Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Филимонов, Экспоненциальная оценка для решения стохастического дифференциального уравнения со скачками, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 906–913

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:58:15

(с) Имеем $L = Z(2^k) \times Z(2^k)$. Положим $B = \{b_1, b_2\}$, где автоморфизмы b_1 и b_2 строятся так же, как и в случае (а).

Утверждение теоремы вытекает теперь из предложения 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казан А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972, 656 с.
2. Фельдман Г. М. К теореме Скитовича–Дармуа на абелевых группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 695–708.
3. Хьюит Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т.1. М.: Наука, 1975, 656 с.
4. Пармасарати К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р. С. Распределения вероятностей на локально компактных абелевых группах. — Математика. Сб. переводов, 1965, т. 9, в. 2, с. 115–146.
5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974, 336 с.
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977, 416 с.

Поступила в редакцию
28.II.1995

© 1996 г.

ФИЛИМОНОВ Е. В.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СКАЧКАМИ

Получены неасимптотические экспоненциальные оценки сверху для «хвоста» функции распределения сильного решения стохастического дифференциального уравнения Ито с разрывным членом в виде интеграла по локальной мартингальной мере. Отдельно рассматриваются случаи ограниченных по совокупности переменных и неограниченно растущих коэффициентов исследуемого уравнения.

Ключевые слова и фразы: стохастическое дифференциальное уравнение, неасимптотическая оценка, целочисленная мера, стохастический интеграл, мартингал, формула Ито, случайный оператор, банахово пространство, неподвижная точка.

Изучение свойств сильных решений стохастических дифференциальных уравнений Ито (СДУ) представляет существенный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. Соответствующие результаты могут найти широкое применение в статистике случайных процессов, в теории надежности, в теории автоматического управления и ряде других приложений.

В [7] автором рассматривался класс СДУ типа $d\xi_t = a(t, \xi_t) dt + b(t, \xi_t) dw_t$, для которого были получены верхние неасимптотические оценки «хвоста» функции распределения сильного решения. В настоящей работе подобные оценки выводятся для

*Обнинский институт атомной энергетики, Студенческий городок, 1, 249020 Обнинск, Калужская обл., Россия.

более широкого класса уравнений с разрывным членом типа пуассоновского. Выборочные траектории решения такого уравнения непрерывны почти всюду за исключением конечного множества моментов времени, в которые имеют место случайные скачки процесса.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, w_t — винеровский процесс на нем; $\mu(ds, dx)$ — локальная мартингальная мера, ассоциированная с целочисленной случайной мерой $\nu(ds, dx)$ [2, с. 115]; $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ — минимальный поток σ -алгебр, порожденный значениями w_t и $\nu([0, t], dx)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t = \beta(t, \xi_t) dw_t + \int_{\mathbf{R}_1} \gamma(t, x, \xi_t) \mu(dt, dx) \quad (1)$$

с начальным условием $\xi_0 = 0$ почти наверное (п.н.). Будем предполагать, что

- а) функции $\beta(t, y)$ и $\gamma(t, x, y)$ со значениями в $\mathbf{R}_1$ — борелевские, $0 \leq t \leq 1$, $x \in \mathbf{R}_1$, $y \in \mathbf{R}_1$,
- б) функция $\gamma(t, x, y)$ ограничена по x ,
- в) выполнены условия роста

$$|\beta(t, y)| \leq C_\beta (1 + |y|^{1/2}) \quad \text{и} \quad |\gamma(t, x, y)| \leq C_\gamma (1 + |y|^{1/2}) \quad (2)$$

при $|y| \rightarrow \infty$ для любого $t \in [0, 1]$ и любого $x \in \mathbf{R}_1$, где $C_\beta > 0$, $C_\gamma > 0$,

г) выполнены условия существования и единственности [1] сильного решения уравнения (1) ($\mathcal{F}_t$ -измеримого при любом $t \geq 0$),

