Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Копытцев, Предельные теоремы для числа решений системы случайных уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 52–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:58:54

© 2000 г.

КОПЫТЦЕВ В. А.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ
СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье исследуются число и структура множества решений заведомо совместной системы случайных уравнений вида

$$\varphi_t(x_{s_1(t)}, \dots, x_{s_d(t)}(t)) = a_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

относительно переменных $x_1, \dots, x_n \in \{0, \dots, q-1\}$, $q \geq 2$, где индексы $s_1(t), \dots, s_d(t)$ выбираются случайно и независимо при разных t посредством процедуры равновероятного выбора без возвращения. Найдены условия, при которых распределение числа решений этой системы уравнений сходится к распределению случайной величины вида $A \cdot 2^{\eta_1} \dots q^{\eta_{q-1}}$, где A — порядок группы подстановок $g: \{0, \dots, q-1\} \longleftrightarrow \{0, \dots, q-1\}$, удовлетворяющих условиям $\varphi_t(y_1, \dots, y_d(t)) \equiv \varphi_t(g(y_1), \dots, g(y_d(t)))$, $t = 1, \dots, T$, а $\eta_1, \dots, \eta_{q-1}$ — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}$ соответственно. Приведены выражения для параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}$. Эти результаты существенно обобщают аналогичные теоремы для случая $q = 2$, доказанные в работах [2] и [3].

Ключевые слова и фразы: системы случайных уравнений, истинное решение, окрестность истинного решения, общее число решений, группы подстановок, распределение Пуассона.

1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть $\varphi(y) = \varphi(y_1, \dots, y_d)$ — некоторая функция, заданная на множестве d -мерных векторов с координатами $y_1, \dots, y_d \in \{0, \dots, q-1\}$, $q \geq 2$. Выбор области значений функции не будет играть никакой роли и не скажется на результатах.

Условимся обозначать через Σ_φ группу инерции функции φ в симметрической группе S_d , определяемую условием

$$\sigma \in \Sigma_\varphi \iff \varphi(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(d)}) \equiv \varphi(y_1, \dots, y_d).$$

Рассмотрим случайное уравнение

$$\varphi(x_{s_1}, \dots, x_{s_d}) = a \tag{1}$$

* ФАПСИ, Б. Кисельный пер., 4, 103031 Москва, Россия.

относительно переменных $x_1, \dots, x_n \in \{0, \dots, q-1\}$, где индексы $s_1, \dots, s_d$ образуют случайную выборку без возвращения из множества $\{1, \dots, n\}$. Предполагается, что упорядоченные выборки $(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(d)})$, $\sigma \in \Sigma_\varphi$, не различаются и объединяются в один исход. На множестве $\Omega = \{\omega\}$ возможных исходов (классов эквивалентных левых частей уравнения) задано равномерное распределение вероятностей

$$P_\varphi(\omega) = \left[\binom{n}{d} \frac{d!}{|\Sigma_\varphi|} \right]^{-1}, \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (2)$$

Пусть система уравнений

$$\varphi(x_{s_1(t)}, \dots, x_{s_d(t)}) = a_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3)$$

составлена из независимо выбранных уравнений вида (1). Правая часть системы определяется равенствами

$$a_t = \varphi(x_{s_1(t)}^0, \dots, x_{s_d(t)}^0), \quad t = 1, \dots, T,$$

при некотором заданном векторе $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Вектор x^0 назовем истинным решением.

Предположим теперь, что имеется конечный набор функций

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_R\},$$

где $\varphi_r = \varphi_r(y_1, \dots, y_{d(r)})$, $y_1, \dots, y_{d(r)} \in \{0, \dots, q-1\}$, $r = 1, \dots, R$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_r(x_{s_1(t)}(r), \dots, x_{s_{d(r)}(t)}(r)) &= \varphi_r(x_{s_1(t)}^0, \dots, x_{s_{d(r)}(t)}^0), \\ t &= 1, \dots, T(r), \quad r = 1, \dots, R, \end{aligned} \quad (4)$$

составленную из независимо выбранных подсистем вида (3), соответствующих функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_R$.

Система уравнений (4) является заведомо совместной системой случайных уравнений, имеющей, по крайней мере, решение x^0 . Общее число решений ξ является случайной величиной.

Общее число решений ξ для различных классов систем уравнений вида (3) и (4) с функциями φ , заданными на двоичных векторах, исследовалось в работах [1]–[3]. Новизна данной работы состоит в том, что функции φ определены на векторах с координатами из произвольного конечного множества. Отметим, что заведомо совместные системы уравнений исследовались также в [4] и некоторых других работах, но там использована другая схема формирования левых частей.

Приведем формулировки основных результатов.

Пусть $i, j \in \{0, \dots, q-1\}$, $i \neq j$, и пусть $d_0, \dots, d_{q-1}$ — набор целых неотрицательных чисел таких, что $d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r) - 1$. Для каждой функции $\varphi_r = \varphi_r(y_1, \dots, y_{d(r)}) \in \Phi$ положим

$$\pi_r(i, j; d_0, \dots, d_{q-1}) = \sum_{k=1}^{d(r)} \pi_r^{(k)}(i, j; d_0, \dots, d_{q-1}), \quad (5)$$

где величина $\pi_r^{(k)}(i, j; d_0, \dots, d_{q-1})$ равна числу пар (y', y'') векторов вида

$$\begin{aligned} y' &= (y_1, \dots, y_{k-1}, y'_k, y_{k+1}, \dots, y_{d(r)}), \\ y'' &= (y_1, \dots, y_{k-1}, y''_k, y_{k+1}, \dots, y_{d(r)}), \end{aligned} \quad (6)$$

удовлетворяющих условиям: 1) $y'_k = i$, $y''_k = j$; 2) среди координат y_ν , $\nu \neq k$, содержится d_w координат, равных $w = 0, \dots, q-1$; 3) $\varphi_r(y') = \varphi_r(y'')$.

Будем различать два случая:

(А) Для некоторой функции $\varphi_r \in \Phi$ найдутся значения i, j , $i \neq j$, и значения $d_0, \dots, d_{q-1}$ такие, что $\pi_r(i, j; d_0, \dots, d_{q-1}) > 0$.

(Б) Для любых $\varphi_r \in \Phi$, i, j ($i \neq j$), $d_0, \dots, d_{q-1}$ выполняется равенство $\pi_r(i, j; d_0, \dots, d_{q-1}) = 0$.

Зафиксируем набор чисел

$$0 < \theta_i < 1, \quad \sum_{i=0}^{q-1} \theta_i = 1, \quad (7)$$

и введем величины

$$\begin{aligned} \lambda_r(i, j) &= \sum_{\substack{d_0, \dots, d_{q-1} \\ d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r) - 1}} \theta_0^{d_0} \dots \theta_{q-1}^{d_{q-1}} \pi_r(i, j; d_0, \dots, d_{q-1}), \\ \lambda_r^* &= \max_{i, j} \lambda_r(i, j). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть выполняется случай (А). Сопоставим функциям φ_r : $\lambda_r^* > 0$ некоторые фиксированные числа $t(r) > 0$. Немного ниже мы определим связь этих чисел с параметрами $T(r)$ и n . Положим

$$\begin{aligned} \lambda(i, j) &= \sum_{r: \lambda_r^* > 0} t(r) \lambda_r(i, j), \quad \lambda^* = \max_{i, j} \lambda(i, j), \\ M &= \{(i, j): \lambda(i, j) = \lambda^*\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что, согласно определению, $\lambda^* > 0$.

