Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Степанов, Экстремальные порядковые статистики при изменении отношения порядка, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 896–900

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 08:45:26

7. Kramkov D. O. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. — Probab. Theory Relat. Fields, 1996, v. 105, p. 459–479.
8. Kabanov Yu. M., Kramkov D. O. Asymptotic arbitrage in large financial markets. — Finance and Stochastics (to appear).

Поступила в редакцию
18.VII.1996

© 1996 г.

СТЕПАНОВ А. В.*

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$. Фиксируем произвольную точку a на носителе вероятностной меры. Будем рассматривать последовательности случайных величин, состоящие из тех величин X_i , которые в той или иной степени стремятся к точке a . Кроме того, будем изучать индексы этих случайных величин. По подходам и методам решений данная проблематика напоминает теорию рекордов.

Ключевые слова и фразы: рекордные моменты и величины, экстремальные порядковые статистики, последовательности случайных величин, приближающиеся к заданной точке.

1. Введение. Пусть здесь и везде далее $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины (с.в.) с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть интервал (γ, β) — носитель вероятностной меры, где γ может быть равным $-\infty$, а β может принимать значение $+\infty$. Рассмотрим с.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$ в неубывающем порядке: $\gamma < X_{1,n} < X_{2,n} < \dots < X_{n,n} < \beta$. Величины $X_{r,n}$ ($r \leq n$) называют порядковыми статистиками. «Согнем» интервал (γ, β) в окружность, соединив точки γ и β . При такой постановке вопроса большей является та случайная величина, которая находится далее при обходе окружности вдоль часовой стрелки с началом обхода в точке γ и концом обхода в точке β . Выберем теперь на окружности некоторую точку a и зафиксируем ее. Начало обхода сдвинем в эту точку, а направление обхода сохраним. В этом случае вместо γ мы имеем $a + 0$, а вместо β необходимо брать $a - 0$. Отношение порядка среди с.в. X_i изменится. Так, например, если с.в. располагались следующим образом:

$$\gamma < X_{1,n} < X_{2,n} < \dots < X_{n-2,n} < a < X_{n-1,n} < X_{n,n} < \beta,$$

и если $\tilde{X}_{r,n}$ — новые порядковые статистики, т.е.

$$X_{n-1,n} = \tilde{X}_{1,n}, \quad X_{n,n} = \tilde{X}_{2,n}, \quad X_{1,n} = \tilde{X}_{3,n}, \quad X_{n-2,n} = \tilde{X}_{n,n},$$

то $a + 0 < \tilde{X}_{1,n} < \tilde{X}_{2,n} < \beta = \gamma < \tilde{X}_{3,n} < \dots < \tilde{X}_{n,n} < a - 0$. Здесь знаком $<$ обозначаем новое отношение порядка (см. также рис. 1).

Рассмотрим построенные определенным образом и связанные с экстремальными порядковыми статистиками последовательности с.в.: последовательности величин односторонних последовательных приближений («о.п.п.») $V_{(n)}^a$, моментов «о.п.п.»

*Калининградский государственный технический университет, Советский проспект, 1, 236000 Калининград, Россия.

$T^a(n)$, а также последовательности a -круговых рекордных величин $X_{(n)}^a$ и a -круговых рекордных моментов $L^a(n)$ (данные понятия предлагаются нами впервые). Пусть

$$\begin{aligned} T^a(0) &= 0, \quad X_0 = V_{(0)}^a = \gamma, \\ T^a(n+1) &= \min \left\{ j: j > T^a(n), X_j \succ X_{T^a(n)} \right\}, \\ V_{(n)}^a &= X_{T^a(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Рис. 1

Последовательность с.в. $V_{(n)}^a$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — это те из величин X_i , которые попадают в интервал (γ, a) и последовательно приближаются к точке a по часовой стрелке. Моменты $T^a(n)$ — индексы этих с.в. Подобные с.в. могут появляться в теории рекордов, в задачах, связанных с прочностью материала; автору приходилось сталкиваться с ними в некоторых прикладных задачах теории управления. Отметим, что последовательности $T^a(n)$ и $V_{(n)}^a$ существуют с вероятностью 1 и при $a \rightarrow \beta$ превращаются в последовательности рекордных моментов и величин соответственно. Далее, пусть

$$\begin{aligned} L^a(1) &= 1, \\ L^a(n+1) &= \min \left\{ j: j > L^a(n), X_j \succ X_{L^a(n)} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots), \\ X_{(n)}^a &= X_{L^a(n)}. \end{aligned}$$

Фактически величины $L^a(n)$ и $X_{(n)}^a$ являются рекордными моментами и величинами, при условии, что вместо отношения порядка $<$ берется отношение $\prec$, т.е. вместо β выступает $a-0$. Отметим, что последовательности этих величин также реализуются с вероятностью 1 и при $a \rightarrow \beta$ величины превращаются в обычные рекорды.