д) характеристика (компенсатор, дуально предсказуемая проекция) $\pi(dt, dx)$ меры $\mu(dt, dx)$, связанная с ней соотношением $\nu(dt, dx) = \mu(dt, dx) + \pi(dt, dx)$ [2], [6], представима в виде

$$\pi(dt, dx) = \theta dt \pi_1(dx), \quad (3)$$

где $\theta = \text{const} > 0$; $\pi_1(dx)$ — такая неотрицательная неслучайная мера в $\mathbf{R}_1$, что

$$\int_{\mathbf{R}_1} \pi_1(dx) = K < \infty, \quad K > 0.$$

В дальнейшем будем записывать уравнение (1) в эквивалентной интегральной форме

$$\xi_t = \int_0^t \beta(s, \xi_s) dw_s + \int_0^t \int_{\mathbf{R}_1} \gamma(s, x, \xi_s) \mu(ds, dx).$$

Цель настоящей работы — вывод верхней экспоненциальной неасимптотической оценки для $\mathbf{P}\{|\xi_t| > u\}$ при $u > u_0 \gg 1$ следующего вида:

$$\mathbf{P}\{|\xi_t| > u\} \leq e^{-\varphi(u)},$$

где $\varphi(u)$ — некоторая положительная неубывающая функция, удовлетворяющая соотношению $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u)/\log u = \infty$. Как будет показано ниже, на основе полученных результатов представляется возможным вывести аналогичную оценку и для $\mathbf{P}\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_t| > u\}$.

2. Вспомогательные результаты. Для решения поставленной задачи будем применять свойства введенных в [3], [4] банаховых пространств случайных величин $F_\psi(\Omega)$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что случайная величина ξ принадлежит пространству $F_\psi(\Omega)$, если

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{\substack{m \geq 1 \\ \psi(m) < \infty}} \frac{\|\xi\|_{L_m}}{\psi(m)} < \infty,$$

где $\|\xi\|_{L_m} = (\mathbf{E}|\xi|^m)^{1/m}$, $\psi(m)$ — положительная неубывающая функция, $\psi(1) < \infty$.

О п р е д е л е н и е 2. Случайный процесс ξ_t , $0 \leq t \leq 1$, называется принадлежащим пространству $F_\psi^*(\Omega)$, если

$$\|\xi_t\|_\psi^* = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\xi_t\|_\psi < \infty.$$

Величины $\|\xi\|_\psi$ и $\|\xi_t\|_\psi^*$ есть нормы случайной величины ξ и процесса ξ_t в банаховых пространствах $F_\psi(\Omega)$ и $F_\psi^*(\Omega)$ соответственно.

Лемма 1. Рассмотрим стохастический интеграл

$$I_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}_1} g(s, x, \omega) \mu(ds, dx), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $g(s, x, \omega)$ — неучреждающий функционал.

Пусть $\max_{0 \leq s \leq 1, x \in \mathbf{R}_1} |g(s, x, \omega)| \leq N = \text{const}$ (п.н.). Тогда

$$1) \quad \mathbf{P}\{|I_t| > u\} \leq \exp \left\{ \frac{1}{N} \left(C_N + u - \frac{1}{2} u \log \frac{u}{2C_1 N} \right) \right\}$$

при $u > u_0 = 2e^2 C_1 N$, где $C_1 = \theta K$, $C_N = N \log 2$.

2) $I_t \in F_\psi^*(\Omega)$, где $\psi(x) = \exp(f^*(x)/x)$, $f^*(x) = \sup_{y>0} (xy - f(y))$, $f(y) = (1/(2N))(ye^y - C_2 e^y - 2C_N)$, $x \geq \log u_0$, $C_2 = 2 + \log 2C_1 N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя обобщенную формулу Ито [2, с. 142], получаем для $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} e^{\lambda I_t} &= 1 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}_1} \left\{ e^{\lambda(I_s + g(s, x, \omega))} - e^{\lambda I_s} \right\} \mu(ds, dx) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}_1} \left\{ e^{\lambda(I_s + g(s, x, \omega))} - e^{\lambda I_s} \right\} - \lambda e^{\lambda I_s} g(s, x, \omega) \pi(ds, dx). \end{aligned}$$

