Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, О симметричной σ -алгебре стационарного марковского хarrisовского процесса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 869–877

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 07:58:43

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1996 г.

БЕЖАЕВА З. И.*, ОСЕЛЕДЕЦ В. И.**

О СИММЕТРИЧНОЙ σ -АЛГЕБРЕ
СТАЦИОНАРНОГО МАРКОВСКОГО
ХАРРИСОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассматривается стационарный эргодический марковский харрисовский процесс $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ со значениями в пространстве Лебега. Доказано, что σ -алгебра симметрических событий этого процесса совпадает с пересечением σ -алгебр, порожденных случайными величинами ξ_{-1} и ξ_0 .

Ключевые слова и фразы: стационарные марковские процессы, квазикомпактный оператор, харрисовский оператор, хвостовая σ -алгебра, симметричная (перестановочная) σ -алгебра.

1. Введение. Рассмотрим измеримое пространство $(X, \mathcal{F})$. Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, а через $\mathcal{X}$ — пространство двусторонних последовательностей $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ со значениями в X .

Пусть $\mathcal{F}$ есть σ -алгебра, порожденная цилиндрическими множествами в $\mathcal{X}$ и T — оператор сдвига в пространстве траекторий $\mathcal{X}$, то есть для любого $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \in \mathcal{X}$

$$Tx = (\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots) \in \mathcal{X}, \quad \text{где } x'_k = x_{k+1}.$$

Пусть теперь μ — вероятностная мера на $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, инвариантная относительно сдвига T .

Введем стационарный процесс $\xi_t, t \in \mathbb{Z}$, следующим образом:

$$\xi_t(x) = x_t, \quad x = (\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots) \in \mathcal{X}.$$

Мы будем рассматривать случай марковской меры μ , а именно, случай, когда процесс ξ_t — стационарный марковский процесс [1]. На пространстве $(X, \mathcal{F})$ индуцируется мера μ_0 — одномерное распределение процесса ξ_t .

Перед формулировкой основного результата работы введем некоторые обозначения, дадим определения и докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Мы будем предполагать, что пространство $(X, \mathcal{F})$ с мерой μ_0 является пространством Лебега. Измеримое пространство с конечной мерой называется *пространством Лебега*, если оно полно (mod 0) относительно некоторого счетного базиса [2].

Через σ_t^i будем обозначать σ -алгебру в пространстве $\mathcal{X}$, порожденную случайными величинами $\{\xi_u, t \leq u \leq s\}$, и $\sigma_t = \sigma_t^t$. Через $\mathcal{O} = \bigcap_i \sigma_i^\infty$ будем обозначать остаточную (хвостовую) σ -алгебру стационарного процесса ξ_t . Остаточная σ -алгебра $\mathcal{O}$ инвариантна относительно сдвига T .

*МГИЭМ, Трехсвятительский пер., 3/12, Москва, Россия.

**Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Воробьевы горы, Москва, Россия.

Лемма 1. Если ξ_t — стационарный марковский процесс и $\mathcal{O} \subseteq \sigma_0$, то

$$\mathcal{O} \subseteq \sigma_{-1} \cap \sigma_0.$$

Доказательство. Если функция $g(\xi_0)$ измерима относительно $\mathcal{O}$, то и функция $g(\xi_1)$ измерима относительно $\mathcal{O}$, так как σ -алгебра $\mathcal{O}$ инвариантна относительно сдвига, т.е. $g(\xi_1) = g_0(\xi_0)$. Поэтому $g(\xi_0) = g_0(\xi_{-1})$, и утверждение леммы доказано.

С процессом ξ_t можно связать гильбертово пространство L_2 комплекснозначных функций $g(x)$, $x \in \mathcal{X}$, таких, что

$$\int_{\mathcal{X}} |g(x)|^2 d\mu(x) < \infty,$$

с естественным скалярным произведением

$$(g_1, g_2) = M g_1 \bar{g}_2 = \int_{\mathcal{X}} g_1 \bar{g}_2 d\mu$$

для любых $g_1, g_2 \in L_2$.

