Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Регаццини, В. В. Сазонов, Аппроксимация распределений случайных вероятностей смесями распределений Дирихле с приложениями к непараметрическим байесовским статистическим выводам, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 103–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:58:24

© 2000 г.

РЕГАЦЦИНИ Е.* , САЗОНОВ В.В.**

**АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ СМЕСЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИРИХЛЕ
С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИМ
БАЙЕСОВСКИМ СТАТИСТИЧЕСКИМ ВЫВОДАМ¹⁾**

В общей ситуации, характерной для непараметрического байесовского статистического анализа, когда наблюдения перестановочны и принимают значения в некотором польском пространстве X , априорные распределения аппроксимируются (в метрике Прохорова) с любой степенью точности явно конструируемыми смесями распределений процессов Дирихле. Показывается, что если такие смеси $\mathcal{P}_n$ слабо сходятся к некоторому заданному априорному распределению $\mathcal{P}$, то отвечающие $\mathcal{P}_n$ апостериорные распределения слабо сходятся к апостериорному распределению, отвечающему $\mathcal{P}$. При некоторых дополнительных ограничениях оценивается также точность аппроксимации. Эти результаты лежат в основе предлагаемого метода выбора априорного распределения, а также используются для аппроксимации предсказательного распределения (в вариационной метрике) и апостериорной функции распределения функционала $\int \psi d\tilde{p}$ (в метрике Леви), где $\tilde{p}$ есть случайная вероятность с распределением $\mathcal{P}$.

Ключевые слова и фразы: аппроксимация априорных и апостериорных распределений, распределения Дирихле, процессы Дирихле, выбор априорного распределения, метрика Леви, метрика Прохорова, случайные меры.

1. Введение. В статье изучается аппроксимация (в метрике Прохорова) априорного вероятностного распределения (в.р.) подходящей конечной смесью вероятностных мер (в.м.) Дирихле, определенных на множестве всех в.м., заданных на произвольном польском выборочном пространстве X . Кроме этого, для наблюдений, образующих перестановочную последовательность, оцениваются расстояния (также в метрике

*Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, via Ferrata 1, 27100 Pavia, e CNR-IAMI, Milano, Italia; e-mail: eugenio@dimat.unipv.it

**Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: sazonov@mi.ras.ru

¹⁾ Первый автор поддержан Progetto Strategico CNR (Decisioni statistiche: teoria e applicazioni) и Università «L. Bocconi» (Ricerca di base, 1997); второй автор поддержан the Cariplo Foundation for Scientific Research и проводил исследования во время пребывания в IMQ-Università «L. Bocconi», Milano.

Прохорова) от апостериорного в.р. до апостериорных в.р., отвечающих указанным выше смесям в.м. Дирихле. Вероятностные меры Дирихле и их смеси весьма популярны в байесовской статистике. Одна из основных причин этого — тот факт, что апостериорное распределение, отвечающее априорному в.р. Дирихле (соответственно, являющемуся смесью в.р. Дирихле), само также есть в.р. Дирихле (соответственно, смесь в.р. Дирихле).

Материал статьи организован следующим образом. В п. 2 собраны некоторые полезные предварительные сведения. Отметим среди них определение и описание нескольких свойств гомеоморфизма, делающего строгим переход от априорного в.р., заданного на семействе всех в.м. на конечном множестве $X = \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$, к соответствующему априорному в.р. на k -мерном мультиномиальном параметре. В п. 3 мы определяем два типа дискретизации случайной вероятностной меры (с.в.м.) и оцениваем расстояние Прохорова между законом исходной с.в.м. и законами каждой из ее дискретизаций (предложение 1). Далее в п. 3 мы изучаем близость, в той же метрике, закона каждой из дискретизаций к подходящей смеси в.р. Дирихле. Результаты проведенного анализа суммируются в теореме 1. Теорема 2 в п. 4 представляет собой первую попытку количественного анализа близости апостериорных в.р., отвечающих некоторому априорному в.р., и смеси в.м. Дирихле, которая, по теореме 1, аппроксимирует исходное априорное вероятностное распределение. В действительности, однако, теорема 2 не содержит оценки близости апостериорных в.р. в какой-либо метрике, она утверждает лишь п.н. слабую сходимость, когда дискретизации становятся все более и более тонкими. Метрическая оценка близости апостериорных в.р. приводится в п. 5, где используется иная дискретизация, а также предполагаются выполненными некоторые дополнительные ограничения. Вторая часть п. 5 содержит ряд иллюстративных примеров. В заключительной части этого пункта рассматриваются задачи аппроксимации предсказательного в.р. и апостериорного в.р. функционала $\int \psi d\tilde{p}$, где $\tilde{p}$ есть некоторая случайная вероятностная мера. В п. 6 обсуждаются возможные применения некоторых из результатов, полученных в предыдущих пунктах. В частности, показывается, что теорема 1 может быть использована для выбора априорного распределения.

