Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Докучаев, Оптимальная остановка случайного процесса в задаче с дополнительными ограничениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 884–892

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:40:03

и дисперсии $Dx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)|^2 D\xi_1$ ограничены некоторой постоянной σ^2 . Положим $f_n(x) = \sup_t \sum_{k=1}^n a_k(t) x_k$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Эта функция выпукла и липшицева, причем $\|f_n\|_{\text{Lip}} \leq \sigma$. По теореме 2 имеем $Df_n \leq 2\sigma^2$. Предположим сначала, что T конечно. Так как $f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow W$ при $n \rightarrow \infty$ п.н., получаем (например, по лемме Фату), что $DW \leq 2\sigma^2$. Если $T = \{t_n: n \geq 1\}$ бесконечно, то, рассматривая с.в. $W_n = \sup_{1 \leq k \leq n} x(t_k)$ и пользуясь тем, что $W_n \rightarrow W$ при $n \rightarrow \infty$, $DW_n \leq 2\sigma^2$, получаем $DW \leq 2\sigma^2$ в общем случае. В частности, $EW < +\infty$ (чтобы не определять дисперсию через EW , следует использовать тождество $DW = \frac{1}{2} E|W - W'|$, где W' — независимая копия W).

По теореме 1 $E \sup_t x(t) < +\infty \iff E \sup_t y(t) < +\infty$. Действительно, для любой выпуклой функции $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ неравенство (4) дает

$$E f\left(\frac{\xi}{c}\right) \leq E f\left(\frac{\eta}{d}\right), \quad (14)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $c = \text{ess sup} |\xi_1|$, $d = E|\eta_1 - m(\eta_1)|$. Применяя (14) к f_n и пользуясь однородностью, приходим к неравенству $E f_n(\xi) \leq (c/d) E f_n(\eta)$. Так как это неравенство не зависит от размерности, его можно распространить и на бесконечномерный случай.

В заключение автор хотел бы поблагодарить анонимного рецензента за внимательное прочтение и полезные комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ledoux M. Isoperimetry and Gaussian Analysis. — In: Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour, 1994.
2. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
3. Феллс Р. Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968.
4. Choquet G. Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts. — Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 1960, v. 10, p. 333–344.

Поступила в редакцию
8.VI.1994

© 1996 г.

ДОКУЧАЕВ Н. Г.*

ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В ЗАДАЧЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹⁾

Рассмотрена задача об оптимальной остановке марковского процесса с конечным числом ограничений на распределение в момент остановки. Установлена двойственность (совпадение минимакса и максимина соответствующего лагранжиана) для задачи с рандомизированным начальным значением процесса, а также для детерминированного начального значения.

*С.-Петербургский университет, матем.-мех. факультет, 198904 Петродворец, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке гранта Госкомвуза РФ (раздел 50.03.00).

Ключевые слова и фразы: марковские процессы, оптимальная остановка, задачи с ограничениями, двойственность.

Введение. Оптимальной остановке случайных процессов посвящено большое количество работ, и для многих задач получены законченные результаты (см. книги [1]–[3] и библиографию там же). Меньше изучались задачи, в которых момент остановки следует выбирать таким образом, чтобы в этот момент выполнялись дополнительные ограничения на распределение вектора состояния (отметим здесь результаты гл. IV [2]). Вместе с тем именно задачам с ограничениями уделяется основное внимание в детерминированной теории управления (в качестве примера приведем книгу [4] и работу [5]). Имеется ряд близких по подходу к [4], [5] результатов для стохастических задач управления с ограничениями (см. [6]–[11] и там же библиографию), представляющих собой необходимые условия оптимальности, в которых фигурируют множители Лагранжа, определяемые неединственным образом. Этим условиям оптимальности могут удовлетворять и неоптимальные решения.