Пусть

$$L_2^0 = \{f \in L_2: f(x) = f_0(x_0)\}.$$

Через L_∞ будем обозначать банахово пространство ограниченных измеримых функций на $\mathcal{X}$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$, где для любой функции $\varphi \in L_\infty$ норма $\|\varphi\|_\infty$ определяется как $\|\varphi\|_\infty = \text{vrai sup } |\varphi(x)|$. Пространство функций L_∞ всюду плотно в L_2 по норме пространства L_2 .

Через L_∞^0 будем обозначать банахово пространство

$$L_\infty^0 = \{f \in L_\infty: f(x) = f_0(x_0)\}.$$

Это пространство плотно в L_2^0 по норме L_2^0 .

На пространстве L_2^0 определим оператор

$$P: L_2^0 \rightarrow L_2^0, \quad (Pf)(\xi_0) = M(f(\xi_1) | \xi_0),$$

и сопряженный к нему оператор P^* .

Оператор P (а также P^*) является марковским оператором [3]. Заметим, что пространство L_∞^0 инвариантно относительно оператора P .

Для любого марковского оператора Q на L_2^0 *инвариантной функцией* называется такая функция g , что $Qg = g$. *Инвариантным множеством* оператора Q называется множество, индикатор которого есть инвариантная функция. Через $\mathcal{F}(Q)$ будем обозначать σ -алгебру инвариантных множеств марковского оператора Q . Как известно, σ -алгебра инвариантных множеств марковского оператора является подалгеброй остаточной σ -алгебры соответствующего процесса Маркова.

Марковский процесс ξ_t называется *эргодическим*, если σ -алгебра $\mathcal{F}(P)$ тривиальна.

Измеримая функция φ называется *инвариантной функцией* процесса ξ_t , если $\varphi(Tx) = \varphi(x)$. Известно (см., например, простое доказательство в [4]), что инвариантная функция стационарного марковского процесса ξ_t измерима относительно σ_0 , т.е. $\varphi(x) = \varphi_0(x_0)$.

Заметим, что $\varphi_0(x_0)$ — инвариантная функция марковского процесса ξ_t — является инвариантной функцией оператора P . Обратно, если $\varphi_0(x_0) \in L_2^0$ есть инвариантная функция оператора P , то $\varphi(x) = \varphi_0(x_0)$ есть инвариантная функция соответствующего процесса Маркова.

Собственной функцией оператора T называется такая измеримая функция φ , что $\varphi(Tx) = \lambda\varphi(x)$.

Лемма 2. Если ξ_t — стационарный марковский процесс, то собственные функции оператора сдвига T измеримы относительно σ_0 .

Доказательство. Приведем простое доказательство этого известного факта. Пусть $\varphi(x)$ — собственная функция оператора T с собственным значением λ .

Рассмотрим пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z}$ — окружность в комплексной плоскости, $\mathcal{Z} = \{z: |z| = 1\}$. На пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ определим двухкомпонентный процесс Маркова (ξ_t, ζ_t) следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi_k &= \xi_0(\tilde{T}^k(x, z)), \quad \zeta_k = \zeta_0(\tilde{T}^k(x, z)), \\ \xi_0 &= x_0, \quad \zeta_0 = z, \quad x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \quad z \in \mathcal{Z},\end{aligned}$$

$$\tilde{T}(x, z) = (Tx, \bar{\lambda}z).$$

Если распределение (ξ_0, ζ_0) есть $\mu_0 \times \bar{\mu}$, где $\bar{\mu}$ — равномерное распределение на окружности $\mathcal{Z}$, то (ξ_t, ζ_t) — стационарный марковский процесс.

Очевидно, что функция $\varphi(x, z) = \varphi(x)z$, заданная на пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$, является инвариантной функцией процесса (ξ_t, ζ_t) , поэтому $\varphi(x, z) = \varphi_0(x_0, z)$. Следовательно, $\varphi(x) = \varphi_0(x_0)$. Что и требовалось доказать.

Нам потребуется в дальнейшем понятие квазикompактного оператора в банаховом пространстве.

Линейный ограниченный оператор Q называется квазикompактным оператором в банаховом пространстве, если существует последовательность компактных линейных операторов $\{Q_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q^n - Q_n\| = 0.$$

Мы будем называть стационарный эргодический марковский процесс харрисовским, если оператор P в банаховом пространстве L_∞^0 есть харрисовский оператор.

