Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Бобков, Некоторые экстремальные свойства распределения Бернулли, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 877–884

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:19:42

6. Horowitz H. Strong ergodic theorems for Markov processes. — Proc. Amer. Math. Soc., 1969, v. 23, p. 328–334.
7. Horowitz H. Pointwise convergence of iterates of a Harris-recurrent operator. — Israel J. Math., 1979, v. 33, p. 177–180.
8. Fogel S. R. Harris operators. — Israel J. Math., 1979, v. 33, p. 281–309.
9. Fogel S. R., Goussoub N. A. Ornstein–Metivier–Brunel theorem revisited. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1979, v. 15, p. 293–301.
10. Brunel A., Revus D. Un critère probabiliste de compacité des groupes. — Ann. Probab., 1974, v. 2, p. 745–746.
11. Olshen R. A. The coincidence of measure algebras under an exchangeable probability. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1971, B. 18, S. 153–166.
12. Georgii H. O. On canonical gibbs states, symmetric and tail events. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1976, B. 33, H. 4, S. 331–341.
13. Hewitt E., Savage L. J. Symmetric measure on cartesian products. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 80, p. 470–501.
14. Blackwell D., Freedman D. The tails σ -field of Markov chain and a theorem of Orey. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, p. 1291–1295.
15. Григоренко Л. А. О σ -алгебре симметричных событий для счетной цепи Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 1, с. 198–204.
16. Григоренко Л. А. Симметричные события для некоторых стационарных случайных последовательностей. — Успехи матем. наук, 1984, т. 39, в. 1, с. 127–128.
17. Гуревич Б. М. Локальная предельная теорема для цепей Маркова и условия типа регулярности. — Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. 13, в. 1, с. 183–188.
18. Колмогоров А. Н. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, т. 13, № 4, с. 281–300.
19. Гордин М. И., Лифшиц Б. А. Центральная предельная теорема для стационарных процессов Маркова. — Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 4, с. 766–767.

Поступила в редакцию
5.VIII.1994

© 1996 г.

БОБКОВ С. Г.*

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЕРНУЛЛИ¹⁾

В классе всех вероятностных распределений в $\mathbf{R}^n$ с конечным первым моментом как упорядоченном множестве исследуется положение n -мерного распределения Бернулли.

Ключевые слова и фразы: распределение Бернулли, сравнение мер, ограниченность случайных процессов, линейно порожденных независимыми величинами.

Обозначим через M_n класс всех вероятностных распределений μ в $\mathbf{R}^n$ с конечным первым моментом: $\int_{\mathbf{R}^n} \|x\| d\mu(x) < +\infty$. Пусть M^n обозначает подкласс M_n , состоящий из произведений мер, т.е. вероятностных мер, представимых в виде произведения $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ мер на прямой, имеющих конечный первый момент.

*Сыктывкарский государственный университет, математический факультет, Октябрьский пр. 55, 167001 Сыктывкар, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант № NXZ000.

Для пары мер $\mu, \nu \in M_n$ будем писать $\mu \prec \nu$, если для любой выпуклой функции $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$\int_{\mathbf{R}^n} f d\mu \leq \int_{\mathbf{R}^n} f d\nu. \quad (1)$$

Отношение порядка $\prec$ изучалось многими авторами; например, Шоке [4] (см. также [2, с. 279], [3, с. 29]) использовал это отношение для положительных мер на выпуклых компактных подмножествах локально-выпуклых пространств. Мы используем сравнение $\prec$ без предположения о носителе. Заметим, что интегралы в (1) существуют (хотя, быть может, и равны $+\infty$), так как любая выпуклая функция мажорирует некоторую аффинную функцию, но все линейные функционалы суммируемы относительно мер из M_n .

