf{w}] \right) \left(1 - E_k \exp[-i\lambda \langle \mathbf{Z}(s), \mathbf{w} \rangle] \right) \\ &\quad - \left(1 - \exp[i\lambda(\mathbf{M}^s)_k \mathbf{w}] \right) - \left(1 - E_k \exp[-i\lambda \langle \mathbf{Z}(s), \mathbf{w} \rangle] \right). \end{aligned}$$

Заметим, что при $\lambda \rightarrow 0$

$$1 - \exp[i\lambda(\mathbf{M}^s)_k \mathbf{w}] = -i\lambda(\mathbf{M}^s)_k \mathbf{w} + O(\lambda^2) \quad \text{равномерно по } s,$$

и

$$\left| \left(1 - \exp [i\lambda (\mathbf{M}^s)_k \mathbf{w}] \right) \left(1 - E_k \exp [-i\lambda \langle \mathbf{Z}(s), \mathbf{w} \rangle] \right) \right| \\ \leq c|\lambda|^2 E_k |\langle \mathbf{Z}(s), \mathbf{w} \rangle| \leq c|\lambda|^2.$$

С другой стороны, в силу (24) и (33)

$$1 - E_k \exp [-i\lambda \langle \mathbf{Z}(s), \mathbf{w} \rangle] = i\lambda (\mathbf{M}^s)_k \mathbf{w} - D_k(s, e^{-i\lambda \mathbf{w}}) + \Delta_k(s, \lambda).$$

Комбинируя эти факты, получаем

$$\phi_k(\lambda, s) = 1 + D_k(s, e^{-i\lambda \mathbf{w}}) - \Delta_k(s, \lambda) + O(\lambda^2) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0 \quad (66)$$

равномерно по s (и k).

Мы знаем, что если условия теоремы выполнены, то при $t \uparrow \infty$ и по P_j -мере

$$\{Z_k(t) \mid \mathcal{N}_t\} \rightarrow \infty \quad (67)$$

([7, с. 114]) и

$$\left\{ \frac{Z_k(t)}{X(t)} \mid \mathcal{N}_t \right\} \rightarrow v_k \quad (68)$$

([9]). Более того,

$$\{Z_k(t) t^{-1/\alpha+\varepsilon} \mid \mathcal{N}_t\} \rightarrow \infty, \quad (69)$$

$$\{Z_k(t) t^{-1/\alpha-\varepsilon} \mid \mathcal{N}_t\} \rightarrow 0 \quad (70)$$

для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

В силу (68) и того факта, что $\hat{R}$ правильно меняется с показателем $1/(1+G)$,

$$\left\{ \frac{\hat{R}(1/X(t))}{\hat{R}(1/Z_k(t))} \mid \mathcal{N}_t \right\} \rightarrow v_k^{1/(1+G)}, \quad t \uparrow \infty, \quad (71)$$

по P_j -мере.

Зафиксируем теперь $\lambda \in \mathbb{R}$. Используя марковость нашего процесса и свойство ветвления, находим

$$E_j \left\{ \exp \left[-i\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \sum_{n=1}^{Z_k(t)} \eta_k^{(n)}(t, s) \right] \mid \mathcal{N}_t \right\} \\ = E_j \left\{ \phi_k \left(\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right), s \right)^{Z_k(t)} \mid \mathcal{N}_t \right\}. \quad (72)$$

В силу асимптотического представления (66), свойства «взрыва» на бесконечности (67) и правильного изменения (20), для фиксированного λ (при условии $\mathcal{N}_t$ и по P_j -мере)

$$\begin{aligned} \phi_k \left(\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right), s \right) &= 1 + D_k \left(s, \exp \left[-i\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \mathbf{w} \right] \right) \\ &- \Delta_k \left(s, \lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right) + O \left(\left(\hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (73)$$

при $t \uparrow \infty$. По лемме 1,

$$\begin{aligned} D_k \left(s, \exp \left[-i\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \mathbf{w} \right] \right) \\ = u_k J \left(\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right), \mathbf{w}, 0 \right) (1 + o(1)) + s^2 \varrho^s \end{aligned} \quad (74)$$

при $s \uparrow \infty$ и достаточно больших t . Кроме того, в силу условия A (a) и определения (18) функции R

$$J \left(\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right), \mathbf{w}, 0 \right) \sim -e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} R \left(|\lambda| \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right)$$

при $t \uparrow \infty$. Опираясь на свойства правильно меняющихся функций, мы можем продолжить эту цепочку эквивалентностей:

$$\sim -e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} R \left(\hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right),$$