Каждому элементу $i \in \{0, \dots, q-1\}$ поставим в соответствие множество

$$J_i = \{j: (i, j) \in M\}. \quad (10)$$

Всякое непустое множество (10) разобьем на классы эквивалентных элементов

$$J_i = J_1^{(1)} + \dots + J_i^{(N_i)}, \quad N_i \geq 1, \quad (11)$$

с учетом отношения эквивалентности: $j_1 \sim j_2$, если для любой функции $\varphi_r: \lambda_r^* > 0$ каждое равенство $\varphi_r(y') = \varphi_r(y'')$, которое выполняется при некоторых векторах y', y'' вида (6), где $y'_k = i$, $y''_k = j_1$, $k \in \{1, \dots, d(r)\}$, влечет равенство $\varphi_r(y') = \varphi_r(y''')$, где $y''' = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_k''', y_{k+1}, \dots, y_{d(r)})$, $y_k''' = j_2$.

Для описания свойств числа ξ и множества Ξ решений системы уравнений (4) нам понадобятся также следующие определения.

Пусть $g': \{0, \dots, q-1\} \rightarrow \{0, \dots, q-1\}$ — некоторое отображение множества $\{0, \dots, q-1\}$ в себя, и пусть $y = (y_1, \dots, y_{d(r)})$ — вектор с координатами из этого множества. С целью упрощения обозначений будем полагать $g'(y) = (g'(y_1), \dots, g'(y_{d(r)}))$.

Обозначим G_r группу подстановок $g: \{0, \dots, q-1\} \leftrightarrow \{0, \dots, q-1\}$, удовлетворяющих условию $\varphi_r(y) \equiv \varphi_r(g(y))$, и положим

$$G = \bigcap_{r=1}^R G_r. \quad (12)$$

Ясно, что если некоторый вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ является решением системы (4), то ее решением является любой вектор $g(x) = (g(x_1), \dots, g(x_n))$, $g \in G$. Следовательно, любой вектор $g(x^0)$, $g \in G$, является решением этой системы.

Зафиксируем некоторую подстановку $g \in G$ и сопоставим множествам

$$gJ_i^{(l)} = \{g(j): j \in J_i^{(l)}\}, \quad i: J_i \neq \emptyset, \quad l = 1, \dots, N_i,$$

множества индексов

$$S_{t,r}(gJ_i^{(l)}) \subseteq \{s: g(x_s^0) = g(i)\} = \{s: x_s^0 = i\} = \{s(i)\},$$

которые определим условием: $s(i) \in S_{t,r}(gJ_i^{(l)}) \iff$ любой вектор $(x_1, \dots, x_n) \in X_{t,r}$, где

$$\begin{aligned} x_s &= g(x_s^0), \quad s \neq s(i), \\ x_{s(i)} &\in g(i) \cup gJ_i^{(l)} \quad (g(i) = g(x_{s(i)}^0)); \end{aligned}$$

$X_{t,r}$ — множество решений уравнения с номером $t \in \{1, \dots, T(r)\}$ в подсистеме уравнений с функцией φ_r .

Отметим, что, согласно этому определению,

$$S_{t,r}(gJ_i^{(l)}) = S_{t,r}(J_i^{(l)}), \quad \forall g \in G.$$

Положим

$$S_i^{(l)} = \bigcap_{r=1}^R \bigcap_{t=1}^{T(r)} S_{t,r}(gJ_i^{(l)}).$$

Каждое переменное $x_{s(i)}$ с индексом $s(i) \in S_i^{(l)}$ можно называть несущественным относительно решения $g(x^0) = (g(x_1^0), \dots, g(x_n^0))$ по множеству значений $g(i) \cup gJ_i^{(l)}$. Это название мотивируется тем, что, по определению множеств $S_i^{(l)}$, решениями системы (4), кроме решения $g(x^0)$ (где $x_{s(i)} = g(x_{s(i)}^0) = g(i)$), являются все векторы, отличные от вектора $g(x^0)$ только по значениям переменной $x_{s(i)}$ и в которых переменная $x_{s(i)}$ может принимать любое значение из множества $gJ_i^{(l)}$.

Относительно системы $\{S_i^{(l)}\}$ подмножеств $S_i^{(l)}$, где $i: J_i \neq \emptyset$, $l = 1, \dots, N_i$, определим множество векторов вида

$$X_{g(x^0)}(\{S_i^{(l)}\}) = \{(x_1, \dots, x_n): x_s = g(x_s^0), \forall s \notin S_i^{(l)}; \\ x_s \in g(i) \cup gJ_i^{(l)} (g(i) = g(x_s^0)) \forall s \in S_i^{(l)}\}.$$

Это множество содержит вектор $g(x^0)$ и все векторы, отличные от $g(x^0)$ по значениям переменных с индексами из множеств $S_i^{(l)}$: для этих переменных допускаются все значения из множеств $g(i) \cup gJ_i^{(l)}$. Таким образом,

$$|X_{g(x^0)}(\{S_i^{(l)}\})| = \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{l=1}^{N_i} |g(i) \cup gJ_i^{(l)}|^{m_i^{(l)}} = \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{l=1}^{N_i} (1 + h_i^{(l)})^{m_i^{(l)}},$$

где $m_i^{(l)} = |S_i^{(l)}|$, $h_i^{(l)} = |gJ_i^{(l)}| = |J_i^{(l)}|$, $\forall g \in G$.

Теорема 1. Пусть выполняется случай (А) и, кроме того,

1) все функции $\varphi_r \in \Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_R\}$ обладают свойством: для любых элементов $i, j \in \{0, \dots, q-1\}$, $i \neq j$, найдется пара векторов y', y'' вида (6), где $y'_k = i$, $y''_k = j$, $k \in \{1, \dots, d(r)\}$, и таких, что $\varphi_r(y') \neq \varphi_r(y'')$;

при $n \rightarrow \infty$

2) истинное решение содержит n_i координат, принимающих значение i , причем $n_i = \theta_i(n) \cdot n$, $\theta_i(n) = \theta_i + o(\ln^{-1} n)$, $0 < \theta_i < 1$;

3) величины $T(r)$ связаны с числом неизвестных n соотношениями

$$3.1) T(r)/n \rightarrow \infty, r = 1, \dots, R,$$

$$3.2) T(r) = T \cdot t(r) + o(n) \quad \forall r: \lambda_r^* > 0,$$

$$3.3) \sum_{r=1}^R T(r) d(r) - T\lambda^* = n(\ln n + z), z = O(1).$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

1) предельное распределение числа решений ξ имеет вид

$$P\{\xi = w\} = \sum_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{l=1}^{N_i} \frac{(\theta_i e^{-z})^{m_i^{(l)}}}{m_i^{(l)}!} \exp\{-\theta_i e^{-z} + o(1)\}, \quad (13)$$

сумма $\sum$ берется по значениям величин $m_i^{(l)}$, $i: J_i \neq \emptyset, l = \overline{1, N_i}$, таким, что

$$w = |G| \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{l=1}^{N_i} (1 + h_i^{(l)})^{m_i^{(l)}},$$

где $|G|$ — порядок группы подстановок (12);

2) структура множества Ξ решений описывается предельным соотношением

$$P\left\{\Xi = \bigcup_{g \in G} X_{g(x^0)}(\{S_i^{(l)}\})\right\} \rightarrow 1. \quad (14)$$

Следствие. В условиях теоремы 1 распределение числа решений слабо сходится к распределению случайной величины $|G| \cdot 2^{\eta_1} \dots q^{\eta_{q-1}}$, где $\eta_1, \dots, \eta_{q-1}$ — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}$ соответственно,

$$\lambda_h = e^{-z} \sum_{i: J_i \neq \emptyset} \theta_i \left| \{l \in (1, \dots, N_i): h_i^{(l)} = h\} \right|, \quad h = 1, \dots, q-1.$$

Это утверждение вытекает из соотношения (13).