Основной вопрос, который изучается в настоящей заметке, следующий: «каково положение n -мерного распределения Бернулли P^n в M_n и M^n как упорядоченных множествах?», т.е. с какими мерами мера P^n сравнима? По определению P^n приписывает массу 2^{-n} каждой точке дискретного куба $\{-1, 1\}^n$, т.е. является n -й степенью меры P с $P(\{-1\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Обозначим $\mathcal{U}^n = \{\mu \in M^n: \mu \prec P^n\}$, $\mathcal{B}^n = \{\mu \in M^n: P^n \prec \mu\}$, так что

$$\mathcal{U}^n \prec P^n \prec \mathcal{B}^n.$$

Сразу отметим, что если две меры в M_n сравнимы, то они имеют одинаковые средние (барицентры). Действительно, применяя (1) к линейным функциям f и $-f$, получаем в (1) равенство для всех линейных f . Таким образом, меры, сравнимые с P^n , имеют нулевые средние. Для меры μ на прямой $\mathbf{R}$ будем обозначать через $m(\mu)$ (любую) медиану μ ; при этом, значение $\int_{\mathbf{R}} |x - m(\mu)| d\mu(x)$ не зависит от выбора медианы.

Теорема 1. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^1 &= \left\{ \mu \in M^1: \int_{\mathbf{R}} x d\mu(x) = 0, \mu([-1, 1]) = 1 \right\}, \\ \mathcal{B}^1 &= \left\{ \mu \in M^1: \int_{\mathbf{R}} x d\mu(x) = 0, \int_{\mathbf{R}} |x - m(\mu)| d\mu(x) \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Верны равенства $\mathcal{U}^n = (\mathcal{U}^1)^n$, $\mathcal{B}^n = (\mathcal{B}^1)^n$ (в смысле декартовых произведений).*

Сформулируем теоремы 1 и 2 в терминах случайных величин. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ — два случайных вектора, составленных из независимых случайных величин (с.в.) с конечным первым моментом. Так же, как и для мер, через $m(\lambda)$ будем обозначать медиану с.в. λ .

Следствие 1. *Если для всех $k = 1, \dots, n$*

$$E\xi_k = 0, \quad |\xi_k| \leq 1 \quad \text{п.н.}, \quad (2)$$

$$E\eta_k = 0, \quad E|\eta_k - m(\eta_k)| \geq 1, \quad (3)$$

то для любой выпуклой функции $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$Ef(\xi) \leq Ef(\eta). \quad (4)$$

Если $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, с.в. ζ_k независимы и $P\{\zeta_k = \pm 1\} = \frac{1}{2}$ (распределены по закону P), то условия (2) и (3) выполнены одновременно и поэтому, в силу (4), для всех выпуклых f

$$Ef(\xi) \leq Ef(\zeta) \leq Ef(\eta). \quad (5)$$

Верно и обратное утверждение: если первое (соответственно, второе) из неравенств (5) выполняется для всех выпуклых f , то верно (2) (соответственно, (3)).

Приведем еще одно следствие.

Следствие 2. Если независимые с.в. η_n ($n \geq 1$) удовлетворяют (3), то для любой выпуклой функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \geq \mathbf{E}f(\lambda), \quad (6)$$

где $S_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$, а с.в. λ имеет стандартное нормальное распределение.

В классе $\mathcal{U}^n$ распределение P^n имеет еще и такое экстремальное свойство.

Теорема 3. При условии (2) для всех выпуклых гладких функций $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$Df(\xi) \leq 2\mathbf{E}|\nabla f(\xi)|^2. \quad (7)$$

Здесь ∇f — градиент функции f , $|\nabla f|^2 = \sum_{k=1}^n (\partial f / \partial x_k)^2$.

Постоянная 2 в (7) может быть улучшена в том и только том случае, если все ξ_k распределены не по закону Бернулли: тогда (7) выполняется с постоянной 1 + $\max_{1 \leq k \leq n} D\xi_k$ перед $\mathbf{E}|\nabla f(\xi)|^2$. Если же $\xi_k = \zeta_k$ при некотором k , то (7) обращается в равенство на функции $f(x) = \max(x_k + 1, 0)$ (в асимптотическом смысле, т.е. на некоторой последовательности выпуклых гладких f_m , сходящихся к f).