С учетом (3) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\lambda I_t} &= 1 + \theta \int_0^t \int_{\mathbf{R}_1} \mathbf{E} e^{\lambda I_s} e^{\lambda g(s, x, \omega)} ds \pi_1(dx) - \theta \int_0^t \int_{\mathbf{R}_1} \mathbf{E} e^{\lambda I_s} ds \pi_1(dx) \\ &\quad - \lambda \theta \int_0^t \int_{\mathbf{R}_1} \mathbf{E} e^{\lambda I_s} g(s, x, \omega) ds \pi_1(dx) = 1 + \theta(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3). \end{aligned}$$

Оценим сверху $\mathcal{J}_1$ и снизу $\mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\leq e^{\lambda N} \int_{\mathbf{R}_1} \left(\int_0^t \mathbf{E} e^{\lambda I_s} ds \right) \pi_1(dx) \leq K e^{\lambda N} \int_0^t \mathbf{E} e^{\lambda I_s} ds, \\ \mathcal{J}_2 &\geq K \int_0^t \mathbf{E} e^{\lambda I_s} ds \geq 0, \\ \mathcal{J}_3 &\geq -\lambda N \int_{\mathbf{R}_1} \left(\int_0^t \mathbf{E} e^{\lambda I_s} ds \right) \pi_1(dx) \geq -\lambda K N \int_0^t \mathbf{E} e^{\lambda I_s} ds. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} e^{\lambda I_t} \leq 1 + \theta K (\lambda N + e^{\lambda N}) \int_0^t \mathbf{E} e^{\lambda I_s} ds = z(t).$$

Отсюда нетрудно получить дифференциальное неравенство

$$\frac{z'(t)}{z(t)} \leq \theta K (\lambda N + e^{\lambda N}), \quad z(0) = 1,$$

решая которое относительно $z(t)$, имеем:

$$\mathbb{E} e^{\lambda I_t} \leq z(t) \leq \exp\{C_1(\lambda N + e^{\lambda N})t\}.$$

По неравенству Чебышева

$$\mathbb{P}\{I_t > u\} \leq \frac{\mathbb{E} e^{\lambda I_t}}{e^{\lambda u}} \leq \exp\{C_1(\lambda N + e^{\lambda N}) - \lambda u\}.$$

Минимизируя по λ правую часть, получаем оценку

$$\mathbb{P}\{I_t > u\} \leq \exp\left\{\frac{1}{N}\left(u - \frac{1}{2}u \log \frac{u}{2C_1 N}\right)\right\}$$

при $u > u_0 = 2e^2 C_1 N$.

Поскольку $I_0 = 0$ (п.н.), окончательно имеем:

$$\mathbb{P}\{|I_t| > u\} \leq 2\mathbb{P}\{I_t > u\} \leq \exp\left\{\frac{1}{N}\left(C_N + u - \frac{1}{2}u \log \frac{u}{2C_1 N}\right)\right\}, \quad u > u_0.$$

Таким образом, выведена требуемая оценка вида

$$\mathbb{P}\{|I_t| > u\} \leq e^{-\varphi(u)},$$

где

$$\varphi(u) = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2} u \log \frac{u}{2C_1 N} - u - C_N \right) = \frac{1}{2N} (xe^x - C_2 e^x - 2C_N) = f(x),$$

$$x = \log u, \quad C_2 = 2 + \log 2C_1 N.$$

Нетрудно проверить, что функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1.3 [3] при $x \geq \log u_0$. На основании этого приходим ко второму утверждению настоящей леммы.

Рассмотрим теперь более общий случай.