Пусть выполняется случай (Б). Относительно подмножества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ индексов переменных, не вошедших ни в одно уравнение системы (4), определим множество векторов

$$X_{g(x^0)}(S) = \left\{ (x_1, \dots, x_n): x_s = g(x_s^0) \quad \forall s \notin S; \right. \\ \left. x_s \in \{0, \dots, q-1\} \quad \forall s \in S \right\}.$$

Теорема 2. Пусть имеет место случай (Б) и выполняется условие 1 теоремы 1. Пусть, кроме того, при $n \rightarrow \infty$

2) доля $\theta_i(n) = n_i/n$ координат в истинном решении x^0 , принимающих значение i , заключена в границах $0 < \delta \leq \theta_i(n) \leq 1 - \delta < 1$, $i = 0, \dots, q-1$;

3) величины $T(r)$ связаны с числом неизвестных n соотношениями

$$3.1) T(r)/n \rightarrow \infty, \quad r = 1, \dots, R,$$

$$3.2) \sum_{r=1}^R T(r) d(r) = n(\ln n + z), \quad z = O(1).$$

Тогда

1) при $n \rightarrow \infty$

$$P\{\xi = |G| q^m\} = \frac{e^{-zm}}{m!} \exp\{-e^{-z} + o(1)\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (15)$$

2) при $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\Xi = \bigcup_{g \in G} X_{g(x^0)}(S)\right\} \rightarrow 1; \quad (16)$$

3) если $|G_r| = 1$, $r = 1, \dots, R$, то утверждения 1, 2 выполняются независимо от условия 3.1.

Обозначим $\tilde{\lambda}_r(i, j)$ величину, полученную по формуле (8) после замены в ней постоянных параметров $\theta_i, i = 0, \dots, q-1$, на переменные $\theta_i(n)$.

Пусть $q = 2$. Относительно произвольного подмножества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ определим множество векторов

$$X_{g(x^0)}(S) = \{x = (x_1, \dots, x_n): x_s = g(x_s^0) \forall s \notin S; x_s \in \{0, 1\} \forall s \in S\}.$$

Теорема 3. Пусть $q = 2$, выполняется условие 1 теоремы 1 (это условие принимает вид: $\varphi_r \neq \text{const}, \forall \varphi_r \in \Phi$) и при $n \rightarrow \infty$

2) выполняется условие 2 теоремы 2;

3) величины $T(r)$ связаны с величиной n соотношениями

$$3.1) T(r)/n \rightarrow 0, r = 1, \dots, R,$$

$$3.2) \sum_{r=1}^R T(r) (d(r) - \tilde{\lambda}_r(0, 1)) = n(\ln n + z), z = O(1).$$

Тогда

1) при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi = |G| 2^m\} = \frac{e^{-mz}}{m!} \exp\{-e^{-z} + o(1)\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (17)$$

2) при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\exists S: \Xi = \bigcup_{g \in G} X_{g(x^0)}(S)\right\} \rightarrow 1, \quad (18)$$

если выполняется случай (Б) и, следовательно, $\tilde{\lambda}_r(0, 1) = 0$, $r = 1, \dots, R$, то множество S состоит из индексов переменных, не вошедших ни в одно уравнение системы;

3) если $|G_r| = 1, r = 1, \dots, R$, то утверждения 1, 2 выполняются независимо от условия 3.1.

З а м е ч а н и е 1. Вариант теоремы 3 для случая $|G_r| = 1, r = 1, \dots, R$, доказан в работе [3].

З а м е ч а н и е 2. Условие 3.3 теоремы 1 с учетом условия 3.2 эквивалентно соотношению

$$\sum_{r: \lambda_r^* = 0} T(r) d(r) + T \left[\sum_{r: \lambda_r^* > 0} t(r) d(r) - \lambda^* \right] = n (\ln n + z + o(1)).$$

Это соотношение является корректным (выполнимо, в частности, в случае $\{r: \lambda_r^* = 0\} = \emptyset$), если

$$\lambda^* < \sum_{r: \lambda_r^* > 0} t(r) d(r). \quad (19)$$

Покажем, что строгое неравенство (19) обеспечивается условиями 1, 2 теоремы 1. Действительно, из формул (9) вытекает:

$$\lambda^* \leq \sum_{r: \lambda_r^* > 0} t(r) \max_{i,j} \lambda_r(i, j). \quad (20)$$

Для величины $\pi_r^{(k)}(i, j; d_0, \dots, d_{q-1})$, согласно ее определению (см. (5) и ниже), выполняется неравенство

$$\pi_r^{(k)}(i, j; d_0, \dots, d_{q-1}) \leq \frac{(d(r) - 1)!}{d_0! \dots d_{q-1}!}. \quad (21)$$

Поэтому с учетом (7), (8) имеем

$$\max_{i,j} \lambda_r(i, j) \leq d(r). \quad (22)$$

Если для функции φ_r и любых элементов $i, j, i \neq j$, найдутся указанные в условии 1 теоремы 1 векторы y', y'' , то при некотором наборе значений $d_0, \dots, d_{q-1}, d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r) - 1$, в (21) будет выполняться строгое неравенство. Из этого неравенства и (7), (8) следует строгое неравенство в (22), из которого с учетом (20) следует (19).

2. Вспомогательные утверждения

Утверждение 1. Пусть функция $\varphi_r \in \Phi$ обладает свойством из условия 1 теоремы 1, тогда для любого вырожденного (не взаимно однозначного) отображения $g': \{0, \dots, q-1\} \rightarrow \{0, \dots, q-1\}$ найдется вектор y такой, что $\varphi_r(y) \neq \varphi_r(g'(y))$, $g'(y) = (g'(y_1), \dots, g'(y_{d(r)}))$.

Доказательство. Предположим противное, а именно: существует вырожденное отображение g' такое, что $\varphi_r(y) \equiv \varphi_r(g'(y))$. В силу вырожденности g' для некоторых элементов $i, j \in \{0, \dots, q-1\}, i \neq j$, выполняется равенство $g'(i) = g'(j)$. Тогда для каждой пары векторов y', y'' , вида (6), где $y'_k = i, y''_k = j, k = 1, \dots, d(r)$, должно выполняться равенство $\varphi_r(y') = \varphi_r(y'')$, так как $\varphi_r(y') = \varphi_r(g'(y'))$, $\varphi_r(y'') = \varphi_r(g'(y''))$, и $g'(y') = g'(y'')$, согласно равенству $g'(i) = g'(j)$. Утверждение 1 доказано.

Пусть $E\xi$ — математическое ожидание числа ξ .

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$E\xi = |G| \exp \left\{ \sum_{i=0}^{q-1} \theta_i h_i e^{-z} + o(1) \right\}, \quad (23)$$

где h_i — число элементов в множестве J_i .

Лемма 2. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда

$$1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad E\xi = |G| \exp\{(q-1)e^{-z} + o(1)\}; \quad (24)$$

2) если $|G_r| = 1, r = 1, \dots, R$, то утверждение 1 выполняется независимо от условия 3.1 теоремы.

Лемма 3. Пусть $q = 2$ и выполняются условия теоремы 3. Тогда

1) при $n \rightarrow \infty$ $E\xi = |G| \exp\{e^{-z} + o(1)\}$;

2) если $|G_r| = 1$, $r = 1, \dots, R$, то утверждение 1 выполняется независимо от условия 3.1 теоремы.