Пусть $(\xi_n)_{n \geq 1}$ — последовательность независимых с.в., $\mathbf{E}\xi_n = 0$, имеющих общее невырожденное распределение с компактным носителем в $\mathbf{R}$. Пусть $(\eta_n)_{n \geq 1}$ — еще одна последовательность с.в. с такими же свойствами (но с другим общим распределением). Рассмотрим два случайных процесса

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \xi_n, \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \eta_n, \quad t \in T, \quad (8)$$

линейно порожденных с.в. ξ_n и η_n . Коэффициенты a_n представляют собой произвольные функции на (абстрактном) параметрическом множестве T , причем предполагается, что для всех $t \in T$ ряды в (8) сходятся п.н., т.е. $\sum_{n \geq 1} a_n(t)^2 < +\infty$.

Следствие 3. Случайный процесс $x(t)$, $t \in T$, выборочно ограничен, т.е. $\sup_{t \in T} x(t) < +\infty$ п.н., тогда и только тогда, когда выборочно ограничен случайный процесс $y(t)$, $t \in T$.

Если бы все с.в. ξ_n были распределены по стандартному нормальному закону, то разложение (8) представляло бы общую формулу центрированного гауссовского случайного процесса $x(t)$. В этом случае окончательное решение задачи о необходимых и достаточных условиях ограниченности реализаций $x(t)$ получено М. Талаграном (эта задача с некоторыми упрощениями в доказательствах подробно освещена М. Леду в [1]). В случае бернуллиевских с.в. ξ_n необходимые и достаточные условия ограниченности $x(t)$ неизвестны (такие случайные процессы М. Леду называет бернуллиевскими; см. [1, с. 73]). Следствие 3 говорит о том, что в случае ограниченных с.в. ξ_n задача об условиях ограниченности $x(t)$ сводится к бернуллиевским порождающим величинам.

Доказательство теоремы 2 легко провести по индукции, если воспользоваться следующим утверждением.

Лемма 1. Пусть μ_1, ν_1 и μ_2, ν_2 — вероятностные меры в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно. Тогда если $\mu_1 \prec \mu_2$, $\nu_1 \prec \nu_2$, то $\mu_1 \otimes \nu_1 \prec \mu_2 \otimes \nu_2$.

Как обычно, через $\mu \otimes \nu$ обозначается произведение мер μ и ν .

Доказательство леммы 1. Сначала отметим, что определение (1) распространяется на все функции $f: \mathbf{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$, удовлетворяющие неравенству

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad t \in [0, 1]$$

(допускается значение $+\infty$). Пусть $f: \mathbf{R}^{n+m} \rightarrow \mathbf{R}$ — выпуклая. Тогда выпуклыми «в широком смысле» будут функции

$$g(y) = \int f(x, y) d\mu_1(x), \quad h(y) = \int f(x, y) d\mu_2(x),$$

причем $g(y) \leq h(y)$ для всех $y \in \mathbf{R}^m$. Применяя (1) к g , имеем, используя теорему Фубини:

$$\int_{\mathbf{R}^{n+m}} f d\mu_1 \otimes \nu_1 = \int_{\mathbf{R}^m} g d\nu_1 \leq \int_{\mathbf{R}^m} h d\nu_2 \leq \int_{\mathbf{R}^m} h d\nu_2 = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f d\mu_2 \otimes \nu_2.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Будем рассматривать меры только с нулевыми средними, ибо, как уже отмечалось, $\mu \prec \nu$ влечет за собой $\int x d\mu(x) = \int x d\nu(x)$.