Лемма 2. Пусть

$$I(t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}_1} g(s, x, \omega) \mu(ds, dx), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где неупреждающий функционал $g(s, x, \omega)$ ограничен по x и $g(s, x, \omega) \in F_{\psi_0}^*(\Omega)$ для любого $x \in \mathbf{R}_1$,

$$\psi_0(y) \leq \exp\left\{\frac{C e^{y/2}}{y}\right\} \quad \text{при } y \geq 2m_0,$$

$$m_0 = \max\left\{\frac{\log 12 - \log C'}{2 - \log 4}, \log\left(2\left(a + \frac{C_7}{C'}\right)\right)\right\},$$

$C \geq 1$, $C' = C/a$, $a = e^{1+e^{-2}}$, $C_7 = 1 + \log 3K_1 C_6 C_5^2$, $C_5 = \max_{x \in \mathbf{R}_1} \|g(s, x, \omega)\|_{\psi_0}^*$, $C_6 = 4 \max(\theta, 1)$, $K_1 = \max(K, 1)$. Пусть также

$$v_k(t) = \int_{\mathbf{R}_1} |g(t, x, \omega)|^k \pi_1(dx) < \infty \quad (\text{п.н.})$$

для любого натурального конечного $k \geq 2$ и любого $t \in [0; 1]$. Тогда

1) $\mathbb{P}\{|I_t| > u\} \leq \exp\{C'' \log u - \log u \log \log u\}$, $C'' = \log C' + 2 + e^{-2}$, при $u > u_0 = \exp(C e^{2m_0})$,

2) $I_t \in F_{\psi}^*(\Omega)$, где $\psi(y) = \exp\{C e^y / y\}$ при $y \geq 2m_0$.

Доказательство. Условия настоящей леммы позволяют применить выведенные в [2, с. 150] оценки четных моментов интеграла I_t :

$$\mathbf{E}|I_t|^{2m} \leq (A_m + B_m) e^{3K_m}, \quad m \geq 2,$$

где

$$K_m = \sum_{k=1}^m (m-k)(C_m^k)^2, \quad C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!},$$

$$A_m = \mathbf{E} \int_0^1 \sum_{k=1}^m (C_m^k)^2 k \theta^{m/k} v_{2k}^{m/k}(s) ds,$$

$$B_m = 2\mathbf{E} \int_0^1 \sum_{k=2}^m (C_m^k)^2 k \theta^{2m/k} v_k^{2m/k}(s) ds.$$

Будем оценивать сверху K_m , A_m и B_m . Имеем:

$$\text{а) } K_m \leq m \sum_{k=1}^m (C_m^k)^2 \leq m \left(\sum_{k=0}^m C_m^k \right)^2 \leq m 4^m;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } A_m &= \sum_{k=1}^m k (C_m^k)^2 \theta^{m/k} \int_0^1 \mathbf{E} v_{2k}^{m/k}(s) ds \\ &\leq \sum_{k=1}^m k (C_m^k)^2 \theta^{m/k} \sum_{k=1}^m \int_0^1 \mathbf{E} |v_{2k}(s)|^{m/k} ds \\ &\leq m^2 (4C_3)^m \sup_{0 \leq s \leq 1} \sup_{1 \leq k \leq m} \mathbf{E} |v_{2k}(s)|^{m/k}, \end{aligned}$$

где $C_3 = \max(\theta, 1)$.

На основании теорем 1.2 и 1.3 из [3] нетрудно показать, что если $\xi \in F_\psi(\Omega)$, то $\xi^\alpha \in F_{\psi_\alpha}(\Omega)$, где $\psi_\alpha(y) = \psi^\alpha(\alpha y)$, $\alpha > 0$, причем $\|\xi^\alpha\|_{\psi_\alpha} \leq \|\xi\|_\psi^\alpha$. Пользуясь этим, получаем: $v_{2k}(s) \in F_{\psi_{2k}}^*(\Omega)$, где $\psi_{2k}(y) = \psi_0^{2k}(2ky)$, и $v_{2k}^{1/k}(s) \in F_\psi^*(\Omega)$, где $\bar{\psi}(y) = \psi_{2k}^{1/k}(y/k) = \psi_0^2(2y)$. В силу определения 1

$$\mathbf{E}|v_{2k}(s)|^{m/k} \leq C_4^m(k) \bar{\psi}^m(m),$$

где

$$C_4(k) = \left\| v_{2k}^{1/k}(s) \right\|_\psi^* \leq K_1 \left(\max_{x \in \mathbf{R}_1} \|g(s, x, \omega)\|_{\psi_0}^* \right)^2 = K_1 C_5^2.$$