Ниже получен результат качественно иного рода. Рассмотрена задача об оптимальной остановке марковского процесса с конечным числом ограничений в момент остановки (для определенности взят непрерывный процесс во всем пространстве без управлений в коэффициентах, хотя наш метод переносится и на случай процессов с дискретным временем, и на случай ограниченной области). Задача с ограничениями сведена к минимаксной задаче без ограничений, как это делается в задачах выпуклой оптимизации (максимизация проводится по конечномерному параметру μ — множителям Лагранжа). Подчеркнем, что при этом не производится «релаксации» (т.е. замены искомого момента на вероятностное распределение на множестве моментов [2, с. 119]). Вместо релаксации момента выхода предлагается рассматривать случайные начальные состояния процесса X_0 и затем осуществлять предельный переход к детерминированному начальному состоянию. Этим способом в задаче удалось установить двойственность (совпадение минимакса и максимина лагранжиана, или равенство нулю «двойственного зазора»). Таким образом, чтобы решить задачу с ограничениями, следует найти зависящий от μ инфимум соответствующей функции Лагранжа (определяемый через решение задачи Стефана с зависящим от параметра μ свободным членом), а затем найти такой параметр μ , при котором достигает максимума эта величина для данного начального значения вектора состояния. Отметим, что в гл. IV [2] решен ряд конкретных задач на оптимальную остановку с ограничениями без использования двойственности, при этом отыскание множителей Лагранжа являлось наиболее трудоемкой операцией.

Ниже при доказательстве использован подход, связанный с так называемой S -процедурой, предложенной в [12] для невыпуклых задач и позволяющей сводить задачу с ограничениями к решению двойственной задачи без ограничений. (Термин « S -процедура» был введен М. А. Айзерманом и Ф. Р. Гантмахером для обозначения специального приема, используемого при построении функции Ляпунова в задачах об абсолютной устойчивости разнообразных динамических систем; в [12] содержание этого термина было расширено и ему был придан смысл замены исходной задачи минимизации с ограничениями на двойственную максиминную задачу; в настоящее время этот термин вошел в обиход в теории невыпуклых задач оптимизации с ограничениями, в основном в области линейно-квадратических задач). В общем случае возникает проблема, называемая проблемой неущербности S -процедуры. Имеется решение этой проблемы в ряде частных случаев [12]–[18]. В предлагаемой статье использован подход [18], заключающийся в рандомизации начального состояния и предложенный первоначально для обыкновенных уравнений на фиксированном интервале времени. Отметим также работу [19], где двойственность для стохастических задач управления (не включающих оптимальные остановки) установлена для марковских стратегий на основе выпуклости множества плотностей решений, а также работы

[20]–[23], где двойственность установлена для рандомизированных стратегий и дискретного времени, причем на взвесах конечного числа стратегий.

1. Двойственность в абстрактной задаче оптимизации. Сформулируем здесь общую теорему о двойственности, известную в теории оптимизации с ограничениями [12]–[17].

Пусть U — некоторое множество и заданы функционалы $\Phi_i: U \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \dots, N$, и векторная функция $\Phi: U \rightarrow \mathbf{R}^{N+1}$ вида $\Phi = \text{col}(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_N)$.

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (1.1)$$

$$\Phi_1(u) \leq 0, \dots, \Phi_N(u) \leq 0. \quad (1.2)$$

Пусть U_0 обозначает множество $u \in U$, для которых выполнено (1.2).

Ниже обозначаем $\mu = \text{col}(\mu_1, \dots, \mu_N)$, $\mu_i \in \mathbf{R}$, неравенство $\mu \geq 0$ понимаем покомпонентно.

Составим функцию $\mathcal{L}(u, \mu) = \Phi_0(u) + \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(u)$. Содержание следующей теоремы в принципе известно [14], [17], хотя ее точная формулировка там не приводится.