Рассмотрим сначала первое утверждение теоремы (описание класса $\mathcal{M}^1$). Если $\mu \prec P$, то $\text{supp}(\mu) \subset [-1, 1]$. В противном случае, например, если $\mu((1, +\infty)) > 0$, значение $\int f d\mu$ может быть сколь угодно большим, в то время как $f(-1)$ и $f(1)$ и, следовательно, $\int f dP$ остаются постоянными. Обратно, пусть $\text{supp}(\mu) \subset [-1, 1]$. Тогда для всех $x \in [-1, 1]$ и любой выпуклой f

$$f(x) \leq \frac{1-x}{2} f(-1) + \frac{1+x}{2} f(1).$$

Следовательно, $\int f d\mu \leq [f(-1) + f(1)]/2 = \int f dP$. Таким образом, $\mu \prec P$.

Покажем теперь, что $P \prec \mu \iff \int_{\mathbf{R}} |x - m(\mu)| d\mu(x) \geq 1$. Любая выпуклая функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет неравенствам

$$f(x) \geq f(-1) + f'(-1-0)(x+1) = f_{-1}(x),$$

$$f(x) \geq f(1) + f'(1+0)(x-1) = f_1(x)$$

с произвольным $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, $f(x) \geq f_0(x) = \max\{f_{-1}(x), f_1(x)\}$ и поэтому $\int f d\mu \geq \int f_0 d\mu$. Но $f(x) = f_0(x)$ при $x = \pm 1$, значит, $\int f dP = \int f_0 dP$. Следовательно, неравенство $\int f d\mu \geq \int f dP$ выполняется для всех выпуклых f тогда и только тогда, когда оно выполняется для функций вида f_0 , т.е. для функций вида

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x - x_0) + c, & x \leq x_0, \\ \beta(x - x_0) + c, & x \geq x_0, \end{cases}$$

где $\alpha \leq \beta$, $c \in \mathbf{R}$, $|x_0| \leq 1$. При $\alpha = \beta$ функция f — аффинная, следовательно, $\int f d\mu = f(0) = \int f dP$. Если $\alpha < \beta$, то

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= c + \alpha \int_{-\infty}^{x_0} (x - x_0) d\mu(x) + \beta \int_{x_0}^{\infty} (x - x_0) d\mu(x) \\ &= c - \beta x_0 - (\beta - \alpha) \int_{-\infty}^{x_0} (x - x_0) d\mu(x), \\ \int f dP &= c - \beta x_0 - (\beta - \alpha) \int_{-\infty}^{x_0} (x - x_0) dP(x), \end{aligned}$$

так как μ и P имеют нулевые средние. Таким образом, знак числа

$$\int f d\mu - \int f dP = -(\beta - \alpha) \int_{-\infty}^{x_0} (x - x_0) d(\mu - P)(x)$$

не зависит ни от c , ни от α и β , и значит, можно положить $c = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ и функция f примет вид $f(x) = |x - x_0|$. Следовательно,

$$P \prec \mu \iff \int |x - x_0| d\mu(x) \geq \int |x - x_0| dP(x) \quad \text{для любого } x_0 \in [-1, 1].$$

Но при таких x_0 выполняется равенство $\int |x - x_0| dP(x) = 1$, и мы приходим к следующей характеристике:

$$P \prec \mu \iff \left(\forall x_0 \in [-1, 1] \right) \int_{\mathbf{R}} |x - x_0| d\mu(x) \geq 1 \quad (9)$$

(в предположении, что μ имеет конечный первый момент, причем $\int_{\mathbf{R}} x d\mu(x) = 0$). Заметим, что для всех $x_0 \in \mathbf{R}$

$$\int_{\mathbf{R}} |x - x_0| d\mu(x) \geq \left| \int_{\mathbf{R}} (x - x_0) d\mu(x) \right| = |x_0|.$$

Поэтому если неравенство в правой части (9) выполняется для всех $x_0 \in [-1, 1]$, то оно выполняется для всех $x_0 \in \mathbf{R}$. Следовательно,

$$P \prec \mu \iff \inf_{a \in \mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |x - a| d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} |x - m(\mu)| d\mu(x) \geq 1.$$

Теорема 1, таким образом, доказана.