или, с учетом (19) (при условии $\mathcal{N}_t$ и по P_j -мере),

$$J \left(\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right), \mathbf{w}, 0 \right) \sim -e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} \frac{|\lambda|^{1+G}}{Z_k(t)} \quad \text{при } t \uparrow \infty. \quad (75)$$

С другой стороны, если положить $s = b \ln t$, где $b > 0$ будет выбрано позднее, то, согласно предложению из п. 2.1, существуют $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенству $1 + G + 2\delta < 2$, и $\beta > 2$ такие, что

$$\left| \Delta_k \left(s, \lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right) \right| \leq c \left(\left| \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right|^{1+G+2\delta} + t^{b \ln \varrho} \right) \ln^\beta t$$

при всех достаточно больших t . Поскольку функция $\hat{R}(x)$ правильно меняется с показателем $1/(1+G)$ при $x \rightarrow 0+$, то

$$0 < \hat{R}(x) \leq x^{1/(1+G+\delta)}, \quad 0 < x < x_0, \quad (76)$$

для некоторого x_0 и выбранного δ ([6, 1°, с. 18]). Из этой оценки следует, что

$$\begin{aligned} \left| \Delta_k \left(s, \lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right) \right| &\leq c \left(\left(\frac{1}{Z_k(t)} \right)^{(1+G+2\delta)/(1+G+\delta)} + t^{b \ln \varrho} \right) \ln^\beta t \\ &= o \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) + t^{b \ln \varrho} \ln^\beta t \end{aligned}$$

(при условии $\mathcal{N}_t$ и по P_j -мере) при $t \uparrow \infty$ (вспомните (69)). Если теперь выбрать b столь большим, чтобы выполнялось неравенство $b \ln \varrho + 1/\alpha < 0$, то $t^{b \ln \varrho} \ln^\beta t = o(1/Z_k(t))$, и, следовательно,

$$\left| \Delta_k \left(s, \lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right) \right| = o \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right). \quad (77)$$

По тем же причинам

$$s^2 \varrho^s = o(s^\beta \varrho^s) = o(t^{b \ln \varrho} \ln^\beta t) = o \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \quad (78)$$

при $t \uparrow \infty$. Наконец, поскольку $1 + G + 2\delta < 2$, то

$$O \left(\left(\hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right)^2 \right) = o \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \quad \text{при } t \uparrow \infty. \quad (79)$$

Комбинируя (73)–(79), мы видим, что

$$\phi_k \left(\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right), s \right) = 1 - u_k e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} \frac{|\lambda|^{1+G}}{Z_k(t)} + o \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right)$$

при $t \uparrow \infty$. Подстановка этой оценки в правую часть (72) преобразует последнюю к виду

$$E_j \left\{ \left\{ 1 - u_k e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} \frac{|\lambda|^{1+G}}{Z_k(t)} + o \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \right\}^{Z_k(t)} \mid \mathcal{N}_t \right\}.$$

Отсюда легко следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \infty} E_j \left\{ \exp \left[-i\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{Z_k(t)} \right) \sum_{n=1}^{Z_k(t)} \eta_k^{(n)}(t, s) \right] \mid \mathcal{N}_t \right\} \\ = \exp \left[-u_k e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} \right]. \end{aligned} \quad (80)$$

Поскольку предельное выражение непрерывно в точке $\lambda = 0$, оно является характеристической функцией. Более точно, это характеристическая

функция случайной величины, скажем Θ_k , на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, имеющей устойчивое распределение с параметром $1+G$. Заметим, кстати, что если бы мы не ограничивали диапазон изменения φ так, как это сделано в условии А (а), то в данном месте ограничение $|\varphi| \leq 1-G$ появилось бы автоматически: ср. с [4, формула (XVII.6.2)]. Ввиду (71) это означает, что при условии $\mathcal{N}_t$ и по P_j -мере

$$\sum_{k \in K} \frac{\hat{R}(1/X(t))}{\hat{R}(1/Z_k(t))} \hat{R}\left(\frac{1}{Z_k(t)}\right) \sum_{n=1}^{Z_k(t)} \eta_k^{(n)}(t, s) \rightarrow \sum_{k \in K} v_k^{1/(1+G)} \Theta_k \quad (81)$$

при $t \uparrow \infty$, где Θ_k — независимые случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Отсюда, возвращаясь к (63) и вспоминая лемму 5, заключаем, что по P_j -мере

$$\left\{ \hat{R}\left(\frac{1}{X(t)}\right) Y(t+s) \mid \mathcal{N}_t \right\} \rightarrow \sum_{k \in K} v_k^{1/(1+G)} \Theta_k \quad (82)$$

при $t \uparrow \infty$.