Теорема 1.1. *Предположим, что: а) множество $\Phi(U)$ является всюду плотным подмножеством некоторого выпуклого множества в $\mathbf{R}^{N+1}$; б) существует $\hat{u} \in U$ такое, что $\Phi_1(\hat{u}) < 0, \dots, \Phi_N(\hat{u}) < 0$.*

Тогда: (i) имеет место соотношение

$$\inf_{u \in U_0} \Phi_0(u) = \sup_{\mu \geq 0} \inf_{u \in U} \mathcal{L}(u, \mu); \quad (1.3)$$

(ii) супремум в правой части (1.3) достигим для конечного μ ;

(iii) каждая пара (μ, u) , реализующая $\sup \inf$, такая, что

$$u \in U_0, \quad \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(u) = 0,$$

является седловой точкой задачи, т.е. решением задачи $\inf \sup$, а также решением задачи минимизации с ограничениями (1.1)–(1.2);

(iv) для каждого решения u задачи (1.1)–(1.2) существует такое конечное $\mu \geq 0$, что (u, μ) является решением задачи

$$\sup_{\mu \geq 0} \inf_{u \in U} \mathcal{L}(u, \mu),$$

при этом $\sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(u) = 0$;

(v) если $\inf_{u \in U_0} \Phi_0(u) > -\infty$, то множество всех минимизирующих последовательностей $\{u_j\}_{j=0}^{+\infty}$ задачи (1.1)–(1.2) совпадает с совокупностью всех минимизирующих последовательностей $\{u_j\}_{j=0}^{+\infty}$ задачи $\inf_{u \in U} \mathcal{L}(u, \mu)$ (где μ — любое такое, как в п. (ii)), для которых

$$u_j \in U_0, \quad \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(u_j) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow +\infty.$$

О п р е д е л е н и е ([12]–[17]). Говорим, что S -процедура неущербна для числа $\kappa \in \mathbf{R}$ в классе U для неравенства $\Phi_0(u) \geq \kappa$ с ограничениями (1.2), если следующие утверждения равносильны:

$$\Phi_0(u) \geq \kappa \quad (\forall u \in U_0) \iff \exists \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N: \mathcal{L}(u, \mu) \geq \kappa \quad (\forall u \in U).$$

Доказательство теоремы 1.1. По лемме 2 [14], для неравенства $\Phi_0(u) \geq \kappa$ с ограничениями (1.2) из условий а)–б) следует, что S -процедура неущербна для любого $\kappa \in \mathbf{R}$ в классе U . По теореме 0.1 [17], имеют место утверждения (i)–(v). Отсюда получаем теорему 1.1.

2. Постановка задачи оптимальной остановки с ограничениями. На полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\Omega = \{\omega\}$, рассмотрим n -мерный винеровский процесс $w(t)$ с независимыми компонентами, стандартным образом порождающий поток полных σ -алгебр событий $\mathcal{F}_t^w = \sigma[w(s), s \leq t]$, $t \geq 0$; полагаем $w(0) = 0$.

Рассмотрим стохастическое уравнение Ито

$$dy(t) = f(y(t), t) dt + \beta(y(t), t) dw(t), \quad (2.1)$$

$$y(0) = a. \quad (2.2)$$

Здесь $y(t)$ — вектор размерности n . Случайный вектор a не зависит от $w(t)$ — $w(s)$ для $t > s$, $E|a|^m < +\infty$, где $m \geq 2$.

Функции $f(x, t): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\beta(x, t): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ непрерывны, и

$$\begin{aligned} |f(x, t) - f(y, t)| + |\beta(y, t) - \beta(x, t)| &\leq K|x - y|, \\ |f(x, t)| + |\beta(x, t)| &\leq K(|x| + 1), \end{aligned}$$

где K — некоторая константа. Невырожденность диффузии не предполагается.

Обозначим $\mathcal{F}_t^y$ поток полных σ -алгебр событий $\mathcal{F}_t^y = \sigma[y(s), s \leq t]$, $t \geq 0$, стандартным образом порожденный процессом $y(t)$.