Харрисовские операторы изучались в работах [5]–[9]. Как следует из [3, с. 313] для рассматриваемого случая харрисовость оператора P эквивалентна квазикompактности этого оператора в пространстве L_∞^0 .

Связь между квазикompактностью оператора P и условием Харриса изучалась, в частности, в работе Брюнеля и Ревуза [10].

Для стационарного процесса Маркова введем симметричную σ -алгебру.

Множество $A \in \mathcal{F}$ называется симметричным, если для любого $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \in A$ траектория, получающаяся из x конечной перестановкой координат с неотрицательными индексами, также содержится в A .

Симметричной σ -алгеброй S называется σ -алгебра симметричных множеств.

В [11], [12] изучались «двусторонние» симметричные σ -алгебры, состоящие из множеств $A \in \mathcal{F}$, инвариантных относительно любой конечной перестановки координат. Данное здесь определение симметричной σ -алгебры является определением «односторонней» симметричной σ -алгебры.

Симметричные σ -алгебры, рассматриваемые в настоящей работе, изучались, например, в [13]–[17]. В [17], в частности, показано, что условие тривиальности симметричной σ -алгебры для конечных цепей Маркова эквивалентно справедливости для этой цепи многомерной локальной предельной теоремы в форме Колмогорова [18].

В [15] было показано, что для эргодической цепи Маркова со счетным пространством состояний и для некоторого класса стационарных процессов справедливо равенство

$$S = T(\sigma_0 \cap \sigma_1).$$

Поясним, что σ -алгебра $T(\sigma_0 \cap \sigma_1)$ состоит из множеств TA , где $A \in \sigma_0 \cap \sigma_1$ и $T(\sigma_0 \cap \sigma_1) = \sigma_{-1} \cap \sigma_0$.

В [4, теорема 2] было показано, что если ξ_t — стационарный марковский процесс, то

$$T(\sigma_0 \cap \sigma_1) = \mathcal{F}(P^*P).$$

Основным содержанием настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Если ξ_t — стационарный эргодический марковский харрисовский процесс, то

$$S = \sigma_{-1} \cap \sigma_0 = T(\sigma_0 \cap \sigma_1) = \mathcal{F}(P^*P).$$

Сформулированная теорема содержит эффективный способ вычисления симметричной σ -алгебры для марковских харрисовских процессов со значениями в пространстве Лебега.

Кроме того, из утверждения теоремы, а также из результатов [4], [19] следует, например, что если для стационарного эргодического харрисовского процесса Маркова ξ_t σ -алгебра S тривиальна, то для любой функции $f(\xi_t)$ ($f \in L_2^0$) справедлива центральная предельная теорема.

2. Доказательство теоремы. Мы будем доказывать, что если процесс ξ_t удовлетворяет условиям теоремы, то

$$S = \sigma_{-1} \cap \sigma_0.$$

По предположению X — пространство Лебега, поэтому существует базис этого пространства, который будем обозначать через $\{A_j, j = 1, 2, \dots\}$. Пусть $\{f_j, j = 1, 2, \dots\}$ — индикаторы этого базиса.

Введем несколько отношений эквивалентности в пространстве $\mathcal{X}$. Каждое отношение эквивалентности порождает свою σ -алгебру. А именно, эта σ -алгебра состоит из измеримых множеств, состоящих из целых слоев соответствующего отношения эквивалентности. Слой отношения эквивалентности, проходящий через точку x , состоит из всех точек, эквивалентных x .

Рассмотрим при каждом $j = 1, 2, \dots$ и $l = 2, 3, \dots$ отношение (f_j, l) -эквивалентности. Будем говорить, что $x, x' \in \mathcal{X}$ (f_j, l) -эквивалентны, если при некотором неотрицательном n имеем $x_k = x'_k, k > n$, и

$$\sum_{k=0}^n f_j(x_k) = \sum_{k=0}^n f_j(x'_k) \pmod{l}.$$

Рассмотрим теперь отношение f -эквивалентности, равное произведению (f_j, l) -эквивалентностей по всем j, l , т.е. $x, x' \in \mathcal{X}$ f -эквивалентны тогда и только тогда, когда x, x' (f_j, l) -эквивалентны при всех j, l .