Если $s = b \ln t$, то

$$\left\{ \frac{X(t+s)}{X(t)} \mid \mathcal{N}_{t+s} \right\} \rightarrow 1 \quad (83)$$

при $t \uparrow \infty$ по P_j -мере (ср. с [1, с. 342]; заметим, что аргументы, приведенные в указанной работе для доказательства этого соотношения, остаются справедливыми и при наших более общих предположениях). Отсюда, в силу правильного изменения $\hat{R}$, получаем

$$\left\{ \frac{\hat{R}(1/X(t))}{\hat{R}(1/X(t+s))} \mid \mathcal{N}_{t+s} \right\} \rightarrow 1. \quad (84)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \infty} E_j \left\{ \exp \left[-i\lambda \hat{R}\left(\frac{1}{X(t+s)}\right) Y(t+s) \right] \mid \mathcal{N}_{t+s} \right\} \\ = \lim_{t \uparrow \infty} E_j \left\{ \exp \left[-i\lambda \hat{R}\left(\frac{1}{X(t)}\right) Y(t+s) \right] \mid \mathcal{N}_{t+s} \right\} \end{aligned} \quad (85)$$

(при условии, что этот предел существует).

Для удобства положим

$$V := \exp \left[-i\lambda \hat{R}\left(\frac{1}{X(t)}\right) Y(t+s) \right]. \quad (86)$$

Тогда $E_j\{V; \mathcal{N}_{t+s}\} = E_j\{V \mid \mathcal{N}_t\} P_j(\mathcal{N}_t) - P_j(\mathcal{N}_t \cap \mathcal{N}_{t+s}^c)$, где $\mathcal{N}_{t+s}^c$ — множество, дополнительное к $\mathcal{N}_{t+s}$. Поэтому

$$E_j\{V \mid \mathcal{N}_{t+s}\} = \frac{P_j(\mathcal{N}_t)}{P_j(\mathcal{N}_{t+s})} [E_j\{V \mid \mathcal{N}_t\} - P_j\{\mathcal{N}_{t+s}^c \mid \mathcal{N}_t\}].$$

Вспоминая, что $s = b \ln t$, и используя формулу (5), дающую асимптотическое представление для вероятности невырождения, получаем, что

$$\frac{P_j(\mathcal{N}_t)}{P_j(\mathcal{N}_{t+s})} \rightarrow 1 \quad \text{при } t \uparrow \infty. \quad (87)$$

Следовательно, $P_j\{\mathcal{N}_{t+s}^c \mid \mathcal{N}_t\} \rightarrow 0$ и

$$\lim_{t \uparrow \infty} E_j\{V \mid \mathcal{N}_{t+s}\} = \lim_{t \uparrow \infty} E_j\{V \mid \mathcal{N}_t\} \quad (88)$$

(при условии, что этот предел существует). Объединяя этот факт с (85) и (82), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \infty} E_j \left\{ \exp \left[-i\lambda \hat{R} \left(\frac{1}{X(t+s)} \right) Y(t+s) \right] \mid \mathcal{N}_{t+s} \right\} \\ = \prod_{k \in K} \mathcal{E} \exp \left[-i\lambda v_k^{1/(1+G)} \Theta_k \right] \end{aligned}$$

(где символ $\mathcal{E}$ означает математическое ожидание относительно соответствующего распределения $\mathcal{P}$). Но последнее выражение равно

$$\prod_{k \in K} \exp \left[-u_k e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} \left| \lambda v_k^{1/(1+G)} \right|^{1+G} \right] = \exp \left[-e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} \right].$$

Это завершает доказательства п. (а) нашей теоремы.

Доказательство п. (б) теоремы. При доказательстве пункта (б) мы опираемся на идеи, сходные с теми, которые были использованы ранее, поэтому часть рассуждений будет лишь намечена. Вспоминая представление (62) и обозначение (65), а также используя свойство марковости и ветвления и лемму 5, находим:

$$\begin{aligned} E_j \{ \exp [-i\lambda \hat{q}(t) Y(t+s)] \mid \mathcal{N}_t \} \\ \sim E_j \left\{ \prod_{k \in K} (\phi_k(\lambda \hat{q}(t), s))^{Z_k(t)} \mid \mathcal{N}_t \right\}, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (89)$$

Аналогично (73) имеем

$$\begin{aligned} \phi_k(\lambda \hat{q}(t), s) &= 1 + D_k(s, \exp[-i\lambda \hat{q}(t) \mathbf{w}]) \\ &\quad - \Delta_k(s, \lambda \hat{q}(t)) + O((\hat{q}(t))^2). \end{aligned} \quad (90)$$