Фиксируем число $T > 0$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество, состоящее из всех марковских относительно $\mathcal{F}_t^y$ моментов τ , таких, что $0 \leq \tau \leq T$. Аналогично, обозначим через $\mathcal{N}$ множество, состоящее из всех марковских относительно $\mathcal{F}_t^w$ моментов τ , таких, что $0 \leq \tau \leq T$.

Рассмотрим непрерывные функции $g_i(x, t): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \dots, N$, такие, что $|g_i(x, t)| \leq K(|x|^m + 1)$.

Для $\tau \in \mathcal{M}$ и $\tau \in \mathcal{N}$ рассмотрим функционалы

$$\Phi_i(\tau) = E g_i(y(\tau), \tau), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Рассмотрим векторные отображения $\Phi(\tau): \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}^{N+1}$ или $\Phi(\tau): \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{R}^{N+1}$ вида $\Phi = \text{col}(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_N)$, где Φ_i заданы формулой (2.3).

Рассмотрим задачу оптимального выбора $\tau \in \mathcal{M}$ (или $\tau \in \mathcal{N}$):

$$\Phi_0(\tau) \rightarrow \min, \quad (2.4)$$

$$\Phi_1(\tau) \leq 0, \dots, \Phi_N(\tau) \leq 0. \quad (2.5)$$

Ниже обозначаем $\mu = \text{col}\{\mu_1, \dots, \mu_N\}$, $\mu_i \in \mathbf{R}$, неравенство $\mu \geq 0$ понимаем покомпонентно. Составим функцию Лагранжа

$$L(\tau, \mu) = \Phi_0(\tau) + \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(\tau). \quad (2.6)$$

3. Оптимальная остановка для случайного начального значения. Далее в этом пункте будем предполагать, что a — случайный вектор, у которого компонента a_1 имеет плотность распределения $\rho \in L_1(\mathbf{R})$.

Пусть $\mathcal{N}_0$ означает множество тех $\tau \in \mathcal{N}$, для которых выполнено (2.5).

Теорема 3.1. Множество $\Phi(\mathcal{N}_0)$ является всюду плотным подмножеством некоторого выпуклого множества в $\mathbf{R}^{N+1}$.

Теорема 3.2. Предположим, что существует такое $\hat{\tau} \in \mathfrak{N}$, что

$$\Phi_1(\hat{\tau}) < 0, \dots, \Phi_N(\hat{\tau}) < 0. \quad (3.1)$$

Тогда: (i) имеет место соотношение

$$\inf_{\tau \in \mathfrak{N}_0} \Phi_0(\tau) = \sup_{\mu \geq 0} \inf_{\tau \in \mathfrak{N}} L(\tau, \mu); \quad (3.2)$$

(ii) супремум в правой части (3.2) достижим для конечного μ ;

(iii) каждая пара (μ, τ) , реализующая $\sup \inf$, такая, что

$$\tau \in \mathfrak{N}_0, \quad \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(\tau) = 0,$$

является седловой точкой задачи, т.е. решением задачи $\inf \sup$, а также решением задачи с ограничениями (2.4)–(2.5) в классе $\tau \in \mathfrak{N}$;

(iv) для каждого решения τ задачи (2.4)–(2.5) существует конечное $\mu > 0$ такое, что (τ, μ) является решением задачи

$$\sup_{\mu \geq 0} \inf_{\tau \in \mathfrak{N}} L(\tau, \mu), \quad \text{при этом} \quad \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(\tau) = 0;$$

(v) справедливо заключение (v) теоремы 1.1 (с заменой $U, U_0, \mathcal{L}$ на $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_0, L$).

4. Задача с неслучайным начальным значением. Полагаем, что начальное значение $a \in \mathbb{R}^n$ в (2.2) — неслучайное. Рассмотрим задачу (2.4)–(2.5) в классе $\tau \in \mathfrak{M}$.

Теорема 4.1. Множество $\Phi(\mathfrak{M})$ является всюду плотным подмножеством некоторого выпуклого множества в $\mathbb{R}^{N+1}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_0$ множество $\tau \in \mathfrak{M}$, для которых выполнено (2.5).