Следовательно,

$$A_m \leq K_1 m^2 C_5^2 C_6^m \psi_0^{2m}(2m), \quad \text{где } C_6 = 4C_3.$$

в) Аналогичным образом, имеем:

$$B_m \leq 2K_1 C_5^2 m^2 C_6^m \psi_0^{2m}(2m).$$

Итак,

$$\mathbf{E}|I_t|^{2m} \leq 3K_1 C_5^2 m^2 C_6^m \psi_0^{2m}(2m) e^{3m 4^m} \leq \exp\{C_7 m + 3m 4^m + 2m \log \psi_0(2m)\}.$$

По неравенству Чебышева

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|I_t| > u\} &\leq \frac{\mathbf{E}|I_t|^{2m}}{u^{2m}} \leq \exp\{C_7 m + 3m 4^m + C e^m - 2m \log u\} \\ &\leq \exp\{C' e^{2m} - 2m \log u\}, \quad m > m_0. \end{aligned}$$

Минимизируя правую часть полученного выражения по $m > m_0$ с учетом целости m , приходим к следующему результату:

$$P\{|I_t| > u\} \leq \exp\{C'' \log u - \log u \log \log u\}$$

при $u > u_0 = \exp(Ce^{2m_0})$.

Обозначив $z = \log u$, получим, что

$$P\{|I_t| > u\} \leq e^{-f(z)},$$

где $f(z) = z \log z - C''z$, $z > z_0 = Ce^{2m_0}$. Функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3 [3], и, следовательно, $I_t \in F_{\psi}^*(\Omega)$, где $y \log \psi(y) = f^*(y) = \sup_{z > z_0} (yz - f(z)) = Ce^y$, т.е. $\psi(y) = \exp[Ce^y/y]$, $y > 2m_0$. Лемма доказана.

Лемма 3. Рассмотрим стохастический интеграл

$$J(t) = \int_0^t b(s, \omega) dw_s, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $b(s, \omega)$ — такой неупреждающий функционал, что

$$b(s, \omega) \in F_{\psi_0}^*(\Omega), \quad \psi_0(y) \leq \exp\left\{\frac{Ce^{y/2}}{y}\right\} \quad \text{при } y \geq 2m_1, \quad C \geq 1,$$

$$m_1 = \max\left(2, \log \frac{C_{10}}{5 + C_9}\right), \quad C_{10} = \frac{C}{a}, \quad a = ee^{e^{-2}},$$

$$C_9 = 1 + 2 \log C_8, \quad C_8 = \|b(s, \omega)\|_{\psi_0}^*.$$

Тогда

$$P\{|J_t| > u\} \leq \exp\{C_{11} \log u - \log u \log \log u\},$$

$u > \exp(Ce^{2m_1})$, $C_{11} = \log C_{10} + 2 + e^{-2}$, $u J_t \in F_{\psi_1}^*(\Omega)$, где $\psi_1(y) = \exp\{Ce^y/y\}$ при $y \geq 2m_1$.