2.1. Доказательство леммы 1. Обозначим $\rho(x', x'')$ расстояние Хемминга между векторами $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ и $x'' = (x''_1, \dots, x''_n)$:

$$\rho(x', x'') = \sum_{k=1}^n I(x'_k \neq x''_k), \quad I(x'_k \neq x''_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } x'_k \neq x''_k; \\ 0, & \text{если } x'_k = x''_k. \end{cases}$$

Определим ε -окрестность вектора x' как множество векторов

$$M_\varepsilon(x') = \{x: \rho(x', x'') \leq \varepsilon n\}.$$

Без ограничения общности мы можем положить в условии 2 теоремы 1, что $0 < \delta \leq \theta_i(n) \leq 1 - \delta < 1$. Тогда при любых подстановках $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$,

$$\rho(g_1(x^0), g_2(x^0)) = \rho(x^0, g_1^{-1}g_2(x^0)) \geq n \min_{i \in \{0, \dots, q-1\}} \theta_i \geq n\delta.$$

Выберем $\varepsilon < \delta/2$. При этом условии $M_\varepsilon(g_1(x^0)) \cap M_\varepsilon(g_2(x^0)) = \emptyset$, $\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$, и математическое ожидание $E\xi$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} E\xi &= \Sigma_1 + \Sigma_2, \\ \Sigma_1 &= \sum_{g \in G} \sum_{x \in M_\varepsilon(g(x^0))} \prod_{r=1}^R [P_r(x)]^{T(r)}, \\ \Sigma_2 &= \sum_{x \notin \bigcup_{g \in G} M_\varepsilon(g(x^0))} \prod_{r=1}^R [P_r(x)]^{T(r)}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $P_r(x)$ — вероятность того, что вектор x удовлетворяет одному уравнению системы (4), связанному с функцией φ_r .

Оценим суммы Σ_1, Σ_2 из разложения (25). Согласно равенству $\rho(x^0, x) = \rho(g(x^0), g(x))$, имеем $M_\varepsilon(g(x^0)) = \{g(x): x \in M_\varepsilon(x^0)\}$. Кроме того, $P_r(g(x)) = P_r(x) \quad \forall g \in G$, так как по определению группы G векторы x и $g(x)$ одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют одному уравнению системы с функцией φ_r . Поэтому для внутренней суммы в слагаемом Σ_1 из разложения (25) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{x \in M_\varepsilon(g(x^0))} \prod_{r=1}^R [P_r(x)]^{T(r)} &= \sum_{x \in M_\varepsilon(x^0)} \prod_{r=1}^R [P_r(g(x))]^{T(r)} \\ &= \sum_{x \in M_\varepsilon(x^0)} \prod_{r=1}^R [P_r(x)]^{T(r)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 = |G| \Sigma_1^*, \quad \Sigma_1^* = \sum_{x \in M_\varepsilon(x^0)} \prod_{r=1}^R [P_r(x)]^{T(r)}. \quad (26)$$

Положим

$$n_{ij}(x^0, x) = \left| \{s: x_s^0 = i, x_s = j\} \right|.$$

По определению расстояния Хемминга имеем

$$\rho(x^0, x) = \sum_{i,j: i \neq j} n_{ij}(x^0, x).$$

Ясно, что все векторы x , имеющие одинаковый набор чисел

$$n_{ij}(x^0, x) = n_{ij}, \quad i, j = \overline{0, q-1}, \quad (27)$$

имеют одинаковую вероятность

$$P_r(x) = P_r[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}]. \quad (28)$$

Количество векторов x , которым соответствует фиксированный набор чисел (27), равно $\prod_{i=0}^{q-1} n_i! [n_{i,0}! \cdots n_{i,q-1}!]^{-1}$. Следовательно, сумму (26) можно переписать в следующем виде

$$\Sigma_1^* = \sum_{n_{ij}: \sum_{i \neq j} n_{ij} \leq \varepsilon n} D[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}], \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} D[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}] \\ = \prod_{i=0}^{q-1} \frac{n_i!}{n_{i,0}! \cdots n_{i,q-1}!} \prod_{r=1}^R \left(P_r[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}] \right)^{T(r)} \end{aligned}$$

и суммирование проводится по всем значениям величин n_{ij} , удовлетворяющим условию $\sum_{i \neq j} n_{ij} = \sum_{i,j: i \neq j} n_{ij} \leq \varepsilon n$.

Обозначим $v = v(x)$ число координат вектора x из множества $\{x_s \in (x_1, \dots, x_n): x_s \neq x_s^0\}$, входящих в уравнение

$$\varphi_r(x_{s_1(t)}, \dots, x_{s_{d(r)}(t)}) = \varphi_r(x_{s_1(t)}^0, \dots, x_{s_{d(r)}(t)}^0). \quad (30)$$

Для вероятности (28), согласно формуле полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \mathbf{P}\{v=0\} P_r(x | v=0) + \mathbf{P}\{v=1\} P_r(x | v=1) \\ &\quad + \sum_{v' \geq 2} \mathbf{P}\{v=v'\} P_r(x | v=v'), \end{aligned} \quad (31)$$

где через $P_r(x | v = v')$ обозначена вероятность того, что при условии $v(x) = v'$ вектор x удовлетворяет уравнению (30).

Пусть $\sum_{i \neq j} n_{ij} = o(n)$. Последовательно раскрывая слагаемые в правой части равенства (31), найдем

$$\begin{aligned} P_r(x) = P_r[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}] &= \left[\binom{n}{d(r)} \frac{d(r)!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} \right]^{-1} \\ &\times \left[\left(\frac{\sum_{i=0}^{q-1} n_{ii}}{d(r)} \right) \frac{d(r)!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} \right. \\ &+ \sum_{i \neq j} n_{ij} \sum_{\substack{d_0, \dots, d_{q-1} \\ d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r) - 1}} \prod_{i=0}^{q-1} \binom{n_{ii}}{d_i} \pi_r(i, j; d_0, \dots, d_{q-1}) \frac{\prod_{i=0}^{q-1} d_i!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} \\ &\left. + O\left(n^{d-2} \left(\sum_{i \neq j} n_{ij}\right)^2\right) \right], \end{aligned} \quad (32)$$

где величина $\pi_r(i, j; d_0, \dots, d_{q-1})$ определяется формулой (5). Выражение (32) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_r[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}] \\ = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} n_{ij} (d(r) - \tilde{\lambda}_r(i, j)) + O\left(\left(\sum_{i \neq j} \frac{n_{ij}}{n}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (33)$$

где величина $\tilde{\lambda}_r(i, j)$ получена по формуле (8) после замены в ней фиксированных параметров θ_i , $i = 0, \dots, q-1$, на переменные $\theta_i(n)$.

Разобьем сумму (29) на две части

$$\Sigma_1^* = \Sigma_{1,1}^* + \Sigma_{1,2}^*, \quad (34)$$

полагая

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,1}^* &= \sum_{n_{ij}: 0 \leq \sum_{i \neq j} n_{ij} \leq n^{1/3}} D[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}], \\ \Sigma_{1,2}^* &= \sum_{n_{ij}: n^{1/3} < \sum_{i \neq j} n_{ij} \leq \epsilon n} D[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}], \end{aligned}$$

и оценим каждую часть по отдельности.