Будем говорить, что $x, x' \in \mathcal{X}$ S -эквивалентны, если найдется такое n , что $x_k = x'_k, k > n$, и траектория $x_0, x_1, \dots, x_n$ отличается от $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$ перестановкой.

Из данных определений выводится следующее утверждение.

Лемма 3. Пара траекторий x, x' f -эквивалентна тогда и только тогда, когда пара x, x' S -эквивалентна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что x, x' f -эквивалентны. Тогда найдется такое n , что $x_k = x'_k, k > n$, и

$$\sum_{k=0}^n f_j(x_k) = \sum_{k=0}^n f_j(x'_k) \pmod{l}$$

при всех f_j, l .

Предположим, что пара x, x' в то же время не является S -эквивалентной. Это означает, что последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n$ не может быть получена из последовательности $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$ перестановкой. То есть среди точек последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n$ существует точка x_i , встречающаяся среди точек этой последовательности k_i раз, а среди точек последовательности $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$ — k'_i раз, и $k_i \neq k'_i$.

Выберем теперь элемент базиса A_j так, чтобы $x_i \in A_j$, а все точки последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n, x'_0, x'_1, \dots, x'_n$, отличные от x_i , не принадлежали бы A_j . Тогда

$$\sum_{k=0}^n f_j(x_k) = k_i, \quad \sum_{k=0}^n f_j(x'_k) = k'_i.$$

Но так как x, x' (f_j, l) -эквивалентны при всех j, l , то $k_i = k'_i \pmod{l}$ при всех l , т.е. $k_i = k'_i$.

Полученное противоречие означает, что из f -эквивалентности траекторий $x, x' \in \mathcal{X}$ следует их S -эквивалентность.

В обратную сторону утверждение леммы очевидно.

Сопоставим паре (j, l) , $j = 1, 2, \dots, l = 2, 3, \dots$, группу вычетов $Y_{j,l}$ по модулю l ,

$$Y_{j,l} = \{0, 1, \dots, l-1\}.$$

Пусть $\mathcal{Y} = \prod_{j,l} Y_{j,l}$. Тогда $\mathcal{Y}$ — компактная абелева группа в слабой топологии. На $\mathcal{Y}$ определена мера Хаара $\mu_{\mathcal{Y}}$, равная произведению равномерных мер на множествах $Y_{j,l}$.

На пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ определим процесс (ξ_t, η_t) ($t \in \mathbb{Z}$) следующим образом:

$$\xi_k(x, y) = \xi_0(\tilde{T}^k(x, y)), \quad \eta_t(x, y) = \eta_0(\tilde{T}^k(x, y)),$$

где $\xi_0(x, y) = x_0$, $\eta_0(x, y) = y$, $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, $y = (y_{j,l}, j = 1, 2, \dots, l = 2, 3, \dots) \in \mathcal{Y}$.

Оператор сдвига этого процесса

$$\tilde{T}(x, y) = (Tx, y + f(x_0)),$$

$$y + f(x_0) = ((y_{j,l} + f_j(x_0) \pmod{l}), j = 1, 2, \dots, l = 2, 3, \dots).$$

Если одномерное распределение процесса (ξ_t, η_t) равно $\mu_0 \times \mu_{\mathcal{Y}}$, то этот процесс стационарен.

Будем через $\tilde{\sigma}_t$ обозначать σ -алгебру, порожденную случайными величинами (ξ_t, η_t) , а через $\tilde{\mathcal{O}}$ — остаточную σ -алгебру введенного процесса.

Для процесса (ξ_t, η_t) , так же как и для ξ_t , будем рассматривать гильбертовы пространства $\tilde{L}_2, \tilde{L}_2^0$ и банаховы пространства $\tilde{L}_{\infty}, \tilde{L}_{\infty}^0$.