Доказательство. Воспользуемся полученными в [2, с. 104] оценками четных моментов интеграла J_t :

$$E|J_t|^{2m} \leq m(2m-1)^m \int_0^1 E b^{2m}(s, \omega) ds \leq m(2m)^m \sup_{0 \leq s \leq 1} E b^{2m}(s, \omega).$$

По аналогии с леммой 2 имеем:

$$\sup_{0 \leq s \leq 1} E b^{2m}(s, \omega) \leq C_8^{2m} \psi_0^{2m}(2m)$$

и

$$\begin{aligned} P\{|J_t| > u\} &\leq \frac{E|J_t|^{2m}}{u^{2m}} \leq m(2m)^m C_8^{2m} \psi_0^{2m}(2m) u^{-2m} \\ &\leq \exp\{C_9 m + m^2 + Ce^m - 2m \log u\} \\ &\leq \exp\{C_{10} e^{2m} - 2m \log u\} \quad \text{при } m \geq m_1. \end{aligned}$$

Минимизируя правую часть по целым $m \geq m_1$, получаем:

$$P\{|J_t| > u\} \leq \exp\{C_{11} \log u - \log u \log \log u\}, \quad u > u_1 = \exp(Ce^{2m_1}).$$

Следовательно,

$$J_t \in F_{\psi_1}^*(\Omega), \quad \text{где } \psi_1(y) = \exp\left\{\frac{Ce^y}{y}\right\}, \quad y \geq 2m_1.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Если функционал $b(s, \omega)$ ограничен, т.е. $\max_{0 \leq s \leq 1} |b(s, \omega)| \leq M = \text{const}$ (п.н.), то согласно [4], [5] имеет место оценка

$$P\{|J_t| > u\} \leq \exp \left\{ -\frac{u^2}{2M} \right\} \quad \text{при } u > 0.$$

3. Основной результат. Обратимся теперь к решению уравнения (1) и будем оценивать $P\{|J_t| > u\}$, рассматривая отдельно случаи ограниченных и растущих по y функций β и γ .

Теорема. Пусть ξ_t — сильное решение уравнения (1) и выполнены условия а), б), г) и д) п. 1. Тогда

1) если $\max_{x, y, t} |\gamma(t, x, y)| \leq N$ и $\max_{y, t} |\beta(t, y)| \leq M$, то

$$P\{|\xi_t| > u\} \leq 2 \exp \left\{ \frac{1}{N} \left(u - \frac{1}{2} u \log \frac{u}{2C_1 N} \right) \right\}$$

при $u > u_0 = 2e^2 \theta K \max(N, M)$,

2) если функции $\beta(t, y)$ и $\gamma(t, x, y)$ растут по y согласно условиям в) п. 1, то

$$P\{|\xi_t| > u\} \leq \exp \left\{ \log C_{12} u (C'' - \log \log C_{12} u) \right\}$$

при $u > \bar{u} = C_{12} \exp(Ce^{2\bar{m}})$, где $C_{12} = \|\xi_t\|_\psi^*$, $\psi(x) = \exp(Ce^x/x)$ при $x \geq 2\bar{m}$,

$$C'' = 1 + \log C, \quad \bar{m} = \max \left\{ 2, \log \frac{C_{13}}{5}, \frac{\log 12 - \log C_{13}}{2 - \log 4}, \log \left[2 \left(a + \frac{C_{15}}{C_{13}} \right) \right] \right\},$$

$$C_{13} = \frac{C}{a}, \quad a = e^{1+e^{-2}}, \quad C_{15} = 1 + \log[12K_1 C_6 C_{12} C_{16}^2],$$

$$C_{16} = \max(C_\beta, C_\gamma), \quad C_6 = 4 \max(\theta, 1), \quad K_1 = \max(K, 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случайный оператор A , определяемый следующим образом:

$$A\eta_t = \int_0^t \beta(s, \eta_s) dw_s + \int_0^t \int_{\mathbf{R}_1} \gamma(s, x, \eta_s) \mu(ds, dx) = a_1(\eta_t) + a_2(\eta_t),$$