В области $0 \leq \sum_{i \neq j} n_{ij} \leq n^{1/3}$ имеем оценки

$$\prod_{i=0}^{q-1} \frac{n_i!}{n_{i,0}! \dots n_{i,q-1}!} = \exp \left\{ \sum_{i \neq j} n_{ij} \ln n + o(1) \right\} \prod_{i=0}^{q-1} \prod_{j: j \neq i} \frac{(\theta_i(n))^{n_{ij}}}{n_{ij}!},$$

$$\prod_{r=1}^R \left(P_r[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}] \right)^{T(r)} = \exp \left\{ - \sum_{i \neq j} n_{ij} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^R T(r) \left(d(r) - \tilde{\lambda}_r(i, j) \right) + o(1) \right\}.$$

Положим

$$\sigma(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^R T(r) \left(d(r) - \tilde{\lambda}_r(i, j) \right) - \ln n. \quad (35)$$

Согласно условиям 2, 3.2, 3.3 теоремы 1,

$$\begin{aligned} \sigma(i, j) &= \frac{1}{n} \left(\sum_{r=1}^R T(r) d(r) - T(\lambda^* - \Delta(i, j)) + o(n) \right) - \ln n \\ &= \frac{T}{n} \Delta(i, j) + z + o(1), \end{aligned} \quad (36)$$

где $\Delta(i, j) = 0$, $(i, j) \in M$ и $\Delta(i, j) > 0$, $(i, j) \notin M$, множество M определено формулами (9). Следовательно, при условии 3.1 теоремы 1

$$\sigma(i, j) \rightarrow \infty, \quad (i, j) \notin M. \quad (37)$$

Поэтому с учетом неравенств $\Psi(n^{1/3}/q^2) \leq \Sigma_{1,1}^* \leq \Psi(n^{1/3})$, где

$$\Psi(z) = \prod_{i=0}^{q-1} \prod_{j: j \neq i} \sum_{n_{ij}=0}^z \exp \left\{ -n_{ij} \sigma(i, j) + o(1) \right\} \frac{(\theta_i(n))^{n_{ij}}}{n_{ij}!},$$

а также с учетом соотношений (36), (37) и условия 2 теоремы 1 найдем

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,1}^* &\approx \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{j: j \in J_i, n_{ij}=0} \sum_{n_{ij}=0}^{\infty} \exp \{ -n_{ij} z \} \frac{\theta_i^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \\ &= \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \exp \{ \theta_i h_i e^{-z} \} = \prod_{i=0}^{q-1} \exp \{ \theta_i h_i e^{-z} \}, \end{aligned} \quad (38)$$

где h_i — число элементов в множестве J_i .

Оценим теперь сумму $\Sigma_{1,2}^*$ из разложения (34). Из представления (33) вытекает

$$\prod_{r=1}^R \left(P_r[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}] \right)^{T(r)} \leq \exp \left\{ - \frac{\sigma}{n} \delta(\varepsilon) \sum_{i \neq j} n_{ij} \right\},$$

где $\sigma = \sum_{r=1}^R T(r) d(r) - T\lambda^*$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 1$. Пользуясь этой оценкой и неравенствами

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{q-1} \frac{n_i!}{n_{i,0}! \cdots n_{i,q-1}!} &\leq \prod_{i=0}^{q-1} \frac{n_i!}{n_{ii}!(n_i - n_{ii})!} (q-1)^{n_i - n_{ii}} \\ &\leq (q-1)^{\sum_{i \neq j} n_{ij}} \left(\sum_{i \neq j} n_{ij} \right), \end{aligned}$$

а также полагая $H(u) = -u \ln u - (1-u) \ln(1-u)$, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,2}^* &\leq \sum_{n_{ij}: n^{1/3} < \sum_{i \neq j} n_{ij} \leq \varepsilon n} \exp \left\{ -[\sigma \delta(\varepsilon) - n \ln(q-1)] u \right. \\ &\quad \left. + nH(u) + O(\ln n) \right\} \Big|_{u = \sum_{i \neq j} n_{ij}/n}. \end{aligned}$$

Функция $H(u)$ в области $0 < u < \varepsilon$ выпукла вверх, поэтому с учетом условия 3.3 теоремы 1 имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,2}^* &\leq n^{q(q-1)} \exp \left\{ -\sigma(\delta(\varepsilon) + o(1)) u + nH(u) + O(\ln n) \right\} \Big|_{u = n^{1/3}/n} \\ &\leq n^{q(q-1)} \exp \left\{ -\left(\delta(\varepsilon) - \frac{2}{3} + o(1) \right) n^{1/3} \ln n + O(n^{1/3}) \right\} = o(1), \quad (39) \end{aligned}$$

если значение ε достаточно мало.

Нам осталось оценить сумму Σ_2 из разложения (25). Покажем, что для любого вектора $x \notin \bigcup_{g \in G} M_\varepsilon(g(x^0))$ найдется функция $\varphi_r \in \Phi$ такая, что

$$P_r(x) = P_r[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}] \leq 1 - \alpha(\varepsilon), \quad (40)$$

где $0 < \alpha(\varepsilon) = \text{const}$. Из неравенства (40) будет следовать оценка

$$\Sigma_2 \leq q^n (1 - \alpha(\varepsilon))^{T'} = o(1), \quad (41)$$

где $T' = \min_r T(r)$, и $T'/n \rightarrow \infty$, согласно условию 3.1 теоремы 1.

Собирая вместе (25), (26), (34) и оценки (38), (39), (41), получим (23).

Пусть набор чисел $n_{ij}(x^0, x) = n_{ij}$, $i, j = 0, \dots, q-1$, удовлетворяет условию

$$\sum_{i \neq j} n_{ij} = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j: j \neq i} n_{ij} \geq \varepsilon n.$$

Из этого условия следует, что существует (единственный) набор индексов $i_1, \dots, i_k$, $1 \leq k \leq q$, которому соответствуют неравенства

$$\sum_{j: j \neq i_1} n_{i_1, j} > \frac{\varepsilon n}{q}, \quad \dots, \quad \sum_{j: j \neq i_k} n_{i_k, j} > \frac{\varepsilon n}{q}; \quad (42)$$

$$\sum_{j: j \neq i} n_{ij} \leq \frac{\varepsilon n}{q}, \quad i \notin \{i_1, \dots, i_k\}. \quad (43)$$

В свою очередь, из неравенств (42) вытекает, что найдется набор индексов $j_1, \dots, j_k$, $j_1 \neq i_1, \dots, j_k \neq i_k$, для которого

$$n_{i_1, j_1} > \frac{\varepsilon n}{q(q-1)}, \dots, n_{i_k, j_k} > \frac{\varepsilon n}{q(q-1)}, \quad (44)$$

а из неравенств (43) с учетом соотношений $\sum_{j=0}^{q-1} n_{ij} = n_i = \theta_i(n)$ *n* следует:

$$n_{ii} = n_i - \sum_{j: j \neq i} n_{ij} \geq \left(\theta_i(n) - \frac{\varepsilon}{q} \right) n, \quad i \notin \{i_1, \dots, i_k\}. \quad (45)$$

Сопоставим системе неравенств (44), (45) отображение $g': \{0, \dots, q-1\} \rightarrow \{0, \dots, q-1\}$, определяемое условиями

$$g'(i_1) = j_1, \dots, g'(i_k) = j_k; \quad g'(i) = i, \quad i \notin \{i_1, \dots, i_k\}, \quad (46)$$

и рассмотрим два возможных случая: (В) $g' \notin G$, (Г) $g' \in G$.

(В) Пусть $g' \notin G$. Тогда для некоторой функции $\varphi_r \in \Phi$ найдется вектор y такой, что $\varphi_r(y) \neq \varphi_r(g'(y))$. Действительно, если отображение g' является вырожденным, то указанный вектор y найдется согласно утверждению 1, в противном случае он найдется согласно определению группы G .