З а м е ч а н и я. Интересен вопрос о том, какую роль в следствии 1 играет независимость. В частности, если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $E\xi_i = 0$, $|\xi_i| \leq 1$ п.н., причем независимость ξ_i не предполагается, то интересно, когда распределение μ случайного вектора ξ мажорируется многомерным бернуллиевским распределением P^n . Можно предложить следующее простое условие.

Теорема 4. Если для любых $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$E\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} = 0, \quad (10)$$

то $\mu \prec P^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Для $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $x \in [-1, 1]^n$ положим $p_\varepsilon(x) = 2^{-n} \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i x_i)$. Очевидно,

$$p_\varepsilon(x) \geq 0, \quad \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} p_\varepsilon(x) = 1,$$

так как вышенаписанную сумму можно записать как

$$E(1 + \zeta_1 x_1) \dots (1 + \zeta_n x_n) = E(1 + \zeta_1 x_1) \dots E(1 + \zeta_n x_n) = 1,$$

где $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ суть независимые бернуллиевские величины. Аналогично проверяется тождество

$$\sum_{\varepsilon} p_\varepsilon(x) \varepsilon = x.$$

Следовательно, для любой выпуклой функции $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) \leq \sum_{\varepsilon} p_\varepsilon(x) f(\varepsilon),$$

и, интегрируя это неравенство по мере μ , получаем

$$\int_{\mathbf{R}} f d\mu \leq \sum_{\varepsilon} E p_\varepsilon(\xi_1, \dots, \xi_n) f(\varepsilon) = 2^{-n} \sum_{\varepsilon} f(\varepsilon) = \int_{\mathbf{R}^n} f dP^n,$$

так как

$$\begin{aligned} E p_\varepsilon(\xi_1, \dots, \xi_n) &= 2^{-n} E(1 + \varepsilon_1 \zeta_1) \dots (1 + \varepsilon_n \zeta_n) \\ &= 2^{-n} \left(1 + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k} E\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \right) = 2^{-n}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mu \prec P^n$.

Пример 1. Последовательность с.в. $\xi_i(\omega) = \cos(2^i \omega)$, $0 \leq i \leq n$, определенная на вероятностном пространстве $((-\pi, \pi), d\omega/(2\pi))$, удовлетворяет (10), и поэтому ее распределение мажорируется P^{n+1} .

Пример 2. Пусть для всех $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ случайные векторы $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $(\varepsilon_1 \xi_1, \dots, \varepsilon_n \xi_n)$ одинаково распределены. По теореме 3, если $|\xi_i| \leq 1$ п.н., то $\mu \prec P^n$. Интересно, что это утверждение можно обратить. Если $|\xi_i| \geq 1$ п.н., то $P^n \prec \mu$. Последнее легко доказать по индукции, представляя μ как смесь $\int_{\mathbf{R}} \mu_i d\pi(t)$, так чтобы условная мера μ_i была сосредоточена на гиперплоскости $x_n = t$, и рассуждая так же, как в доказательстве леммы 1.

Доказательство теоремы 3. Пусть сначала $n = 1$, f — гладкая выпуклая функция на $\mathbf{R}$. Так как производная f' не убывает, то для любых $x, y \in \mathbf{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq \max\{|f'(x)|, |f'(y)|\} |x - y|,$$

поэтому

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq (|f'(x)|^2 + |f'(y)|^2) (x - y)^2.$$

