Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Крамков, О замыкании семейства мартингальных мер и опциональном разложении супермартингалов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 892–896

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:36:52

13. Фрадков А. Л., Якубович В. А. *S*-процедура и соотношение двойственности в невыпуклых задачах математического программирования. — Вестн. Ленинградского ун-та, 1973, т. 27, № 1, с. 71–76.
14. Якубович В. А. Об одном методе решения задач глобальной минимизации. — Вестн. С.-Петербургского ун-та, сер. I, 1992, № 2, с. 58–68.
15. Yakubovich V. A. Nonconvex optimization problem: the infinite-horizon linear quadratic control problem with quadratic constraints. — Systems Control Lett., 1992, v. 16, № 6, p. 13–22.
16. Докучаев Н. Г., Якубович В. А. Стохастическая линейно-квадратическая задача оптимального управления для стационарных систем с квадратичными ограничениями. — Техн. кибернет., 1992, № 6, с. 135–145.
17. Матвеев А. С., Якубович В. А. Невыпуклые задачи глобальной оптимизации. — Алгебра и анализ, 1992, т. 4, № 6, с. 189–219.
18. Докучаев Н. Г. *S*-процедура для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с стохастически распределенным начальным значением. — Вестн. С.-Петербургского ун-та, сер. I, 1994, № 3, с. 117–120.
19. Borkar S. V., Ghosh M. K. Controlled diffusions with constraints. — J. Math. Anal. Appl., 1990, v. 152, № 1, p. 88–108.
20. Фрид Е. Б. Об оптимальных стратегиях в задачах управления с ограничением. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, в. 1, с. 194–199.
21. Кудрявцев Д. И. Управление марковскими процессами в задаче с ограничениями. — Укр. матем. журн., 1989, т. 41, № 9, с. 1226–1230.
22. Пиуновский А. Б. Управление случайными последовательностями в задачах с ограничениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 4, с. 891–903.

Поступила в редакцию
12.VII.1994

© 1996 г.

КРАМКОВ Д. О.*

О ЗАМКНИИ СЕМЕЙСТВА МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР И ОПЦИОНАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ СУПЕРМАРТИНГАЛОВ¹⁾

Описана структура замыкания семейства мартингальных мер в топологии пространства L_1 . Полученный результат использован для нового доказательства теоремы об опциональном разложении супермартингалов.

Ключевые слова и фразы: мартингальная мера, опциональное разложение супермартингалов, семимартингал, сходимость по Фату.

1. Введение и формулировка основного результата. Пусть X — локальный мартингал со значениями в $\mathbb{R}^d$, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}$,

*Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01929.

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P$). Вероятностную меру $Q \sim P$ назовем эквивалентной¹⁾ локальной мартингаловой мерой (процесса X), если X является локальным мартингалом относительно Q . Семейство всех эквивалентных мартингалов мер обозначим $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, P)$. Определим также семейство мер $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^0(X, P)$:

$$\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^0(X, P) = \left\{ Q \in \mathcal{M} : \max \left(\left\| \frac{dQ}{dP} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{dP}{dQ} \right\|_{\infty} \right) < +\infty \right\}.$$

Иными словами, $\mathcal{M}^0$ есть подмножество $\mathcal{M}$, состоящее из таких мер $Q \in \mathcal{M}$, что нормы пространств $L^1(Q)$ и $L^1(P)$ эквивалентны. Для произвольного семейства семимартингалов $\mathcal{S}$ обозначим $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ (соответственно, $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$) семейство вероятностных мер $Q \sim P$ (соответственно, $Q \ll P$) таких, что все $S \in \mathcal{S}$ являются локальными супермартингалами относительно Q .

Введем теперь в рассмотрение семейство $\mathcal{S}^*$ локально ограниченных снизу семимартингалов $\mathcal{S}$, являющихся стохастическими интегралами по X :

$$\mathcal{S}^* = \left\{ S = \int H dX : \int H dX \text{ локально ограничен снизу} \right\}.$$

Отметим, что всякий $S \in \mathcal{S}^*$ является локальным мартингалом относительно $Q \in \mathcal{M}$, см. [6] и [1]. Тем самым

$$\mathcal{M}^0 \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathcal{S}^*) \subset \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{S}^*).$$

Отметим также, что если процесс X локально ограничен, то $\mathcal{P}(\mathcal{S}^*)$ (соответственно, $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{S}^*)$) совпадает с семейством всех эквивалентных (соответственно, абсолютно непрерывных) локальных мартингалов мер.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1.1. Семейство мер $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{S}^*)$ является замыканием семейств $\mathcal{M}^0$ и $\mathcal{M}$ в топологии пространства $L^1(P)$.