где η_t есть $\mathcal{F}_t$ -измеримый случайный процесс. Применяя леммы 1, 2 и 3, нетрудно показать, что в случае 1)

$$A: F_{\psi_1}^*(\Omega) \longrightarrow F_{\psi_1}^*(\Omega),$$

где $x \log \psi_1(x) = \sup_{y>0} (xy - f_1(y))$, $f_1(y) = (ye^y - C_2 e^y - 2C_N)/(2N)$, $x \geq \log u_0$, $C_2 = 2 + \log 2C_1 N$. Действительно, если $\eta_t \in F_{\psi_1}^*(\Omega)$, то по лемме 1

$$a_2(\eta_t) \in F_{\psi_1}^*(\Omega) \quad \text{и} \quad a_1(\eta_t) \in F_{\psi'}^*(\Omega), \quad \psi'(x) = \sqrt{x},$$

согласно замечанию к лемме 3. Поскольку $F_{\psi'}^*(\Omega) \subset F_{\psi_1}^*(\Omega)$ [3], получаем

$$A\eta_t \in F_{\psi_1}^*(\Omega).$$

Аналогично, в случае 2) можно доказать, что

$$A: F_\psi^*(\Omega) \longrightarrow F_\psi^*(\Omega), \quad \text{где } x \log \psi(x) = Ce^x, \quad x \geq 2\bar{m}.$$

В самом деле, если $\eta_t \in F_\psi^*(\Omega)$, то, в силу условий в) п. 1,

$$\gamma(t, x, \eta_t) \in F_{\psi''}^*(\Omega) \quad \text{и} \quad \beta(t, \eta_t) \in F_{\psi''}^*(\Omega),$$

где

$$\psi''(y) = \psi^{1/2}\left(\frac{y}{2}\right) = \exp\left(\frac{Ce^{y/2}}{y}\right), \quad y \geq 2\overline{m}.$$

Применяя леммы 2 и 3, получаем $A\eta_t \in F_\psi^*(\Omega)$.

С учетом вышесказанного можно заключить, что неподвижная точка $\xi_t = A\xi_t$ отображения A , представляющая собой решение уравнения (1), является элементом пространства $F_{\psi_1}^*(\Omega)$ в случае 1) и пространства $F_\psi^*(\Omega)$ в случае 2).

Требуемые оценки выводим, используя теорему 1.2 из [3].

Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1) В вырожденном случае $\gamma \equiv 0$ (когда решение уравнения (1) непрерывно) ξ_t принадлежит одному из введенных в [4], [5] банаховых пространств случайных величин B_q .

2) Как следует из [2], [6], решение ξ_t уравнения (1) представляет собой локальный равномерно интегрируемый мартингал, что дает возможность оценить сверху $P\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_t| > u\}$, применяя теорию пространств $F_\psi(\Omega)$ и известные неравенства для мартингалов, например, неравенство Дуба [6, с. 56]

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_t|\right)^n \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n E|\xi(1)|^n, \quad n \geq 1.$$

Тогда если $\xi_t \in F_\psi^*(\Omega)$, то

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_t| > u\right\} \leq \frac{E(\sup_t |\xi_t|)^n}{u^n} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n [\|\xi_t\|_\psi^*]^n \psi^n(n) u^{-n}.$$

Минимизируя по n , получаем требуемую оценку.

Автор выражает признательность Е. И. Островскому за ряд ценных советов при работе над настоящей статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веретенников А. Ю. О сильных решениях стохастических уравнений Ито со скачками. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 1, с. 159–163.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 3. М.: Наука, 1975, 496 с.
3. Ермаков С. В. Центральная предельная теорема для независимых неодинаково распределенных и слабо зависимых банаховозначных случайных величин. Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1988, 130 с.
4. Козаченко Ю. В., Островский Е. И. Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. — В сб.: Теория вероятностей и математическая статистика. В. 32. Киев: Киевский гос. ун-т, 1985, с. 42–53.
5. Матугин П. Г., Островский Е. И. Непараметрическое оценивание плотности по результатам многофакторных испытаний. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 1, с. 72–82.
6. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, гл. 1–3.
7. Ostrovsky E. I., Philimonov E. V. An exponential estimate for a solution of a stochastic differential equation. — Random Oper. and Stoch. Equ., 1994, v. 2, № 4, p. 355–363.

Поступила в редакцию
22.IX.1994