Пусть вектор y содержит d_w координат, принимающих значение $w = 0, \dots, q-1$. Тогда вероятность того, что упорядоченная выборка координат $(x_{s_1(t)}, \dots, x_{s_{d(r)}(t)})$ из вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$, соответствующая уравнению

$$\varphi_r(x_{s_1(t)}, \dots, x_{s_{d(r)}(t)}) = \varphi_r(x_{s_1^0(t)}, \dots, x_{s_{d(r)}^0(t)}),$$

образует вектор y , равна

$$P = \prod_{\nu=1}^k \binom{n_{i_\nu, j_\nu}}{d_{i_\nu}} d_{i_\nu}! \prod_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \binom{n_{ii}}{d_i} \frac{d_i!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} \left[\binom{n}{d(r)} \frac{d(r)!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} \right]^{-1}$$

Отсюда с учетом (44), (45) вытекает

$$\begin{aligned} & 1 - P_r[n_{ij}; i, j = \overline{0, q-1}] \\ & \geq P = (1 + o(1)) \left(\frac{\varepsilon}{q(q-1)} \right)^k \prod_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \left(\theta_i - \frac{\varepsilon}{q} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Следовательно, существует функция $\varphi_r \in \Phi$, для которой выполняется оценка (40) (при достаточно больших значениях n).

(Г) Рассмотрим теперь второй случай:

$$g' = g \in G. \quad (48)$$

Выберем ε такое, что

$$\theta_{i_\nu}(n) - \frac{\varepsilon}{q(q-1)} > \frac{\varepsilon}{q(q-1)}, \quad \nu = \overline{1, k},$$

и предположим, что выполняются более жесткие по сравнению с неравенствами (44) ограничения

$$n_{i_1, j_1} \geq \left(\theta_{i_1}(n) - \frac{\varepsilon}{q(q-1)} \right) n, \dots, n_{i_k, j_k} \geq \left(\theta_{i_k}(n) - \frac{\varepsilon}{q(q-1)} \right) n. \quad (49)$$

Положим $n_{ij}^{(g)} = n_{ij}^{(g)}(x^0, x) = |\{s: g(x_s^0) = i, x_s = j\}|$ и с учетом (49) и (45) получим, что

$$n_{i_\nu, j_\nu} = n_{e(i_\nu), j_\nu}^{(e)} = n_{g(i_\nu), j_\nu}^{(g)} = n_{j_\nu, j_\nu}^{(g)} \geq \left(\theta_{i_\nu}(n) - \frac{\varepsilon}{q(q-1)} \right) n, \quad \nu = \overline{1, k};$$

$$n_{ii} = n_{e(i), i}^{(e)} = n_{g(i), i}^{(g)} = n_{ii}^{(g)} \geq \left(\theta_i(n) - \frac{\varepsilon}{q} \right) n, \quad i \notin \{i_1, \dots, i_k\},$$

где e — единичный элемент группы G . Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho(g(x^0), x) &= n - \sum_{j_\nu \in \{i_1, \dots, i_k\}} n_{j_\nu, j_\nu}^{(g)} - \sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} n_{ii}^{(g)} \\ &\leq \varepsilon n \left(1 - \frac{k}{q} + \frac{k}{q(q-1)} \right) \leq \varepsilon n, \quad \forall q \geq 2. \end{aligned}$$

Значит, при условии (49) вектор x принадлежит ε -окрестности решения $g(x^0)$ и не должен учитываться в сумме Σ_2 из разложения (25). Поэтому, по крайней мере, одно из неравенств (49) должно нарушаться.

Пусть

$$n_{i_\nu, j_\nu} < \left(\theta_{i_\nu}(n) - \frac{\varepsilon}{q(q-1)} \right) n, \quad \nu \in \{1, \dots, k\}. \quad (50)$$

С учетом (50) и равенств $\sum_{j=0}^{q-1} n_{i_\nu, j} = \sum_{j: j \neq j_\nu} n_{i_\nu, j} + n_{i_\nu, j_\nu} = \theta_{i_\nu}(n) n$ получим, что найдется элемент $j \in \{0, \dots, q-1\} \setminus j_\nu$, для которого

$$n_{i_\nu, j} > \left[\theta_{i_\nu}(n) n - \left(\theta_{i_\nu}(n) - \frac{\varepsilon}{q(q-1)} \right) n \right] \frac{1}{q-1} = \frac{\varepsilon}{q(q-1)^2} n. \quad (51)$$

Согласно (44) и (51), имеем

$$\begin{aligned} n_{i_1, j_1}, \dots, n_{i_{\nu-1}, j_{\nu-1}} &\geq \frac{\varepsilon}{q(q-1)} n; \\ n_{i_\nu, j} &\geq \frac{\varepsilon}{q(q-1)^2} n; \\ n_{i_{\nu+1}, j_{\nu+1}}, \dots, n_{i_k, j_k} &\geq \frac{\varepsilon}{q(q-1)} n, \end{aligned} \quad (52)$$

где $\nu \in \{1, \dots, k\}$; $j \in \{0, \dots, q-1\} \setminus j_\nu$. При этом остаются в силе ограничения (45).

Сопоставим ограничениям (52) и (45) отображение $g'': \{0, \dots, q-1\} \rightarrow \{0, \dots, q-1\}$, определяемое равенствами

$$\begin{aligned} g''(i_1) &= j_1, \dots, g''(i_{\nu-1}) = j_{\nu-1}; \\ g''(i_\nu) &= j \in \{0, \dots, q-1\} \setminus j_\nu; \\ g''(i_{\nu+1}) &= j_{\nu+1}, \dots, g''(i_k) = j_k; \\ g''(i) &= i, \quad i \notin \{i_1, \dots, i_k\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Отображение g'' отличается от заданного равенствами (46) взаимно однозначного по условию (48) отображения g' только одним переходом: $g''(i_\nu) = j \in \{0, \dots, q-1\} \setminus j_\nu$. Следовательно, отображение g'' является вырожденным. Поэтому по условию 1 теоремы 1 и согласно утверждению 1, для любой функции $\varphi_r \in \Phi$ найдется вектор y такой, что $\varphi_r(y) \neq \varphi_r(g''(y))$.

Теперь мы можем повторить рассуждения, использованные для вывода оценки (47) в случае (В) (см. (46) и ниже), и с учетом (45), (52) заменить в (47) один множитель, равный $\varepsilon/q(q-1)$, на величину $\varepsilon/q(q-1)^2$. Таким образом получим оценку (40) в случае (Г). Лемма 1 доказана.

2.2. Доказательство леммы 2. Доказательство леммы 2 до формулы (35) повторяет доказательство леммы 1. Для величины (35) согласно условию 3.2 теоремы 2 имеем $\sigma(i, j) = z$. Используя это равенство, аналогично выводу оценки (38) получим

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,1}^* &\approx \prod_{i=0}^{q-1} \prod_{j: j \neq i} \sum_{n_{ij}=0}^{\infty} \exp\{-n_{ij}z\} \frac{\theta_i^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \\ &= \prod_{i=0}^{q-1} \exp\{(q-1)\theta_i e^{-z}\} = \exp\{(q-1)e^{-z}\}, \end{aligned} \quad (54)$$

и эта оценка не зависит от условия 3.1 теоремы 2 (условие 3.1 использовалось в доказательстве леммы 1 при обосновании оценки (38) и при обосновании оценки (41)).

Совершенно аналогично показывается (с учетом условия 3.2 теоремы 2 вместо условия 3.3 теоремы 1), что выполняется оценка (39) и эта оценка не зависит от условия 3.1.