Для любой функции $\varphi(x, y) \in \tilde{L}_2$ рассмотрим ее разложение в ряд Фурье по характерам группы $\mathcal{Y}$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{\Delta} \varphi_{\Delta}(x) z^{\Delta}(y),$$

Δ — произвольное конечное подмножество троек,

$$\{(j, l, k_{j,l}), j = 1, 2, \dots, l = 2, 3, \dots, k_{j,l} = 0, \dots, l-1\},$$

$$z^{\Delta}(y) = \prod_{(j,l) \in \Delta} z_{j,l}^{k_{j,l}}, \quad z_{j,l} = \exp \left\{ \frac{2\pi i y_{j,l}}{l} \right\}.$$

Если $\Delta = \emptyset$, то $z^{\Delta}(y) = 1$. В этом разложении $\varphi_{\Delta}(x) \in L_2$.

Приведенное выше разложение функции соответствует разложению пространства $\tilde{L}_2$ в ортогональную сумму подпространств

$$\tilde{L}_2 = \oplus \sum_{\Delta} \tilde{L}_{\Delta}, \quad \tilde{L}_{\Delta} = \{ \varphi(x, y) \in \tilde{L}_2: \varphi(x, y) = \varphi(x) z^{\Delta}(y) \}.$$

Рассмотрим подпространство $\tilde{L}(\tilde{\mathcal{O}})$ — пространство функций из $\tilde{L}_2$, измеримых относительно остаточной σ -алгебры $\tilde{\mathcal{O}}$. Тогда

$$\tilde{L}(\tilde{\mathcal{O}}) = \oplus \sum_{\Delta} \tilde{L}_{\Delta}(\tilde{\mathcal{O}}),$$

где $\tilde{L}_{\Delta}(\tilde{\mathcal{O}})$ — проекция $\tilde{L}(\tilde{\mathcal{O}})$ на $\tilde{L}_{\Delta}$.

Лемма 4. Если ξ_t — стационарный эргодический харрисовский процесс Маркова, то для любого Δ пространство $\tilde{L}_{\Delta}(\tilde{\mathcal{O}})$ конечномерно.

Доказательство. Пусть $\tilde{P}$ — оператор процесса (ξ_t, η_t) в $\tilde{L}_2^0$. Рассмотрим элемент $\varphi \in \tilde{L}_{\Delta}$. Пусть $\tilde{L}_{\Delta,0}$ — подпространство функций из $\tilde{L}_{\Delta}$, измеримых относительно σ -алгебры $\tilde{\sigma}_0$. По определению

$$\tilde{L}_{\Delta,0} = \{ \varphi(x, y) \in \tilde{L}_2: \varphi(x, y) = \varphi(x_0) z^{\Delta}(y) \}.$$

Очевидно, что подпространство $\tilde{L}_{\Delta,0}$ инвариантно относительно $\tilde{P}$. Рассмотрим ограничение оператора $\tilde{P}$ на $\tilde{L}_{\Delta,0}$. Тогда

$$\tilde{P}\varphi(x_0) z^{\Delta}(y) = Q_{\Delta}\varphi(x_0) z^{\Delta}(y),$$

где

$$Q_{\Delta}\varphi(x_0) = \exp \left\{ 2\pi i \sum_{(j,l) \in \Delta} \frac{f_j(x_0) k_{j,l}}{l} \right\} (P\varphi)(x_0).$$

Так как ξ_t — стационарный эргодический харрисовский процесс Маркова, то оператор P этой цепи квазикомпактен в L_{∞}^0 . Легко убедиться в том, что оператор Q_{Δ} также является квазикомпактным оператором в пространстве L_{∞}^0 .

Рассмотрим $\tilde{P}$ -гармонические последовательности $\{\tilde{\varphi}_n\}$ функций из $\tilde{L}_2$, т.е. такие последовательности, что

$$\tilde{\varphi}_n = \tilde{P}\tilde{\varphi}_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Каждому элементу пространства $\tilde{L}_{\Delta}(\tilde{\mathcal{O}})$ отвечает $\tilde{P}$ -гармоническая последовательность функций из $\tilde{L}_{\Delta,0}$, и обратно. Каждой $\tilde{P}$ -гармонической последовательности функций из $\tilde{L}_{\Delta,0}$ соответствует элемент пространства $\tilde{L}_{\Delta}(\tilde{\mathcal{O}})$ (см. [1]).