Теорема 4.2. Пусть существует такое $\hat{\tau} \in \mathfrak{M}$, что выполнено (3.1). Тогда

(i) имеет место соотношение

$$\inf_{\tau \in \mathfrak{M}} \Phi_0(\tau) = \sup_{\mu \geq 0} \inf_{\tau \in \mathfrak{M}} L(\tau, \mu); \quad (4.1)$$

(ii) супремум в правой части (4.1) достижим для конечного μ ;

(iii) каждая пара (μ, τ) , реализующая $\sup \inf$, такая, что

$$\tau \in \mathfrak{M}_0, \quad \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(\tau) = 0,$$

является седловой точкой задачи, т.е. решением задачи $\inf \sup$, а также решением задачи с ограничениями (2.4)–(2.5) в классе $\tau \in \mathfrak{M}$;

(iv) для каждого решения τ задачи (2.4)–(2.5) существует конечное $\mu \geq 0$ такое, что (τ, μ) является решением задачи

$$\sup_{\mu \geq 0} \inf_{\tau \in \mathfrak{M}} L(\tau, \mu), \quad \text{при этом} \quad \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(\tau) = 0;$$

(v) справедливо заключение (v) теоремы 1.1 (с заменой $U, U_0, \mathcal{L}$ на $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_0, L$).

5. Вспомогательная лемма. Пусть $\bar{\mathcal{B}}_n$ означает σ -алгебру лебеговых множеств в $\mathbb{R}^n$, λ_n — меру Лебега.

Лемма 5.1. Пусть $\tilde{N} > 0$ — целое число. Для произвольной $\tilde{N}$ -мерной функции $z(x) \in L^1(\mathbf{R}^n, \bar{B}_n, \mathbf{R}^{\tilde{N}})$ и произвольного числа $\delta > 0$ существует такая область $D_1 \subseteq \mathbf{R}^n$, что

$$\left| \int_{D_1} z(x) dx - \int_{\mathbf{R}^n \setminus D_1} z(x) dx \right| \leq \delta.$$

Доказательство леммы 5.1. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^n$ систему $\mathfrak{R}(k)$ гиперкубов $R(j, k) \in \mathfrak{R}(k)$ вида $R(j, k) = \{x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n: j_m < x_m < j_m + 2^k (\forall m)\}$, имеющих ребра длиной 2^k ; здесь $k \in \mathbf{Z}$ — целое число, j — нумерующий индекс, $j = \text{col}(j_1, \dots, j_n)$, $j_m = 2^k N_m$, $N_m \in \mathbf{Z} (\forall m)$. Рассмотрим также в пространстве $\mathbf{R}^n$ систему $\mathfrak{B}(k)$ гиперкубов $B(y, k)$ вида $B(y, k) = \{x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n: y_m < x_m < y_m + 2^k (\forall m)\}$, имеющих ребра длиной 2^k ; здесь k — целое число, y — нумерующий индекс, $y = \text{col}(y_1, \dots, y_n)$, $y_m \in \mathbf{R}$.

Пусть $D \subseteq \mathbf{R}^n$ — ограниченная замкнутая область, такая, что

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus D} z_i(x) dx \leq \frac{\delta}{4}, \quad i = 1, 2,$$

и D разбивается на целое и конечное число гиперкубов типа $R(j, k)$. Обозначим замыкание D через $\text{cl}(D)$.