Феномен близости двух апостериорных в.р., отвечающих двум близким априорным в.р., изучался также Краскером в [11] и Андреевым и Арьясом в [2]. Краскер рассматривал доминированное семейство вероятностей и, при выполнении некоторых довольно сильных ограничений на априорные в.р., показал, что если априорные в.р. близки в метрике Прохорова на «большом множестве», то их апостериорные распределения тоже близки в этой же метрике. Андреев и Арьяс рассматривали некоторое специальное доминированное семейство вероятностей — веро-

ятности с непрерывными справа и имеющими конечные пределы слева плотностями по отношению к мере Лебега на $\mathbf{R}$, и, при выполнении ряда естественных условий, доказали, что если некоторая последовательность априорных в.р., сосредоточенных на ступенчатых функциях, слабо сходится к заданному в.р., то то же самое верно и для соответствующих апостериорных вероятностных распределений. Наши результаты по этой проблеме, содержащиеся в п. 4, имеют гораздо более широкую область применения.

2. Предварительные сведения. Всюду ниже X обозначает некоторое польское пространство с метрикой d_X . Если T — топологическое пространство, то $\mathcal{B}(T)$ будет обозначать его борелевскую σ -алгебру. Основным нашим вероятностным пространством будет $(X^\infty, \mathcal{B}(X^\infty), P)$, причем координатные случайные элементы $(\xi_n)_{n \geq 1}$ пространства X^∞ предполагаются *перестановочными* (см., например, [1]) относительно P . Класс всех в.м. на $(X, \mathcal{B}(X))$, обозначаемый M , наделяется борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(M)$, порожденной метрикой Прохорова d (по поводу d см. оригинальную работу Прохорова [12], либо [8]). Для любого натурального n

$$\tilde{e}_n(A) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\xi_i}(A) \quad (A \in \mathcal{B}(X))$$

есть пример с.в.м. на $(X, \mathcal{B}(X))$. Согласно общему определению, с.в.м. на $(X, \mathcal{B}(X))$ есть измеримое отображение пространства $(X^\infty, \mathcal{B}(X^\infty))$ в $(M, \mathcal{B}(M))$.

Перечислим некоторые основные факты, касающиеся перестановочных последовательностей.

(α) Существует с.в.м. $\tilde{p}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{e}_n, \tilde{p}) = 0 \quad P\text{-н.н.}$$

Справедлива теорема представления де Финетти, т.е. следующие утверждения эквивалентны:

(β) $\xi_1, \xi_2, \dots$ перестановочны.

(γ) Существует с.в.м. $\tilde{p}$ на $(X, \mathcal{B}(X))$ такая, что

$$P(\xi \in B \mid \tilde{p}) = \tilde{p}^\infty(B) \quad P\text{-н.н.} \quad (B \in \mathcal{B}(X^\infty)),$$

где $\xi := (\xi_n)_{n \geq 1}$ и $\tilde{p}^\infty$ есть счетное произведение $\tilde{p}$ на себя.

(δ) Существует единственная в.м. $\mathcal{P}$ на $(M, \mathcal{B}(M))$ такая, что

$$P(\xi \in B) = \int_M p^\infty(B) \mathcal{P}(dp) \quad (B \in \mathcal{B}(X^\infty));$$

мера $\mathcal{P}$ называется мерой де Финетти последовательности $\xi := (\xi_n)_{n \geq 1}$ и совпадает с в.р. случайной в.м. $\tilde{p}$.

Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ перестановочны, то $\tilde{p}$ в (α) и в (γ) совпадают Р-п.н.

Доказательства этих утверждений можно найти, например, в [1].

Мера де Финетти $\mathcal{P}$ в терминах байесовской статистики есть априорное в.р. в непараметрической ситуации.

Пусть Y_i — независимые случайные величины с распределениями $\Gamma(\alpha_i, 1)$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha' = \sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$ (когда $\alpha_i = 0$, мы полагаем $\Gamma(\alpha_i, 1) = \delta_0$). Совместное распределение величин $Z_i = Y_i / \sum_{j=1}^n Y_j$, $i = 1, \dots, n-1$, обозначают $\mathcal{D}^{(\alpha')}(\cdot; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ и называют *распределением Дирихле* с параметром $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Далее, пусть α — мера на $(X, \mathcal{B}(X))$ такая, что $0 < \alpha(X) < \infty$. С.в.м. называется *процессом Дирихле* (см. [9]) или с.в.м. Дирихле с параметром α , если для любого конечного измеримого разбиения $\{A_1, \dots, A_n\}$ пространства X вектор $(\tilde{p}(A_1), \dots, \tilde{p}(A_{n-1}))$ имеет распределение $\mathcal{D}^{(\alpha(X))}(\cdot; \alpha(A_1), \dots, \alpha(A_{n-1}))$. Распределение на $(M, \mathcal{B}(M))$, отвечающее процессу Дирихле с параметром α , обозначим $\mathcal{D}(\cdot; \alpha)$.

Пусть теперь a_i — произвольные элементы пространства X ($i = 1, \dots, k+1$), и пусть M_1 обозначает замкнутое подмножество пространства M , состоящее из всех в.м. вида $\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \delta_{a_i}$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in T_k$, $\theta_{k+1} = 1 - |\theta|$, $|\theta| = \sum_{i=1}^k \theta_i$ и

$$T_k = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \mathbf{R}^k: \theta_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad \sum_{i=1}^k \theta_i \leq 1 \right\}.$$

Рассмотрим функцию $t: M_1 \rightarrow T_k$, отображающую $\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \delta_{a_i}$ в θ . Покажем, что

(ε) $t: M_1 \rightarrow T_k$ есть гомеоморфизм и, более того,

$$\frac{1}{2} \|\theta - \theta'\| \leq d(\bar{\theta}, \bar{\theta}') \leq \sqrt{k} \|\theta - \theta'\|$$

для любых θ, θ' из T_k , где $\|\cdot\|$ есть евклидова норма в $\mathbf{R}^k$, d есть метрика Прохорова в M и $\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \delta_{a_i} = t^{-1}(\theta)$, $\bar{\theta}' = \sum_{i=1}^{k+1} \theta'_i \delta_{a_i} = t^{-1}(\theta')$.

Для доказательства этого утверждения достаточно, конечно, доказать справедливость неравенств между метриками. С этой целью заметим, что для любого $E \subset X$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \delta_{a_i}(E) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \theta'_i \delta_{a_i}(E) + \sum_{i=1}^{k+1} (\theta_i - \theta'_i)^+.$$

Отсюда легко следует, что

$$d(\bar{\theta}, \bar{\theta}') = \sum_{i=1}^{k+1} (\theta_i - \theta'_i)^+ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k+1} |\theta_i - \theta'_i|.$$

Следовательно,

$$\|\theta - \theta'\| \leq \sum_{i=1}^k |\theta_i - \theta'_i| \leq 2d(\bar{\theta}, \bar{\theta}').$$

С другой стороны, поскольку $2d(\bar{\theta}, \bar{\theta}') = \sum_{i=1}^k |\theta_i - \theta'_i| + |\sum_{i=1}^k (\theta_i - \theta'_i)|$, то

$$d(\bar{\theta}, \bar{\theta}') \leq \sum_{i=1}^k |\theta_i - \theta'_i| \leq \sqrt{k} \|\theta - \theta'\|.$$

Ниже нам потребуется следующий факт, непосредственно вытекающий из (ε).