$\tilde{P}$ -гармоническая последовательность в пространстве $\tilde{L}_{\Delta,0}$ имеет вид $\{\varphi_n(x_0) \times z^{\Delta}(y)\}$, где $\{\varphi_n(x_0)\}$ есть Q_{Δ} -гармоническая последовательность, т.е. $\varphi_n = Q_{\Delta}\varphi_{n+1}$.

Рассмотрим пространство

$$M = \tilde{L}_{\Delta}(\tilde{\mathcal{O}}) \cap \tilde{L}_{\infty}.$$

Пространство M с нормой $\|\cdot\|_{\infty}$ является банаховым пространством. Из определения оператора Q_{Δ} следует, что пространство M изометрично банахову пространству G ограниченных Q_{Δ} -гармонических последовательностей функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in L_{\infty}^0$, с нормой $\|\{\varphi_n\}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{\infty}$.

Изометрический изоморфизм пространства G с пространством M дается формулой

$$\{\varphi_n\} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_n) z^{\Delta}(y) \in M.$$

Поскольку $\varphi_n(x_n)z^\Delta(y)$ есть $\tilde{P}$ -гармоническая последовательность, указанный предел существует почти всюду.

Так как оператор Q_Δ квазикompактен в L_∞^0 , то пространство G ограниченных Q_Δ -гармонических последовательностей конечномерно [1]. А это означает, что пространство M конечномерно. Так как M всюду плотно в $\tilde{L}_\Delta(\tilde{\mathcal{O}})$ по норме пространства $\tilde{L}_2$, то пространство $\tilde{L}_\Delta(\tilde{\mathcal{O}})$ конечномерно.

Доказательство леммы закончено.

Лемма 5. Если оператор P в пространстве L_∞^0 квазикompактен, то $\tilde{\mathcal{O}} \subseteq \tilde{\sigma}_0$.

Доказательство. На $\tilde{L}_\infty^0$ определен унитарный оператор $\tilde{U}$ формулой

$$(\tilde{U}\varphi)(x, y) = \varphi(\tilde{T}(x, y)) = \varphi(Tx, y + f(x)).$$

Конечномерное подпространство $\tilde{L}_\Delta(\tilde{\mathcal{O}})$ инвариантно относительно оператора $\tilde{U}$, и, следовательно, в этом подпространстве существует ортонормированный базис из собственных функций оператора $\tilde{U}$. Оператор $\tilde{U}$ соответствует оператору сдвига $\tilde{T}$ стационарного марковского процесса (ξ_t, η_t) . Поэтому по лемме 2 любая собственная функция оператора $\tilde{U}$, являясь собственной функцией оператора $\tilde{T}$, измерима относительно σ -алгебры $\tilde{\sigma}_0$. Это означает, что любая функция из $\tilde{L}_\Delta(\tilde{\mathcal{O}})$ содержится в $\tilde{L}_{\Delta,0}$. Но справедливы соотношения

$$\tilde{L}(\tilde{\mathcal{O}}) = \oplus \sum_{\Delta} \tilde{L}_\Delta(\tilde{\mathcal{O}}) \subseteq \oplus \sum_{\Delta} \tilde{L}_{\Delta,0} = \tilde{L}_2^0.$$

Итак, пространство $\tilde{L}(\tilde{\mathcal{O}})$ содержится в $\tilde{L}_2^0$. Это означает, что $\tilde{\mathcal{O}} \subseteq \tilde{\sigma}_0$.

Утверждение леммы 5 доказано.

Пусть отображение $\Pi_y: (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X}$ дается формулой $\Pi_y(x, y) = x$. Имеет место следующий результат.