По теореме Лузина, для любого числа $\nu > 0$ существует открытое множество $B \subseteq D$ такое, что функция $(z_1(x), z_2(x))$ непрерывна на $D \setminus B$ с модулем непрерывности $\tilde{\mu}(\cdot)$ и $\text{mes} B < \nu$. Имеем $B = \cup B_\alpha$, где $B_\alpha \in \mathfrak{B}(k)$ для некоторого $k = k(\alpha)$, α — некоторые индексы. Для каждого $B_\alpha \in \mathfrak{B}(k)$ существует такое $R_\alpha \in \mathfrak{R}(k+1)$, что $B_\alpha \subseteq R_\alpha$. Обозначим $B_R = \cup R_\alpha$, при этом считаем, что в этом объединении присутствуют только попарно непересекающиеся гиперкубы (их число, таким образом, мы уменьшили, удалив лишние индексы α). Имеем $\text{mes}(B_R) \leq 2^n \text{mes}(D)$. Полагаем, что B, B_R выбраны такими, что выполнено

$$\int_{B_R} z_i(x) dx \leq \frac{\delta}{4}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть γ — такое число, что $\tilde{\mu}(2^{\gamma-1}) \text{mes}(D) < \delta/4$. Рассмотрим представление $D = \cup \text{cl}(R(j, k))$, где $R(j, k) \in \mathfrak{R}(k)$, целые числа $k < \gamma$. При этом считаем, что в этом объединении присутствуют только попарно непересекающиеся гиперкубы и обязательно присутствуют все гиперкубы из представления $B_R = \cup R_\alpha$. Пусть $\Gamma_1 = \{(j, k)\}$ — множество тех индексов, которые нумеруют гиперкубы $\text{cl}(R(j, k))$, присутствующие в объединении $D = \cup \text{cl}(R(j, k))$ и не присутствующие в объединении $B_R = \cup R_\alpha$. Через Γ обозначим множество индексов (j, k) , нумерующих гиперкубы, полученные в результате деления гиперкубов $R(j, k) \in \mathfrak{R}(k)$ с индексами из Γ_1 на 2^n гиперкубов из $\mathfrak{R}(k+1)$.

Введем множества $D_1 \subseteq D$, $D_2 \subseteq D$ следующего вида: $x \in D_1$ (или $x \in D_2$), если существует такое $(j, k) \in \Gamma$, что $x \in \text{cl}(R(j, k))$ и при этом $2^{-k}(j_1 + \dots + j_n)$ — четное число (или, соответственно, нечетное число); здесь $j = \text{col}(j_1, \dots, j_n)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} z(x) dx &= \int_{D_1} z(x) dx + \int_{D_2} z(x) dx + \int_{B_R} z(x) dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus D} z(x) dx \\ &= \int_{D_1} z(x) dx + \int_{D_1} z(x + \xi(x)) dx + \int_{B_R} z(x) dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus D} z(x) dx, \end{aligned}$$

где $\xi(x)$ — измеримая функция, $|\xi(x)| \leq 2^{\gamma-1}$. Значит,

$$\int_{\mathbf{R}^n} z(x) dx = \int_{D_1} z(x) dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus D_1} z(x) dx = 2 \int_{D_1} z(x) dx + J_0 + J_1,$$

где

$$J_0 = \int_{D_1} \left\{ z(x + \xi(x)) - z(x) \right\} dx, \quad J_1 = \int_{B_R} z(x) dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus D} z(x) dx.$$

Справедливы оценки $|J_0| \leq \bar{\mu}(2^{\gamma-1}) \text{mes}(D) \leq \delta/4$, $|J_1| \leq 2\delta/4$. Лемма доказана.

6. Доказательство теорем 3.1 и 4.1.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $\tau_1 \in \mathfrak{N}$, $\tau_2 \in \mathfrak{N}$ — произвольные, $\delta > 0$ — заданное число. Достаточно показать, что существует такое $\tau \in \mathfrak{N}$, что

$$|2\Phi(\tau) - \Phi(\tau_1) - \Phi(\tau_2)| \leq \delta. \quad (6.1)$$

Пусть $z_i(x) = \mathbf{E}\{g(y(\tau_i), \tau_i) | a_1 = x\} \rho(x)$, где $g = \text{col}(g_0, g_1, \dots, g_N)$, $\rho(x)$ — плотность распределения величины a_1 . По сделанным предположениям, $z_i \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Имеем:

$$\Phi(\tau_i) = \int_{\mathbf{R}} z_i(x) dx. \quad (6.2)$$

Рассмотрим $(2N+2)$ -мерную функцию $z(x) = [z_1(x), z_2(x)]$. По доказанной выше лемме, существует такое множество $D_1 \in \mathbf{R}$, что

$$\left| 2 \int_{D_1} z_1(x) dx - \int_{\mathbf{R}} z_1(x) dx \right| \leq 0.5 \delta, \quad (6.3)$$

$$\left| 2 \int_{\mathbf{R} \setminus D_1} z_2(x) dx - \int_{\mathbf{R}} z_2(x) dx \right| \leq 0.5 \delta. \quad (6.4)$$

Положим $\tau = \tau_1 \text{Ind}(a_1 \in D_1) + \tau_2 \text{Ind}(a_1 \notin D_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\{g(y(\tau), \tau) | a_1 = x\} \rho(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\{g(y(\tau), \tau) \text{Ind}(a_1 \in D_1) | a_1 = x\} \rho(x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\{g(y(\tau), \tau) \text{Ind}(a_1 \notin D_1) | a_1 = x\} \rho(x) dx \\ &= \int_{D_1} z_1(x) dx + \int_{\mathbf{R} \setminus D_1} z_2(x) dx. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из (6.2)–(6.5) получаем (6.1).

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $\tilde{\tau}_1 \in \mathfrak{M}$, $\tilde{\tau}_2 \in \mathfrak{M}$ — произвольные. Очевидно, $\Phi(\tilde{\tau}_i \vee \varepsilon) \rightarrow \Phi(\tilde{\tau}_i)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Достаточно показать, что для любых чисел $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и моментов $\tau_i = \tilde{\tau}_i \vee \varepsilon$ существует такой момент $\tau = \tau \vee \varepsilon \in \mathfrak{M}$, что

$$|2\Phi(\tau) - \Phi(\tau_1) - \Phi(\tau_2)| \leq \delta. \quad (6.6)$$

Введем величину $\xi = w_1(\varepsilon)$, где $w_1(t)$ — первая компонента процесса $w(t) = [w_1(t), \dots, w_n(t)]$. Пусть

$$z_i(x) = \mathbf{E}\{g(y(\tau_i), \tau_i) | \xi = x\} \pi(x),$$

где $g = \text{col}(g_0, g_1, \dots, g_N)$, $\pi(x)$ — плотность распределения величины ξ . По сделанным предположениям, $z_i \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Имеем:

$$\Phi(\tau_i) = \int_{\mathbf{R}} z_i(x) dx. \quad (6.7)$$

Рассмотрим $(2N+2)$ -мерную функцию $z(x) = [z_1(x), z_2(x)]$. По доказанной выше лемме, существует такое множество $D_1 \in \mathbf{R}$, что выполнено (6.3)–(6.4). Положим $\tau = \tau_1 \text{Ind}(\xi \in D_1) + \tau_2 \text{Ind}(\xi \notin D_1)$. Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\{g(y(\tau), \tau) \mid \xi = x\} \pi(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\{g(y(\tau), \tau) \text{Ind}(\xi \in D_1) \mid \xi = x\} \pi(x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\{g(y(\tau), \tau) \text{Ind}(\xi \notin D_1) \mid \xi = x\} \pi(x) dx \\ &= \int_{D_1} z_1(x) dx + \int_{\mathbf{R} \setminus D_1} z_2(x) dx. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из (6.7), (6.3), (6.4), (6.8) получаем (6.6).

Доказательство теорем 3.2, 4.2 очевидным образом следует из теоремы 1.1 и теорем 3.1, 4.1 соответственно.