Следовательно, для дисперсии f относительно μ имеем:

$$\begin{aligned} Df &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(x) - f(y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (|f'(x)|^2 + |f'(y)|^2) (x - y)^2 d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f'(x)|^2 (x^2 + y^2) d\mu(x) d\mu(y) + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f'(y)|^2 (x^2 + y^2) d\mu(x) d\mu(y) \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (f'(x)^2 + f'(y)^2) xy d\mu(x) d\mu(y) = \int_{\mathbf{R}} |f'(x)|^2 (x^2 + \sigma^2) d\mu(x), \end{aligned}$$

где $\sigma^2 = \int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu(x)$ (перед тем, как написать последнее равенство, воспользовались предположением о том, что μ имеет нулевое среднее). Заметим, что условие гладкости можно отбросить и понимать под $|f'(x)|$ значение $\max\{|f'(x-0)|, |f'(x+0)|\}$.

Покажем по индукции, что если $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$, $\int_{\mathbf{R}} x d\mu_i(x) = 0$, $\int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu_i(x) = \sigma_i^2$, то для любой выпуклой гладкой $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$Df \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|^2 (x_i^2 + \sigma_i^2) d\mu(x). \quad (11)$$

Осуществляя индукционный переход, рассмотрим выпуклую гладкую функцию $f: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$. Зафиксируем $x_{n+1} \in \mathbf{R}$ и запишем (11) для функции $x \in \mathbf{R}^n \rightarrow f(x, x_{n+1})$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} f(x, x_{n+1})^2 d\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n(x) &\leq \left[\int_{\mathbf{R}^n} f(x, x_{n+1}) d\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n(x) \right]^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial f(x, x_{n+1})}{\partial x_i} \right|^2 (x_i^2 + \sigma_i^2) d\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Положим $g(x_{n+1}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x, x_{n+1}) d\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n(x)$. Эта функция выпукла, и можно записать неравенство, полученное при $n = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} g(x_{n+1})^2 d\mu_{n+1}(x_{n+1}) &\leq \left[\int_{\mathbf{R}} g(x_{n+1}) d\mu_{n+1}(x_{n+1}) \right]^2 \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}} |g'(x_{n+1})|^2 (x_{n+1}^2 + \sigma_{n+1}^2) d\mu_{n+1}(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Но $\int_{\mathbf{R}} g d\mu_{n+1} = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} f d\mu$ по теореме Фубини, а

$$g'(x_{n+1}) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial f(x, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} d\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n(x),$$

и по неравенству Шварца

$$g'(x_{n+1})^2 \leq \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial f(x, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} \right|^2 d\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n(x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} g(x_{n+1})^2 d\mu_{n+1}(x_{n+1}) \\ & \leq \left(\int_{\mathbf{R}^{n+1}} f d\mu \right)^2 + \int_{\mathbf{R}^{n+1}} \left| \frac{\partial f(x, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} \right|^2 (x_{n+1}^2 + \sigma_{n+1}^2) d\mu(x, x_{n+1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрируя (12) по переменной x_{n+1} и учитывая (13), получаем (11) для $n+1$. Если $\text{supp}(\mu_i) \subset [-1, 1]$, то (11) влечет за собой неравенство

$$Df \leq \max_{1 \leq i \leq n} (1 + \sigma_i^2) E|\nabla f|^2.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство следствия 2. По теореме 1

$$E f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \geq E f\left(\frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF_n(x),$$

где F_n — функция распределения $(\zeta_1 + \dots + \zeta_n)/\sqrt{n}$. Не умаляя общности, положим $f(0) = 0$. Так как распределение, ассоциированное с F_n , симметрично относительно нуля, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dF_n = \int_0^{+\infty} (f(x) + f(-x)) dF_n(x) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) d(f(x) + f(-x)).$$

Функция $G(x) = f(x) + f(-x)$ не убывает на $[0, +\infty]$, и поэтому можно применить лемму Фату:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f dF_n & \geq \int_0^{+\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - F_n(x)) dG(x) \\ & = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x)) dG(x) = \int_0^{+\infty} G(x) d\Phi(x), \end{aligned}$$

где Φ — функция распределения стандартной нормальной с.в. λ . Остается заметить, что $\int_0^{+\infty} G d\Phi < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\int_{\mathbf{R}} f d\Phi < +\infty$. В любом случае $\int_0^{+\infty} G d\Phi = \int_{\mathbf{R}} f d\Phi$.