Следующий пункт будет посвящен a -круговым рекордам. Мы увидим, что свойства a -круговых рекордных моментов полностью совпадают со свойствами рекордных моментов, однако поведение a -круговых рекордных величин отличается от поведения рекордных величин.

2. a -круговые рекордные моменты и величины. Приведем здесь подход к исследованию a -круговых рекордов, синтезирующей в себе как подходы автора работы, так и методы, предложенные рецензентом статьи.

«Склейку» прямой в окружность можно рассматривать как формальное «подклеивание» интервала (a, β) перед интервалом $[\gamma, a]$. Если же $-\infty < \gamma < \beta < \infty$, то

можно рассмотреть с.в. Y_i :

$$Y_i = \begin{cases} X_i, & X_i \in [\gamma, a], \\ X_i + \gamma - \beta, & X_i \notin [\gamma, a]. \end{cases}$$

Тогда a -круговые рекордные величины для X -ов можно выразить через классические рекордные величины для Y -ов:

$$X_{(n)}^a = \begin{cases} Y_{(n)}, & Y_{(n)} \in [\gamma, a], \\ Y_{(n)} + \beta - \gamma, & Y_{(n)} \notin [\gamma, a]. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующие результаты:

1) $L^a(n) = L(n)$;

2) распределения самих a -круговых рекордных величин имеют вид

$$P\{a < X_{(n)}^a < x\} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(1+F(a)-F(x))} \nu^{n-1} e^{-\nu} d\nu \quad (a < x),$$

$$P\{\gamma < X_{(n)}^a < x\} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\log F(a)}^{-\log(F(a)-F(x))} \nu^{n-1} e^{-\nu} d\nu \quad (x < a).$$

Приведем здесь также результат, который вытекает из вышеизложенных рассуждений и, по мнению автора, представляет самостоятельный интерес в теории порядковых статистик.

Лемма 2.1. Пусть $\text{rank}_a X_n$ есть a -круговой ранг с.в. X_n среди величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ (т.е. место расположения с.в. X_n среди $X_1, X_2, \dots, X_n$ с учетом нового отношения порядка $\prec$). Тогда с.в. $\text{rank}_a X_1, \text{rank}_a X_2, \dots$ независимы и

$$P\{\text{rank}_a X_n = k\} = \frac{1}{n}.$$

З а м е ч а н и е. Если отношение порядка $\prec$ заменить на $<$, лемма 2.1 превратится в известный результат Реньи (см., например, [2]).

В заключение отметим, что данные результаты остаются верными и без предположения $-\infty < \gamma < \beta < \infty$.

3. Моменты и величины «односторонних последовательных приближений». С сожалением отметим, что, в отличие от a -круговых рекордных моментов, функция распределения моментов «о.п.п.» $T^a(n)$ зависит от вида непрерывной функции распределения $F(x)$.

Утверждение 3.1. Пусть $j \geq 1$ справедлива формула

$$P\{T^a(1) = j\} = (1 - F(a))^{j-1} F(a). \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$P\{T^a(1) = j\} = P\{X_1 > a, \dots, X_{j-1} > a, X_j < a\} = (1 - F(a))^{j-1} F(a).$$

Из утверждения 3.1 вытекает, что $ET^a(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m F(a) (1 - F(a))^{m-1} = 1/F(a)$.

Утверждение 3.2. Обобщением формулы (3.1) является формула ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n$) ($n \geq 1$):

$$\begin{aligned} P\{T^a(1) = j_1, T^a(2) = j_2, \dots, T^a(n-1) = j_{n-1}, T^a(n) \geq j_n\} \\ = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - F(a))^{j_k-1}}{(j_n - j_k) \cdots (j_{k+1} - j_k)(j_{k-1} - j_k) \cdots (j_1 - j_k)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

З а м е ч а н и е. Крайние члены последней суммы выглядят следующим образом:

$$\frac{(1 - F(a))^{j_1 - 1}}{(j_n - j_1) \cdots (j_k - j_1) \cdots (j_2 - j_1)} \quad (k = 1),$$

$$\frac{(1 - F(a))^{j_n - 1}}{(j_{n-1} - j_n) \cdots (j_k - j_n) \cdots (j_1 - j_n)} \quad (k = n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 3.2. Действительно,