Как и в (74),

$$D_k(s, \exp[-i\lambda \hat{q}(t) \mathbf{w}]) = u_k J(\lambda \hat{q}(t), \mathbf{w}, 0) (1 + o(1)) + s^2 \varrho^s. \quad (91)$$

Теперь при $t \uparrow \infty$

$$R(\hat{q}(t)) = R(\hat{R}(q(t))) \sim q(t) \quad (92)$$

(вспомните (21), (6) и (19)), и в силу условия А (а)

$$J(\lambda \hat{R}(q(t)), \mathbf{w}, 0) \sim -e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} R(|\lambda| \hat{R}(q(t))).$$

Поскольку функция R меняется правильно (см. (92)), последняя цепочка соотношений может быть продолжена:

$$\sim -e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} R(\hat{R}(q(t))) \sim -e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} q(t).$$

Таким образом,

$$J(\lambda \hat{q}(t), \mathbf{w}, 0) \sim -e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} q(t) \quad (93)$$

(ср. с (75)). Как и в (77)–(79), при $s = b \ln t$

$$\Delta_k(s, \lambda \hat{q}(t)) + O((\hat{q}(t))^2) + s^2 \varrho^s = o(q(t)). \quad (94)$$

Подстановка (91), (93) и (94) в (90) дает

$$\phi_k(\lambda \hat{q}(t), s) = 1 - u_k e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} q(t) + o(q(t)).$$

Следовательно, правая часть (89) может быть записана в виде

$$E_j \left\{ \prod_{k \in K} \left(1 - u_k e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} q(t) + o(q(t)) \right)^{Z_k(t)} \mid \mathcal{N}_t \right\}.$$

Ее предел при $t \uparrow \infty$ равен

$$\begin{aligned} & \lim_{t \uparrow \infty} E_j \left\{ \prod_{k \in K} \exp \left[-e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} q(t) Z_k(t) u_k \right] \mid \mathcal{N}_t \right\} \\ &= \lim_{t \uparrow \infty} E_j \left\{ \exp \left[-e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} q(t) \langle \mathbf{Z}(t), \mathbf{u} \rangle \right] \mid \mathcal{N}_t \right\}. \end{aligned} \quad (95)$$

Вспоминая обозначение (61) и обращаясь к [8], мы видим, что

$$\{q(t) X(t) \mid \mathcal{N}_t\} \longrightarrow \zeta \quad (96)$$

по P_j -мере при $t \uparrow \infty$, где ζ — (неотрицательная) случайная величина с характеристической функцией

$$\mathcal{E} e^{-i\zeta \lambda} = 1 - \frac{i\lambda}{(1 + (i\lambda)^\alpha)^{1/\alpha}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (97)$$

(вспомните (7)). Так как $\zeta \geq 0$, то при помощи теоремы единственности для аналитических функций несложно проверить, что

$$\mathcal{E}e^{y\zeta} = 1 - \frac{-y}{(1 + (-y)^\alpha)^{1/\alpha}}, \quad y - \text{комплексное число с } \operatorname{Re} y \leq 0.$$

Но $\operatorname{Re}(-e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda}) = -\cos(\pi/2 \varphi) \leq 0$ при наших ограничениях на φ . Следовательно, правая часть (95) совпадает с

$$\mathcal{E} \exp \left[-e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G} \zeta \right] = 1 - \frac{e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G}}{(1 + (e^{i(\pi/2)\varphi \operatorname{sign} \lambda} |\lambda|^{1+G})^\alpha)^{1/\alpha}},$$

что и завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Athreya K. B., Ney P. Functionals of critical multitype branching processes. — Ann. Probab., 1974, v. 2, № 2, p. 339–343.
2. Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
3. Бадалбаев И. С., Мухитдинов А. Предельные теоремы для некоторых функционалов в критических многотипных ветвящихся процессах. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXIV, в. 4, с. 753–757.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
5. Goldstein M. I., Hoppe F. M. Critical multitype branching processes with infinite variance. — J. Math. Anal. Appl., 1978, v. 65, № 3, p. 675–686.
6. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 142 с.
7. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
8. Ватутин В. А. Предельные теоремы для критических марковских ветвящихся процессов с несколькими типами частиц и бесконечными вторыми моментами. — Матем. сб., 1977, т. 103, № 6, с. 253–264.
9. Ватутин В. А. Предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц и бесконечными вторыми моментами. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. XXIII, в. 4, с. 807–818.

Поступила в редакцию
24.XII.1998