З а м е ч а н и е 1.1. Поскольку семейства $\mathcal{M}^0$ и $\mathcal{M}$ являются выпуклыми, их замыкания в сильной и слабой топологии совпадают.

Теорема 1.1 уточняет теорему 2.1 в [6]. В п. 3 с ее помощью будет получено новое доказательство теоремы об опциональном разложении супермартингалов без условия локальной ограниченности на процесс X . Отметим, что семейство мартингалов мер играет исключительно важную роль в финансовой математике, см., например, [2].

2. Доказательство теоремы 1.1. Ключевую роль при доказательстве теоремы 1.1 играет один факт относительно сходимости по Фату для последовательности случайных процессов. Прежде всего, дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2.1. Пусть T — плотное подмножество $\mathbf{R}_+$. Последовательность случайных процессов $(X^n)_{n \geq 1}$ сходится по Фату к процессу X на множестве T , если она равномерно ограничена снизу и

$$X_t = \limsup_{s \downarrow t} \limsup_{n \rightarrow \infty} X_s^n = \liminf_{s \downarrow t} \liminf_{n \rightarrow \infty} X_s^n$$

почти наверное при всех $t \geq 0$.

Следуя [5], семейство семимартингалов $\mathcal{S}$ назовем *предсказуемо выпуклым*, если наряду с любыми S^1 и S^2 оно содержит и стохастический интеграл $\int (\alpha dS^1 + (1 - \alpha) dS^2)$ для произвольного предсказуемого $0 \leq \alpha \leq 1$.

¹⁾Если Q и R — две вероятностные меры, заданные на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, то запись $Q \ll R$ обозначает, что Q абсолютно непрерывна относительно R : $(\forall A \in \mathcal{F}) R(A) = 0 \implies Q(A) = 0$. Меры Q и R называются эквивалентными (обозначение $Q \sim R$), если $(\forall A \in \mathcal{F}) R(A) = 0 \iff Q(A) = 0$.

Пусть теперь $\mathcal{S}$ — предсказуемо выпуклое семейство локально ограниченных снизу семимартингалов, которое является конусом и содержит все невозрастающие локально ограниченные процессы (в частности, процесс $S \equiv 0$). Следующее утверждение является частным случаем предложения 5.2 в [5].

Предложение 2.1. *Предположим, что $\mathcal{P}(S) \neq 0$ и множество $\mathcal{S}$ замкнуто относительно сходимости Фату для некоторого всюду плотного множества T . Тогда локально ограниченный снизу процесс V принадлежит $\mathcal{S}$, если и только если для всех $Q \in \mathcal{P}(S)$ процесс V является локальным супермартингалом относительно меры Q .*

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Нетрудно проверить, что множество $\widehat{\mathcal{P}}(S^*)$ замкнуто в L^1 . Тем самым достаточно показать, что замыкание $\mathcal{M}^0$ в L^1 содержит $\widehat{\mathcal{P}}(S^*)$. Поскольку множества $\mathcal{M}^0$ и $\widehat{\mathcal{P}}(S^*)$ выпуклы и $\mathcal{M}^0 \subset \widehat{\mathcal{P}}(S^*)$, в силу теоремы Хана–Банаха это имеет место, если

$$\sup_{Q \in \mathcal{M}^0} E_Q h = \sup_{Q \in \widehat{\mathcal{P}}(S^*)} E_Q h \quad (1)$$

для любой ограниченной случайной величины h . Для доказательства (1) определим процесс

$$h_t = \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{M}^0} E_Q[h \mid \mathcal{F}_t].$$

Процесс $(h_t)_{t \geq 0}$ является супермартингалом относительно всех $Q \in \mathcal{M}^0$. Доказательство данного факта дословно повторяет доказательство предложения 4.3 в [7] и здесь опускается. Тогда (1) имеет место, если h — супермартингал относительно всех $Q \in \mathcal{P}(S^*)$.