(ζ) Для любого подмножества E множества T_k и любого $\varepsilon > 0$

$$E^\varepsilon \subset t\left((t^{-1}(E))^{\varepsilon\sqrt{k}}\right) \quad \text{и} \quad t\left((t^{-1}(E))^\varepsilon\right) \subset E^{2\varepsilon},$$

где A^ε обозначает множество всех элементов с расстоянием до A , не превосходящим ε .

Определим $\mu^{(n)}$, положив

$$\mu^{(n)}(A) = \mathbf{E}(\tilde{p}^n(A)) \quad (A \in \mathcal{B}(X^n), \tilde{p}^n = \underbrace{\tilde{p} \times \dots \times \tilde{p}}_n),$$

и пусть $x^{(n)} \mapsto \mathcal{P}(\cdot; x^{(n)})$, $x^{(n)} \in X^n$, есть регулярное условное в.р. $\tilde{p}$ при условии $\{\xi^{(n)} = x^{(n)}\}$, где $\xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Наконец, сделаем еще одно замечание, которое будет полезным впоследствии. Предположим, что значения $\tilde{p}$ принадлежат M_1 . Тогда $\tilde{p} = \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{p}(a_i) \delta_{a_i}$ и для ее распределения $\mathcal{P}$ на $(M, \mathcal{B}(M))$ мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &= \mathcal{P}(E \cap M_1) = P(\tilde{p} \in E \cap M_1) \\ &= P((\tilde{p}(a_1), \dots, \tilde{p}(a_k)) \in t(E \cap M_1)) = P_F(t(E \cap M_1)), \end{aligned}$$

где P_F есть распределение случайного вектора $(\tilde{p}(a_1), \dots, \tilde{p}(a_k))$.

3. Аппроксимация априорных вероятностных распределений смесями вероятностных распределений Дирихле. Поскольку пространство X сепарабельно, для любого $\varepsilon > 0$ существует его вполне ограниченное подмножество K_ε такое, что $\mu(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon^2$, где для простоты мы пишем μ вместо $\mu^{(1)}$ (см., например, доказательство теоремы 1.4 в [3]). Пусть $\{A_1, \dots, A_k\}$ есть измеримое разбиение K_ε такое, что $\varepsilon \geq \text{diam}(A_i) := \sup_{x,y \in A_i} d_X(x,y)$ при всех $i = 1, \dots, k$. Случайную в.м.

$$\tilde{p}_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{p}(A_i) \delta_{a_i}, \quad (3.1)$$

где $A_{k+1} := K_\varepsilon^c$ и a_i есть фиксированная точка из A_i ($i = 1, \dots, k+1$), назовем (ε, μ) -дискретизацией $\tilde{p}$.

Чтобы избежать использования μ при построении разбиения, входящего в определение $\tilde{p}_\varepsilon$, можно использовать тот факт, что сепарабельность влечет существование эквивалентной вполне ограниченной метрики d'_X в X . Если X рассматривать с метрикой d'_X , то для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное измеримое разбиение — для простоты мы обозначим его по-прежнему $\{A_1, \dots, A_{k+1}\}$ — такое, что $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$ ($i = 1, \dots, k+1$). Отвечающее этому разбиению $\tilde{p}_\varepsilon$ назовем ε -вполне ограниченной дискретизацией $\tilde{p}$. Когда рассматривается ε -вполне ограниченная дискретизация, метрика Прохорова в M определяется относительно d'_X . Следует отметить, что использование метрики d'_X вместо d_X может исказить картину наблюдений, например, когда представляют интерес попарные расстояния между наблюдениями.

Всюду в дальнейшем $\mathcal{P}_\varepsilon$ и F_ε обозначают, соответственно, в.р. случайной в.м. $\tilde{p}_\varepsilon$ и функцию распределения (ф.р.) случайного вектора $(\tilde{p}(A_1), \dots, \tilde{p}(A_k))$. В следующем предложении оценивается близость $\mathcal{P}_\varepsilon$ и $\mathcal{P}$.

Предложение 1. Если $\tilde{p}_\varepsilon$ есть (ε, μ) - или ε -вполне ограниченная дискретизация $\tilde{p}$, то $d(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$.