Лемма 6. Для почти всех $y \in \mathcal{Y}$ выполнено равенство

$$\Pi_y(\tilde{\mathcal{O}} \cap \{\mathcal{X} \times y\}) = S.$$

Доказательство. Остаточная σ -алгебра $\tilde{\mathcal{O}}$ косой цепи (ξ_t, η_t) порождается следующим отношением эквивалентности в пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Траектории $(x, y), (x', y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ эквивалентны, если существует такое n , что

$$\xi_k(x, y) = \xi_k(x', y'), \quad \eta_k(x, y) = \eta_k(x', y') \quad \text{при } k > n.$$

Эта эквивалентность означает, что $x_k = x'_k$ при $k > n$ и

$$y + \sum_{k=0}^n f(x_k) = y' + \sum_{k=0}^n f(x'_k).$$

Если $(x, y), (x', y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, то указанное выше отношение эквивалентности сводится к тому, что пара x, x' f -эквивалентна. А это по лемме 3 означает, что x, x' S -эквивалентны. Следовательно, σ -алгебра $\tilde{\mathcal{O}}$ порождает на множестве $\mathcal{X}$ симметричную σ -алгебру S . Лемма 6 доказана.

Аналогично доказывается, что для почти всех y

$$\Pi_y(\tilde{\sigma}_{-1} \cap \tilde{\sigma}_0 \cap (\mathcal{X} \times y)) = \sigma_{-1} \cap \sigma_0.$$

Отсюда следует утверждение леммы 7.

Лемма 7. Симметричная σ -алгебра S является подалгеброй $\sigma_{-1} \cap \sigma_0$, т.е.

$$S \subseteq \sigma_{-1} \cap \sigma_0.$$

Действительно, так как $\tilde{O} \subseteq \tilde{\sigma}_0$, то по лемме 1 $\tilde{O} \subseteq \tilde{\sigma}_{-1} \cap \tilde{\sigma}_0$. Поэтому

$$S = \Pi_y(\tilde{O} \cap \{\mathcal{X} \times y\}) \subseteq \Pi_y(\tilde{\sigma}_{-1} \cap \tilde{\sigma}_0 \cap \{\mathcal{X} \times y\}) = \sigma_{-1} \cap \sigma_0.$$

Докажем теперь обратное утверждение.

Лемма 8. *Справедливо соотношение*

$$\sigma_{-1} \cap \sigma_0 \subseteq S.$$

Доказательство. Рассмотрим любое множество A , принадлежащее $\sigma_{-1} \cap \sigma_0$, и покажем, что $A \in S$.

Пусть $f_A(x)$ — индикатор множества A . Тогда $f_A(x) = f_A(x_0)$.

Пусть теперь $\varphi(x_0) = 2f_A(x_0) - 1$. Так как $A \in \sigma_{-1} \cap \sigma_0$, то функция $\varphi(x_0)$ измерима относительно σ -алгебры σ_{-1} . Поэтому $\varphi(x_0) = g(x_{-1})$ и $\varphi(x_1) = g(x_0)$.

Рассмотрим функцию $\psi(x_0) = \varphi(x_1)/\varphi(x_0)$. В пространстве $\mathcal{X}$ рассмотрим отношение эквивалентности, порожденное функцией ψ .

Будем говорить, что пара траекторий $x, x' \in \mathcal{X}$ ψ -эквивалентна, если существует такое n , что $x_k = x'_k$ при $k > n$ и

$$\psi(x_0)\psi(x_1)\cdots\psi(x_n) = \psi(x'_0)\psi(x'_1)\cdots\psi(x'_n).$$

Очевидно, что если пара x, x' S -эквивалентна, то эта пара и ψ -эквивалентна. Поэтому σ -алгебра $A(\psi)$, порожденная отношением ψ -эквивалентности в $\mathcal{X}$, содержится в σ -алгебре S .

Покажем теперь, что $A \in A(\psi)$. Для этого займемся вычислением σ -алгебры $A(\psi)$.