Введем в рассмотрение семейство $\mathcal{R}$ семимартингалов R следующего вида: $R = a(Z - 1) - C$, где Z — процесс плотности элемента $\mathcal{M}^0$, $a \in \mathbf{R}$ и C — локально ограниченный возрастающий процесс. Обозначим $\overline{\mathcal{R}}$ наименьшее множество семимартингалов, которое предсказуемо выпукло, замкнуто относительно сходимости Фату на множестве рациональных чисел и содержит $\mathcal{R}$. В силу леммы Фату процесс Rh является локальным супермартингалом для любых $R \in \overline{\mathcal{R}}$. Таким образом, нам достаточно доказать справедливость вложения

$$\mathcal{P}(S^*) \subset \overline{\mathcal{R}}. \quad (2)$$

Для доказательства (2) воспользуемся предложением 2.1. Зафиксируем меру $Q \in \mathcal{P}(\overline{\mathcal{R}})$ и обозначим Z^Q ее процесс плотности относительно меры P . Поскольку $\overline{\mathcal{R}}$ содержит линейное пространство, порождаемое процессами плотности элементов $\mathcal{M}^0$, Q является мартингальной мерой для процессов плотности элементов $\mathcal{M}^0$, или, что равносильно, Z^Q — мартингал относительно всех мер из $\mathcal{M}^0$. Но тогда по теореме Яска [6] Z^Q есть стохастический интеграл относительно X : $Z^Q = 1 + \int H dX$, и, следовательно, является супермартингалом относительно всех мер из $\mathcal{P}(S^*)$. В силу произвольности $Q \in \mathcal{P}(\overline{\mathcal{R}})$, это влечет за собой выполнение условий предложения 2.1 для любого элемента множества $\mathcal{P}(S^*)$ и, следовательно, (2). Теорема доказана.

3. Опциональное разложение супермартингалов. Целью данного раздела является доказательство следующего результата.

Теорема 3.1 (опциональное разложение супермартингала). *Пусть V — неотрицательный супермартингал относительно всех $Q \in \mathcal{M}^0(X; P)$. Тогда найдутся возрастающий согласованный процесс C и предсказуемый X -интегрируемый процесс H такие, что*

$$V = V_0 + \int H dX - C. \quad (3)$$

Стохастический интеграл $\int H dX$ в (3) является локальным мартингалом относительно всех $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^0$. Тем самым (3) есть представление супермартингала V в виде разности между локальным мартингалом и возрастающим процессом, выполненное одновременно при всех $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^0$. В частном случае, когда семейство $\mathcal{M}^0$ состоит из единственного элемента, оно сводится к классическому результату Дуба–Мейера. Отметим, однако, что, в отличие от последнего, разложение (3), вообще говоря, не существует при дополнительном требовании о том, чтобы процесс S являлся предсказуемым. По этой причине его называют *опциональным* разложением супермартингала V .

Представления типа (3) играют важную роль в задачах финансовой математики, см. [3], [7], [8], [5]. Впервые они были получены в [3] для процесса X диффузионного типа и для конкретного вида процесса V . В том случае, когда X — произвольный локально ограниченный семимартингал, теорема 3.1 была доказана в [7]. Наконец, в общем случае она была доказана в [4]. Укажем также на работу [5], где рассматривалась возможность представления семимартингала V в виде (3) при наличии ограничений на интегрируемый процесс H . Отметим, что в указанных работах требовалось, чтобы V являлся супермартингалом относительно всех мер из семейства $\mathcal{M}(X, \mathbf{P})$, хотя и не предполагалось, что X является локальным мартингалом относительно «базовой» меры $\mathbf{P}$.

Доказательство в [4] использует теорему Гирсанова и теорему об измеримом выборе. Ниже мы приведем другое доказательство теоремы об опциональном разложении, используя теорему 1.1 и некоторые результаты работы [5] относительно Фату сходимости.

Доказательство. Введем в рассмотрение семейство $\mathcal{S}$ локально ограниченных снизу семимартингалов S вида

$$S = \int H dX - C,$$

где C — возрастающий процесс. В силу предложения 2.1 разложение (3) имеет место, если

- 1) V — супермартингал относительно всех $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$,
- 2) семейство $\mathcal{S}$ замкнуто относительно сходимости Фату.