$$\begin{aligned} & P\{T^a(1) = j_1, T^a(2) = j_2, \dots, T^a(n-1) = j_{n-1}, T^a(n) \geq j_n\} \\ &= P\left\{ \bigcap_{1 \leq i \leq j_1 - 1} \{X_i > a\}, \bigcap_{j_1 + 1 \leq i \leq j_2 - 1} \left(\{X_i < X_{j_1}\} \cup \{X_i > a\} \right), \right. \\ & \quad \dots, \bigcap_{j_{n-1} + 1 \leq i \leq j_n - 1} \left(\{X_i > X_{j_{n-1}}\} \cup \{X_i > a\} \right), \\ & \quad \bigcap_{j_{n-1} + 1 \leq i \leq j_n - 1} \left(\{X_i > X_{j_n}\} \cup \{X_i > a\} \right), \\ & \quad \left. \gamma < X_{j_1} < X_{j_2} < \dots < X_{j_{n-1}} < a \right\} \\ &= (1 - F(a))^{j_1 - 1} \int_{\gamma}^a (1 - F(a) + F(x_1))^{j_2 - j_1 - 1} dF(x_1) \\ & \quad \times \int_{x_1}^a (1 - F(a) + F(x_2))^{j_3 - j_2 - 1} dF(x_2) \\ & \quad \dots \int_{x_{n-2}}^a (1 - F(a) + F(x_{n-1}))^{j_n - j_{n-1} - 1} dF(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Из последней формулы и получаем требуемое.

У т в е р ж д е н и е 3.3. $ET^a(n) = \infty$ ($n \geq 2$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство можно получить непосредственно из формулы (3.2), однако мы воспользуемся более изящным методом, предложенным рецензентом.

Если из последовательности X -ов выбросить все те X_i , значения которых принадлежат интервалу (a, β) , то распределения величин $V^a(1), V^a(2), \dots$ не изменятся. Среди оставшихся X -ов величины $V^a(i)$ будут уже классическими рекордами. Поэтому, вместо величин $X_1, X_2, \dots$ с функцией распределения F можно рассматривать новые величины $Z_1, Z_2, \dots$ с функцией распределения $G(x) = F(x)/F(a)$, $\gamma \leq x \leq a$, и тогда $\{V^a(k)\}_{k=1}^{\infty} \stackrel{d}{=} \{Z_{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, где $Z_{(k)}$ — уже обычные рекордные величины в последовательности Z -ов, и, кроме того,

$$T^a(n) = L(n) + \mu(L(n)), \quad (3.3)$$

где $L(n)$ есть номер n -й рекордной величины в последовательности Z -ов, а $\mu(n)$ — общее число X -ов, отброшенных до появления $Z_{(n)}$. Отсюда сразу следует, что $ET^a(n) \geq EL(n) = \infty$ ($n \geq 2$).

У т в е р ж д е н и е 3.4. Распределение n -й величины «о.п.н.» при $n \geq 2$ задается формулой

$$P\{V_{(n)}^a < x\} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(1-F(x)/F(a))} \nu^{n-1} e^{-\nu} d\nu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство следует из известной формулы для распределения n -й рекордной величины, когда вместо $F(x)$ берется функция $G(x)$.

Утверждение 3.5. Производящая функция величины $T^a(n)$ имеет вид

$$P_n(s) = \mathbf{E}s^{T^a(n)} = P_{L(n)}(sK(s)),$$

где

$$K(s) = \frac{F(a)}{1 - (1 - F(a))s}, \quad P_{L(n)}(u) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(1-u)} \nu^{n-1} e^{-\nu} d\nu.$$

Последняя функция является производящей функцией рекордных моментов (результат Реньи [1], 1962).

Доказательство. Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью «успеха» $p = \mathbf{P}\{X \in (\gamma, a)\}$ и вероятностью «неудачи» $q = 1 - p = \mathbf{P}\{X \notin (\gamma, a)\}$. В этом случае число неудач (среди величин X_i) до появления $(L(n) = m)$ -го успеха имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами p и m . Справедлива формула

$$\mathbf{P}\{T^a(n) = k + m \mid L(n) = m\} = C_{m+k-1}^k F^m(a) (1 - F(a))^k. \quad (3.4)$$

Производящая функция рекордных моментов имеет вид (см. [1]):

$$P_{L(n)}(s) = \mathbf{E}s^{L(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{-\log(1-s)} \nu^{n-1} e^{-\nu} d\nu.$$

Откуда

$$\begin{aligned} P_n(s) &= \mathbf{E}s^{T^a(n)} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}s^{L(n)+\mu(L(n))} \mid L(n)\right\} \\ &= \mathbf{E}\left(sK(s)\right)^{L(n)} \stackrel{L(n)}{=} P_{L(n)}(sK(s)). \end{aligned}$$

Формула (3.4) позволяет также находить условные моменты. Так, например, $\mathbf{E}\{T^a(n) \mid L(n) = m\} = m/F(a)$, откуда

$$\mathbf{E}\left\{\frac{T^a(n)}{L(n)}\right\} = \frac{1}{F(a)}.$$

Автор работы выражает глубокую признательность рецензенту за предложенные в рецензии методы. Эти подходы позволили сократить доказательства и обогатить содержание работы. Так, в новой редакции статьи более половины всех результатов получено из критических замечаний рецензента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Renyi A. On the extreme elements of observations. — In: Selected papers of Alfred Renyi. V. 3. Budapest: Akademiai Kiado, 1976, p. 50–65.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 304 с.

Поступила в редакцию
29.IX.1994

Исправленный вариант
15.IX.1995