Доказательство. Если A, B суть замкнутые подмножества M и X соответственно, а $\tilde{p}_\varepsilon$ есть вполне ограниченная дискретизация, то

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\varepsilon(B) &= \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{p}(A_i) \delta_{a_i}(B) = \sum_{\{i: a_i \in B\}} \tilde{p}(A_i) \\ &\leq \tilde{p}(B^{\varepsilon}) \quad \left[\text{поскольку } \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon, \forall i \right], \end{aligned}$$

и поэтому $d(\tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}) \leq \varepsilon$. Следовательно, если $\tilde{p} \in A$, то $\tilde{p}_\varepsilon \in A^{\varepsilon}$ и

$$\mathcal{P}(A) = P(\{\tilde{p} \in A\}) \leq P(\{\tilde{p}_\varepsilon \in A^{\varepsilon}\}) = \mathcal{P}_\varepsilon(A^{\varepsilon}),$$

что влечет $d(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$.

Если $\tilde{p}_\varepsilon$ есть (ε, μ) -дискретизация $\tilde{p}$, то положим

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in X^\infty: \tilde{p}(A_{k+1}) \leq \varepsilon\}$$

и заметим, что по неравенству Маркова

$$\mathcal{P}(A) \leq P(\{\tilde{p} \in A\} \cap \Omega_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Поскольку при $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\tilde{p}_\varepsilon(B) \leq \sum_{\{i \leq k: a_i \in B\}} \tilde{p}(A_i) + \varepsilon \leq \tilde{p}(B^{\varepsilon}) + \varepsilon,$$

для таких x мы имеем $d(\tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}) \leq \varepsilon$, так что

$$P(\{\tilde{p} \in A\} \cap \Omega_\varepsilon) \leq P(\tilde{p}_\varepsilon \in A^\varepsilon) = \mathcal{P}_\varepsilon(A^\varepsilon).$$

Предложение 1 доказано.

Пусть M_ε есть класс всех $p \in M$ с носителем, содержащимся в множестве точек $\{a_1, \dots, a_{k+1}\}$, использованном при определении дискретизаций, и пусть $t: M_\varepsilon \rightarrow T_k$ есть гомеоморфизм, определенный как в предыдущем пункте. Тогда, как было отмечено в конце предыдущего пункта,

$$\mathcal{P}_\varepsilon(E) = \mathcal{P}_\varepsilon(E \cap M_\varepsilon) = P_{F_\varepsilon}(t(E \cap M_\varepsilon)) \quad (E \in \mathcal{B}(M)).$$

Как показано в разделе 4 нашей работы [13], P_{F_ε} может быть приближена смесью

$$\varphi_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon)}(B) = \sum_{\nu} P_{F_\varepsilon}(\Delta_\nu) \mathcal{D}^{(\lambda)}(B; \mu(\nu)) \quad (B \in \mathcal{B}([0, 1]^k)),$$

где $\mu(\nu) = (\mu_1, \dots, \mu_k)$, $\mu_i = \lambda \tau_i$ ($i = 1, \dots, k$),

$$\tau_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu_i = 0, \\ \frac{\nu_i - b_k}{N}, & \text{если } \nu_i \geq 1, \end{cases} \quad i = 1, \dots, k,$$

$\nu \in I := \{(\nu_1, \dots, \nu_k) \in \{0, 1, \dots, N\}^k: |\nu| \leq N + k - 1\}$, $\Delta_\nu = \times_{i=1}^k ((\nu_i - 1)/N, \nu_i/N]$, b_k — рациональное число из интервала $((k-1)/k, 1)$ и λ — натуральное число такое, что

$$\lambda \geq 1 + \frac{N^2}{2g_k^2} \ln \frac{2k}{\varepsilon}, \quad \mu_i \in \mathbf{N} \quad (\nu \in I \text{ с } \nu_i \geq 1, i = 1, \dots, k), \quad (3.2)$$

где $g_k = b_k \wedge (1 - b_k)$. Определим теперь

$$\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon)}(E) := \sum_{\nu} P_{F_\varepsilon}(\Delta_\nu) \mathcal{D}(E; \alpha_{\mu(\nu)}) \quad (E \in \mathcal{B}(M)) \quad (3.3)$$