В силу теоремы 1.1 и леммы Фату процесс S является супермартингалом относительно всех $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^*)$. Теперь 1) следует из того факта, что $\mathcal{P}(\mathcal{S}^*) = \mathcal{P}(\mathcal{S})$. Пункт 2) доказан в [5], см. предложение 6.1 и замечание после предположения 3.1.

Автор благодарен Ю. М. Кабанову за многочисленные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ansel J. P., Stricker C. Couverture des actifs contingents. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1994, v. 30, № 2, p. 303–315.
2. Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. — Math. Ann., 1994, v. 300, p. 463–520.
3. El Karoui N., Quenez M. C. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. — SIAM J. Control Optim., 1995, v. 33, № 1, p. 29–66.
4. Föllmer H., Kabanov Yu. M. Optional decompositions and Lagrange multipliers. — Preprint, 1996.
5. Föllmer H., Kramkov D. O. Optional decompositions under constraints. — Preprint, 1996.
6. Jacka S. D. A martingale representation result and an application to incomplete financial markets. — Math. Finance, 1992, v. 2, № 4, p. 239–250.

7. Kramkov D. O. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. — Probab. Theory Relat. Fields, 1996, v. 105, p. 459–479.
8. Kabanov Yu. M., Kramkov D. O. Asymptotic arbitrage in large financial markets. — Finance and Stochastics (to appear).

Поступила в редакцию
18.VII.1996

© 1996 г.

СТЕПАНОВ А. В.*

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$. Фиксируем произвольную точку a на носителе вероятностной меры. Будем рассматривать последовательности случайных величин, состоящие из тех величин X_i , которые в той или иной степени стремятся к точке a . Кроме того, будем изучать индексы этих случайных величин. По подходам и методам решений данная проблематика напоминает теорию рекордов.

Ключевые слова и фразы: рекордные моменты и величины, экстремальные порядковые статистики, последовательности случайных величин, приближающиеся к заданной точке.

1. Введение. Пусть здесь и везде далее $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины (с.в.) с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть интервал (γ, β) — носитель вероятностной меры, где γ может быть равным $-\infty$, а β может принимать значение $+\infty$. Рассмотрим с.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$ в неубывающем порядке: $\gamma < X_{1,n} < X_{2,n} < \dots < X_{n,n} < \beta$. Величины $X_{r,n}$ ($r \leq n$) называют порядковыми статистиками. «Согнем» интервал (γ, β) в окружность, соединив точки γ и β . При такой постановке вопроса большей является та случайная величина, которая находится далее при обходе окружности вдоль часовой стрелки с началом обхода в точке γ и концом обхода в точке β . Выберем теперь на окружности некоторую точку a и зафиксируем ее. Начало обхода сдвинем в эту точку, а направление обхода сохраним. В этом случае вместо γ мы имеем $a + 0$, а вместо β необходимо брать $a - 0$. Отношение порядка среди с.в. X_i изменится. Так, например, если с.в. располагались следующим образом:

$$\gamma < X_{1,n} < X_{2,n} < \dots < X_{n-2,n} < a < X_{n-1,n} < X_{n,n} < \beta,$$

и если $\tilde{X}_{r,n}$ — новые порядковые статистики, т.е.

$$X_{n-1,n} = \tilde{X}_{1,n}, \quad X_{n,n} = \tilde{X}_{2,n}, \quad X_{1,n} = \tilde{X}_{3,n}, \quad X_{n-2,n} = \tilde{X}_{n,n},$$

то $a + 0 < \tilde{X}_{1,n} < \tilde{X}_{2,n} < \beta = \gamma < \tilde{X}_{3,n} < \dots < \tilde{X}_{n,n} < a - 0$. Здесь знаком $<$ обозначаем новое отношение порядка (см. также рис. 1).

Рассмотрим построенные определенным образом и связанные с экстремальными порядковыми статистиками последовательности с.в.: последовательности величин односторонних последовательных приближений («о.п.п.») $V_{(n)}^a$, моментов «о.п.п.»

*Калининградский государственный технический университет, Советский проспект, 1, 236000 Калининград, Россия.