Без каких-либо изменений (с учетом условия 3.1) доказывается оценка (41) и, таким образом, завершается доказательство утверждения 1 леммы 2.

Для доказательства утверждения 2 леммы 2 осталось показать, что в случае $|G_\varphi| = 1$, $r = 1, \dots, R$, независимо от условия 3.1 выполняется оценка вида (41). Пусть $|G_\varphi| = 1$, $r = 1, \dots, R$, тогда неравенство (40)

выполняется для любого вектора $x \notin \cup_{g \in G} M_\varepsilon(g(x^0))$ и для любой функции $\varphi_r \in \Phi$, так как для любой функции $\varphi_r \in \Phi$ найдется вектор y такой, что $\varphi_r(y) \neq \varphi_r(g'(y))$, где отображение $g' \notin G$ определено равенствами (46). Поэтому

$$\Sigma_2 \leq q^n (1 - \alpha(\varepsilon))^{T''} = o(1),$$

где $T'' = \max_r T(r)$ и $T''/n \rightarrow \infty$, согласно условию 3.2 теоремы 2. Лемма 2 доказана.

2.3. Доказательство леммы 3. Доказательство леммы 3 фактически вытекает из доказательств лемм 1, 2. Следует только учесть, что при $q = 2$ как в случае (А), так и в случае (Б) для величины (35) имеем $\sigma(0, 1) = z$. Поэтому независимо от условия 3.1 теоремы 3 выполняется оценка (54), где $q = 2$.

3. Доказательства теорем

3.1. Доказательство теоремы 1. Обозначим η число пар переменных $x_{s_1(i_1)}, x_{s_2(i_2)}$, где

$$i_1 \leq i_2, \quad s_1(i) < s_2(i), \quad s_1(i_1), s_2(i_2) \in \bigcup_{i: J_i \neq \emptyset} \bigcup_{l=1}^{N_i} S_i^{(l)},$$

содержащихся одновременно, по крайней мере, в одном уравнении системы. Пусть событие B_0 состоит в том, что $\eta = 0$.

Для набора фиксированных неотрицательных целых чисел $m_i^{(l)}$, где i, l пробегает значения $i: J_i \neq \emptyset, l = 1, \dots, N_i$, определим событие $B_0(\{m_i^{(l)}\})$, состоящее в том, что $\eta = 0$ и, кроме того, выполняется система равенств $|S_i^{(l)}| = m_i^{(l)}$. Согласно определениям, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\Xi \supseteq \bigcup_{g \in G} X_{g(x^0)}(\{S_i^{(l)}\}) \mid B_0\right\} &= 1, \\ \mathbf{P}\left\{\xi \geq |G| \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{l=1}^{N_i} (1 + h_i^{(l)})^{m_i^{(l)}} \mid B_0(\{m_i^{(l)}\})\right\} &= 1, \end{aligned} \quad (55)$$

где $h_i^{(l)} = |J_i^{(l)}|$. Покажем теперь, что

$$\mathbf{P}(B_0(\{m_i^{(l)}\})) = \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{l=1}^{N_i} \frac{(\theta_i e^{-z})^{m_i^{(l)}}}{m_i^{(l)}!} \exp\{-\theta_i e^{-z} + o(1)\}. \quad (56)$$

Тогда с учетом (23)

$$|G| \exp\left\{\sum_{i=0}^{q-1} \theta_i h_i e^{-z} + o(1)\right\} = \mathbf{E}\xi \geq \sum_{m_i^{(l)}} \mathbf{P}(B_0(\{m_i^{(l)}\})) \mathbf{E}(\xi \mid B_0(\{m_i^{(l)}\})),$$

и, согласно (55), (56), правая часть этого неравенства не превосходит величины

$$E' = |G| \exp \left\{ \sum_{i=0}^{q-1} \theta_i h_i e^{-z} + o(1) \right\}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{P} \left\{ \xi = |G| \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{l=1}^{N_i} (1 + h_i^{(l)} m_i^{(l)}) \mid B_0(\{m_i^{(l)}\}) \right\} = 1 + o(1). \quad (57)$$

Из (56), (57) следуют соотношения (13), (14).

Итак, нам осталось доказать соотношение (56). Оценим сначала вероятность $\mathbf{P}\{|S_i^{(l)}| = m_i^{(l)}\}$, $m_i^{(l)} \in \{0, 1, 2, \dots\}$, выполнения системы равенств $|S_i^{(l)}| = m_i^{(l)}$, где i, l пробегает значения $i: J_i \neq \emptyset, l = 1, \dots, N_i$.

Используя формулу включения и исключения, получим выражение вида

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{|S_i^{(l)}| = m_i^{(l)}\} \\ &= \sum_{\mu_i^{(l)}} \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{l=1}^{N_i} (-1)^{\mu_i^{(l)}} \binom{m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)}}{\mu_i^{(l)}} \left(n_i - \sum_{p=1}^{l-1} (m_i^{(p)} + \mu_i^{(p)}) \right) \\ & \quad \times \prod_{r=1}^R [P_r^*]^{T(r)}, \end{aligned} \quad (58)$$

где сумма $\sum_{\mu_i^{(l)}}$ берется по неотрицательным значениям величин $\mu_i^{(l)}$, $i: J_i \neq \emptyset, l = 1, \dots, N_i$;

$$P_r^* = \mathbf{P}\{s_{1,l}(i), \dots, s_{m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)}, l}(i) \in S_{t,r}(J_i^{(l)}); i: J_i \neq \emptyset, l = \overline{1, N_i}\} \quad (59)$$

и в правой части (59) указан фиксированный набор индексов.

Обозначим $\tilde{v} = \tilde{v}(x)$ число координат вектора x с индексами из множества

$$\{s_{1,l}(i), \dots, s_{m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)}, l}(i); i: J_i \neq \emptyset, l = \overline{1, N_i}\},$$

входящих в уравнение (30). Пусть

$$\sum_{i,l}^* (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)}) = \sum_{i: J_i \neq \emptyset} \sum_{l=1}^{N_i} (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)}) = o(n).$$

Разлагая вероятность (59) по формуле полной вероятности относительно системы событий $\tilde{v} = 0, \tilde{v} = 1, \tilde{v} \geq 2$, аналогично выкладкам (32) найдем

$$\begin{aligned}
 P_r^* = & \left[\binom{n}{d(r)} \frac{d(r)!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} \right]^{-1} \\
 & \times \left[\binom{n - \sum_{i,l}^* (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)})}{d(r)} \frac{d(r)!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} \right. \\
 & + \sum_{i,l}^* (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)}) \sum_{\substack{d_0, \dots, d_{q-1} \\ d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r) - 1}} \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \binom{n_i - \sum_l (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)})}{d_i} \\
 & \times \prod_{i: J_i = \emptyset} \binom{n_i}{d_i} \pi_r(J_i^{(l)}; d_0, \dots, d_{q-1}) \frac{\prod_{i=0}^{q-1} d_i!}{|\Sigma_{\varphi_r}|} \\
 & \left. + O\left(n^{d-2} \left(\sum_{i,l}^* (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)})\right)^2\right) \right], \quad (60)
 \end{aligned}$$

где $\pi_r(J_1^{(l)}; d_0, \dots, d_{q-1}) = \sum_{k=1}^{d(r)} \pi_r^{(k)}(J_1^{(l)}; d_0, \dots, d_{q-1})$ и величина $\pi_r^{(k)}(J_1^{(l)}; d_0, \dots, d_{q-1})$ равна числу множеств вида

$$\left\{ (y_1, \dots, y_k, \dots, y_{d(r)}): y_k \in i \cup J_i^{(l)}; \quad y_\nu = C_\nu, \quad \nu \neq k; \right. \\
 \left. \varphi_r(y) = C = \text{const} \quad \forall y_k \in i \cup J_i^{(l)} \right\},$$

соответствующих различным фиксациям $y_\nu = C_\nu$ переменных $y_\nu, \nu \neq k$, таким, что d_w переменных $y_\nu, \nu \neq k$, принимают значение $w = 0, \dots, q-1$.