В заключение отметим, что аналогичные теоремам 3.1–3.2, 4.1–4.2 результаты можно получить для процессов с дискретным временем.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания, учтенные во время переработки статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967, 231 с.
2. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.
3. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977, 399 с.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 384 с.
5. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. — Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1965, т. 5, № 3, с. 395–453.
6. Аркин В. И., Саксонов М. Т. Необходимые условия оптимальности в задачах управления стохастическими дифференциальными уравнениями. — Докл. АН СССР, 1979, т. 244, № 1, с. 11–15.
7. Saksonov M. T. On the stochastic maximum principle for time optimal problem. — In: Stoch. Optimization Intern. Conf., Kiev, 1984, p. 207–209.
8. Докучаев Н. Г. Об условиях трансверсальности для стохастического принципа максимума. — Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, № 7, с. 1266–1269.
9. Докучаев Н. Г. Разрешимость уравнений, являющихся аналогами уравнений Беллмана в задаче управления диффузионными процессами с интегральными ограничениями и с неполной обратной связью. — Дифференц. уравнения, 1991, т. 27, № 3, с. 403–414.
10. Докучаев Н. Г. Нестационарные задачи управления для диффузионных процессов на бесконечном интервале времени. — Вестн. С.-Петербургского ун-та, сер. I, 1994, № 1, с. 15–22.
11. Докучаев Н. Г. Существование оптимальных управлений и необходимые условия оптимальности для частично наблюдаемых диффузионных процессов. — Дифференц. уравнения, 1994, т. 30, № 9, с. 1498–1507.
12. Якубович В. А. S-процедура в нелинейной теории регулирования. — Вестн. Ленинградского ун-та, 1971, № 1, с. 62–77.

13. Фрадков А. Л., Якубович В. А. *S*-процедура и соотношение двойственности в невыпуклых задачах математического программирования. — Вестн. Ленинградского ун-та, 1973, т. 27, № 1, с. 71–76.
14. Якубович В. А. Об одном методе решения задач глобальной минимизации. — Вестн. С.-Петербургского ун-та, сер. I, 1992, № 2, с. 58–68.
15. Yakubovich V. A. Nonconvex optimization problem: the infinite-horizon linear quadratic control problem with quadratic constraints. — Systems Control Lett., 1992, v. 16, № 6, p. 13–22.
16. Докучаев Н. Г., Якубович В. А. Стохастическая линейно-квадратическая задача оптимального управления для стационарных систем с квадратичными ограничениями. — Техн. кибернет., 1992, № 6, с. 135–145.
17. Матвеев А. С., Якубович В. А. Невыпуклые задачи глобальной оптимизации. — Алгебра и анализ, 1992, т. 4, № 6, с. 189–219.
18. Докучаев Н. Г. *S*-процедура для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с стохастически распределенным начальным значением. — Вестн. С.-Петербургского ун-та, сер. I, 1994, № 3, с. 117–120.
19. Borkar S. V., Ghosh M. K. Controlled diffusions with constraints. — J. Math. Anal. Appl., 1990, v. 152, № 1, p. 88–108.
20. Фрид Е. Б. Об оптимальных стратегиях в задачах управления с ограничением. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, в. 1, с. 194–199.
21. Кудрявцев Д. И. Управление марковскими процессами в задаче с ограничениями. — Укр. матем. журн., 1989, т. 41, № 9, с. 1226–1230.
22. Пиуновский А. Б. Управление случайными последовательностями в задачах с ограничениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 4, с. 891–903.

Поступила в редакцию
12.VII.1994

© 1996 г.

КРАМКОВ Д. О.*

О ЗАМЫКАНИИ СЕМЕЙСТВА МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР И ОПЦИОНАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ СУПЕРМАРТИНГАЛОВ¹⁾

Описана структура замыкания семейства мартингальных мер в топологии пространства L_1 . Полученный результат использован для нового доказательства теоремы об опциональном разложении супермартингалов.

Ключевые слова и фразы: мартингальная мера, опциональное разложение супермартингалов, семимартингал, сходимость по Фату.

1. Введение и формулировка основного результата. Пусть X — локальный мартингал со значениями в $\mathbb{R}^d$, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}$,

*Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01929.