Введем конструкцию, подобную рассматриваемым ранее. Рассмотрим процесс (ξ_t, δ_t) , оператор сдвига которого определяется следующим образом:

$$\bar{T}(x, w) = (Tx, w\psi(x_0)), \quad w \in \{1, -1\}.$$

Очевидно, что остаточная σ -алгебра этого процесса на множестве $\mathcal{X} \times \{w = 1\}$ совпадает с σ -алгеброй $A(\psi)$, так как на этом множестве она задается тем же самым отношением эквивалентности. Процесс ξ_t — эргодический, поэтому σ -алгебра инвариантных множеств процесса (ξ_t, δ_t) порождается множествами

$$\{(x, w): x \in \mathcal{X}, w = \varphi(x_0)\} \quad \text{и} \quad \{(x, w): x \in \mathcal{X}, w = -\varphi(x_0)\}.$$

Следовательно, σ -алгебра инвариантных множеств процесса (ξ_t, δ_t) на множестве $\mathcal{X} \times \{w = 1\}$ совпадает с σ -алгеброй, порожденной множествами $\{A, \bar{A}\}$. Так как σ -алгебра инвариантных множеств является подалгеброй остаточной, то отсюда следует, что $A \in A(\psi) \subseteq S$. Доказательство леммы 8 закончено.

Из двух последних лемм следует, что $S = \sigma_{-1} \cap \sigma_0 = T(\sigma_0 \cap \sigma_1)$. Используя утверждение теоремы 2 из [4], получаем теперь утверждение сформулированной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
2. Мартин Н., Инглэнд Дж. Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.
3. Krengel U. Ergodic Theorems. Berlin-New York: De Gruyter, 1985.
4. Бежаева З. И., Оселедец В. И. О дисперсии сумм функций стационарного марковского процесса. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 633–639.
5. Horowitz H. L_∞ -limit theorems for Markov processes. — Israel J. Math., 1969, v. 7, p. 60–62.

6. Horowitz H. Strong ergodic theorems for Markov processes. — Proc. Amer. Math. Soc., 1969, v. 23, p. 328–334.
7. Horowitz H. Pointwise convergence of iterates of a Harris-recurrent operator. — Israel J. Math., 1979, v. 33, p. 177–180.
8. Fogel S. R. Harris operators. — Israel J. Math., 1979, v. 33, p. 281–309.
9. Fogel S. R., Goussoub N. A. Ornstein–Metivier–Brunel theorem revisited. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1979, v. 15, p. 293–301.
10. Brunel A., Revus D. Un critère probabiliste de compacité des groupes. — Ann. Probab., 1974, v. 2, p. 745–746.
11. Olshen R. A. The coincidence of measure algebras under an exchangeable probability. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1971, B. 18, S. 153–166.
12. Georgii H. O. On canonical gibbs states, symmetric and tail events. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1976, B. 33, H. 4, S. 331–341.
13. Hewitt E., Savage L. J. Symmetric measure on cartesian products. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 80, p. 470–501.
14. Blackwell D., Freedman D. The tails σ -field of Markov chain and a theorem of Orey. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, p. 1291–1295.
15. Григоренко Л. А. О σ -алгебре симметричных событий для счетной цепи Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 1, с. 198–204.
16. Григоренко Л. А. Симметричные события для некоторых стационарных случайных последовательностей. — Успехи матем. наук, 1984, т. 39, в. 1, с. 127–128.
17. Гуревич Б. М. Локальная предельная теорема для цепей Маркова и условия типа регулярности. — Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. 13, в. 1, с. 183–188.
18. Колмогоров А. Н. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, т. 13, № 4, с. 281–300.
19. Гордин М. И., Лифшиц Б. А. Центральная предельная теорема для стационарных процессов Маркова. — Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 4, с. 766–767.

Поступила в редакцию
5.VIII.1994

© 1996 г.

БОБКОВ С. Г.*

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЕРНУЛЛИ¹⁾

В классе всех вероятностных распределений в $\mathbf{R}^n$ с конечным первым моментом как упорядоченном множестве исследуется положение n -мерного распределения Бернулли.

Ключевые слова и фразы: распределение Бернулли, сравнение мер, ограниченность случайных процессов, линейно порожденных независимыми величинами.

Обозначим через M_n класс всех вероятностных распределений μ в $\mathbf{R}^n$ с конечным первым моментом: $\int_{\mathbf{R}^n} \|x\| d\mu(x) < +\infty$. Пусть M^n обозначает подкласс M_n , состоящий из произведений мер, т.е. вероятностных мер, представимых в виде произведения $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ мер на прямой, имеющих конечный первый момент.

*Сыктывкарский государственный университет, математический факультет, Октябрьский пр. 55, 167001 Сыктывкар, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант № NXZ000.