Выражение (60) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 P_r^* = & 1 - \frac{1}{n} \sum_{i,l}^* (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)}) \left(d(r) - \tilde{\lambda}_r(J_i^{(l)}) \right) \\
 & + O\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i,l}^* (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)})\right)^2\right), \quad (61)
 \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\lambda}_r(J_i^{(l)}) = \sum_{\substack{d_0, \dots, d_{q-1} \\ d_0 + \dots + d_{q-1} = d(r) - 1}} (\theta_0(n))^{d_0} \dots (\theta_{q-1}(n))^{d_{q-1}} \pi_r(J_1^{(l)}; d_0, \dots, d_{q-1}).$$

Из определения величины $\pi_r^{(k)}(i, j; d_0, \dots, d_{q-1})$ (см. (5) и ниже) вытекает $\pi_r^{(k)}(J_i^{(l)}; d_0, \dots, d_{q-1}) = \pi_r^{(k)}(i, j; d_0, \dots, d_{q-1}), \forall j \in J_i^{(l)}$. Следовательно,

$$\tilde{\lambda}_r(J_i^{(l)}) = \lambda_r(i, j) + o(\ln^{-1} n), \quad \forall j \in J_i^{(l)},$$

$$\sum_{r=1}^R t(r) \tilde{\lambda}_r(J_i^{(l)}) = \lambda^* + o(\ln^{-1} n).$$

Поэтому при условиях 3.2, 3.3 теоремы 1 и при условии $\mu_i^{(l)} \leq \ln n$, используя (61), найдем

$$\prod_{r=1}^R [P_r^*]^{T(r)} = n^{-\sum_{i,l} (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)})} \times \exp \left\{ - (z + o(1)) \sum_{i,l} (m_i^{(l)} + \mu_i^{(l)}) + O\left(\frac{(\ln n)^3}{n}\right) \right\}. \quad (62)$$

Из (58), (62), с учетом неравенств Бонферрони для формулы включения и исключения [5], получим искомую оценку

$$\mathbf{P}\{ |S_i^{(l)}| = m_i^{(l)} \} = \prod_{i: J_i \neq \emptyset} \prod_{l=1}^{N_i} \frac{(\theta_i e^{-z})^{m_i^{(l)}}}{m_i^{(l)}!} \exp\{-\theta_i e^{-z} + o(1)\}. \quad (63)$$

Оценим теперь вероятность $\mathbf{P}\{\eta > 0\}$. Зафиксируем некоторую пару переменных

$$x_{s_1(i_1)}, \quad x_{s_2(i_2)}, \quad (64)$$

где $s_1(i_1) \in \{s: x_s^0 = i_1\}$, $s_2(i_2) \in \{s: x_s^0 = i_2\}$, $i_1, i_2: J_{i_1}, J_{i_2} \neq \emptyset$, и где мы полагаем $i_1 \leq i_2$, $s_1(i) < s_2(i)$ в случае $i_1 = i_2 = i$. Введем индикаторы

$$I_{t,r}^{(k)} = I\left(s_1(i_1) \in S_{t,r}(J_{i_1}^{(l_1)}), s_2(i_2) \in S_{t,r}(J_{i_2}^{(l_2)}), C_{t,r}^{(k)}\right), \quad k = 1, 2,$$

при некоторых фиксированных l_1, l_2 . Каждый из этих индикаторов равняется единице, если выполняются все три события, указанные в скобках, и равняется нулю в остальных случаях. Событие $C_{t,r}^{(1)}$ выполняется, если не более одного переменного из пары (64) содержится в (t, r) -уравнении (в уравнении с номером t из подсистемы уравнений с функцией φ_r). Событие $C_{t,r}^{(2)}$ выполняется, если оба переменных (64) содержатся в (t, r) -уравнении.

Введем также индикатор

$$I = I\left(s(i_1) \in S_{i_1}^{(l_1)}, s(i_2) \in S_{i_2}^{(l_2)}, C\right),$$

где, согласно принятым ранее обозначениям, $S_i^{(l)} = \cap_{r=1}^R \cap_{t=1}^{T(r)} S_{t,r}(J_i^{(l)})$; событие C выполняется, если оба переменных (64) содержатся, по крайней мере, в одном уравнении системы.

С учетом (59), (61) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \mathbf{P}\{I_{t,r}^{(k)} = 1\} &= \mathbf{P}\{s_1(i_1) \in S_{t,r}(J_{i_1}^{(l_1)}), s_2(i_2) \in S_{t,r}(J_{i_2}^{(l_2)})\} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \left(2d(r) - \tilde{\lambda}_r(J_{i_1}^{(l_1)}) - \tilde{\lambda}_r(J_{i_2}^{(l_2)})\right) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

причем $P\{I_{t,r}^{(2)} = 1\} = O(n^{-2})$. Поэтому

$$P\{I = 1\} = \prod_{r=1}^R \left[\sum_{k=1}^2 P\{I_{t,r}^{(k)} = 1\} \right]^{T(r)} - \prod_{r=1}^R [P\{I_{t,r}^{(1)} = 1\}]^{T(r)} = O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right).$$

Следовательно, для вероятности $P\{\eta > 0\}$ с учетом равенства

$$\eta = \sum I = \sum_{i_1, i_2} \sum_{s_1(i_1), s_2(i_2)} \sum_{l_1, l_2} I(s_1(i_1) \in S_{i_1}^{(l_1)}, s_2(i_2) \in S_{i_2}^{(l_2)}, C)$$

и неравенств $i, l \leq q$, $s(i) \leq n$ выполняется оценка

$$P\{\eta > 0\} \leq \sum P\{I = 1\} = O(n^{-1} \ln n). \quad (65)$$

В силу (63), (65) выполняется (56). Теорема 1 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2 существенно проще, так как вместо величин $|S_i^{(l)}|$ достаточно исследовать одну величину $|S|$, равную числу переменных вектора x , не вошедших ни в одно уравнение системы (4). В эквивалентной терминологии эта величина равна числу пустых ячеек в схеме размещения частиц комплектами и при условии 3.2 теоремы 2 асимптотически распределена по закону Пуассона с параметром e^{-z} (см. [3]). Ясно, что $P\{\xi \geq q^{|S|}\} = 1$. Из этого соотношения, пуассоновости величины $|S|$ и (24) следует (15) и (16).

Учитывая, что для обоснования пуассоновости величины $|S|$ и оценки (24) условие 3.1 не требуется, получаем последнее утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 3 покрывается доказательствами теорем 1, 2, если вместо лемм 1, 2 использовать лемму 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакин Г. В. Графы систем двучленных уравнений с булевыми неизвестными. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 241–259.
2. Копытцев В. А. О распределении числа решений случайных заведомо совместных систем уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 430–437.
3. Михайлов В. Г. Предельные теоремы для случайного покрытия конечного множества и для числа решений системы случайных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 2, с. 272–283.
4. Масол В. И. Теорема о предельном распределении числа ложных решений системы нелинейных случайных булевых уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 1, с. 41–56.
5. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
30.VI.1998