Доказательство следствия 3. Сначала отметим, что рассматриваемые супремумы случайных процессов понимаются как структурные супремумы. Пространство L^0 всех случайных величин с обычным отношением порядка является условно-полной решеткой, причем супремум любого ограниченного подмножества $K \subset L^0$ есть супремум некоторого счетного подмножества K . Так что в следствии 3 можно считать параметрическое множество T счетным. Сначала покажем, что

$$\sup_t x(t) < +\infty \text{ п.н.} \iff E \sup_t x(t) < +\infty,$$

и то же самое верно для $y(t)$.

Если $E \sup_t x(t) < +\infty$, то, очевидно, $\sup_t x(t) < +\infty$ п.н. Обратно, пусть, не умаляя общности, $|\xi_n| \leq 1$ п.н., $n \geq 1$. Так как $W = \sup_t x(t) < +\infty$ п.н., то, очевидно,

и дисперсии $Dx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)|^2 D\xi_1$ ограничены некоторой постоянной σ^2 . Положим $f_n(x) = \sup_t \sum_{k=1}^n a_k(t) x_k$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Эта функция выпукла и липшицева, причем $\|f_n\|_{\text{Lip}} \leq \sigma$. По теореме 2 имеем $Df_n \leq 2\sigma^2$. Предположим сначала, что T конечно. Так как $f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow W$ при $n \rightarrow \infty$ п.н., получаем (например, по лемме Фату), что $DW \leq 2\sigma^2$. Если $T = \{t_n: n \geq 1\}$ бесконечно, то, рассматривая с.в. $W_n = \sup_{1 \leq k \leq n} x(t_k)$ и пользуясь тем, что $W_n \rightarrow W$ при $n \rightarrow \infty$, $DW_n \leq 2\sigma^2$, получаем $DW \leq 2\sigma^2$ в общем случае. В частности, $EW < +\infty$ (чтобы не определять дисперсию через EW , следует использовать тождество $DW = \frac{1}{2} E|W - W'|$, где W' — независимая копия W).

По теореме 1 $E \sup_t x(t) < +\infty \iff E \sup_t y(t) < +\infty$. Действительно, для любой выпуклой функции $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ неравенство (4) дает

$$Ef\left(\frac{\xi}{c}\right) \leq Ef\left(\frac{\eta}{d}\right), \quad (14)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $c = \text{ess sup} |\xi_1|$, $d = E|\eta_1 - m(\eta_1)|$. Применяя (14) к f_n и пользуясь однородностью, приходим к неравенству $E f_n(\xi) \leq (c/d) E f_n(\eta)$. Так как это неравенство не зависит от размерности, его можно распространить и на бесконечномерный случай.

В заключение автор хотел бы поблагодарить анонимного рецензента за внимательное прочтение и полезные комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ledoux M. Isoperimetry and Gaussian Analysis. — In: Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour, 1994.
2. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
3. Феллс Р. Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968.
4. Choquet G. Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts. — Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 1960, v. 10, p. 333–344.

Поступила в редакцию
6.VI.1994

© 1996 г.

ДОКУЧАЕВ Н. Г.*

ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В ЗАДАЧЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹⁾

Рассмотрена задача об оптимальной остановке марковского процесса с конечным числом ограничений на распределение в момент остановки. Установлена двойственность (совпадение минимакса и максимина соответствующего лагранжиана) для задачи с рандомизированным начальным значением процесса, а также для детерминированного начального значения.

*С.-Петербургский университет, матем.-мех. факультет, 198904 Петродворец, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке гранта Госкомвуза РФ (раздел 50.03.00).