с ν, λ, μ такими же, как выше, и $\alpha_{\mu(\nu)} := \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i \delta_{a_i}$, и отметим, что

$$\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon)}(E) = \varphi_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon)}(t(E \cap M_\varepsilon)) \quad (E \in \mathcal{B}(M)).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu} P_{F_\varepsilon}(\Delta_\nu) \mathcal{D}(E; \alpha_{\mu(\nu)}) \\ &= \sum_{\nu} P_{F_\varepsilon}(\Delta_\nu) \mathcal{D}(E \cap M_\varepsilon; \alpha_{\mu(\nu)}) \\ & \quad \left[\text{поскольку носитель } \mathcal{D}(\cdot; \alpha_{\mu(\nu)}) \text{ принадлежит } M_\varepsilon \right] \\ &= \varphi_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon)}(t(E \cap M_\varepsilon)). \end{aligned}$$

Установив связь между $\mathcal{P}_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}$ и $\varphi_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}$, мы теперь в состоянии доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если $\tilde{p}_\varepsilon$ есть либо (ε, μ) -, либо ε -вполне ограниченная дискретизация $\tilde{p}$ и если в.м. $\mathcal{P}_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}$ определена равенством (3.3) с $N > k/\varepsilon$ и λ , удовлетворяющим (3.2), то $d(\mathcal{P}, \mathcal{P}_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}) \leq 2\varepsilon$.

Доказательство. Для любого замкнутого $E \subset M$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}(E) &= \mathcal{P}_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}(E \cap M_\varepsilon) = \varphi_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}(t(E \cap M_\varepsilon)) \\ &\leq P_{F_\varepsilon} \left((t(E \cap M_\varepsilon))^{\sqrt{k}/N} \right) + \varepsilon \\ &\quad \left[\text{ср. доказательство теоремы 1 в [13]} \right] \\ &= \mathcal{P}_\varepsilon \left(t^{-1} \left((t(E \cap M_\varepsilon))^{\sqrt{k}/N} \right) \right) + \varepsilon \\ &\leq \mathcal{P}_\varepsilon \left((E \cap M_\varepsilon)^{k/N} \right) + \varepsilon \quad [\text{в силу } (\zeta)]. \end{aligned}$$

Следовательно, $d(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{P}_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}) \leq \varepsilon$ при $N > k/\varepsilon$ и

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P}, \mathcal{P}_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}) &\leq d(\mathcal{P}, \mathcal{P}_\varepsilon) + d(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{P}_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon)}) \\ &\leq 2\varepsilon \quad [\text{по предложению 1}]. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

4. Аппроксимация апостериорного вероятностного распределения: общий случай. В настоящем пункте предполагается, что пространство X вполне ограничено. Рассмотрим последовательность конечных измеримых разбиений X

$$\Pi_m = \{A_{m,1}, \dots, A_{m,k_m+1}\} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

и положим

$$\varepsilon_m = \max_{1 \leq i \leq k_m+1} \text{diam}(A_{m,i}).$$

Введем следующие условия:

$$\Pi_{m+1} \text{ есть измельчение } \Pi_m \text{ для всех } m; \quad (4.1)$$

$$\mathcal{B}(X) \text{ порождается классом множеств } \cup_m \Pi_m; \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_m \downarrow 0 \text{ при } m \rightarrow +\infty. \quad (4.3)$$

Ясно, что при всех p из M и m из N

$$p_{\varepsilon_m} := \sum_{i=1}^{k_m+1} p(A_{m,i}) \delta_{a_{m,i}} \quad (a_{m,i} \in A_{m,i}; i = 1, \dots, k_m+1)$$

есть ε_m -вполне ограниченная дискретизация p . Для любых фиксированных n и m из $\mathbb{N}$ определим случайные элементы $\xi_{r,m}$ ($1 \leq r \leq n$) на X^∞ , положив

$$\xi_{r,m}(x) = a_{m,i}, \quad \text{если } x_r \in A_{m,i} \quad (i = 1, \dots, k_m + 1; r = 1, \dots, n),$$

и для каждого $j = (j_1, \dots, j_n)$ из $\{1, \dots, k_m + 1\}^n$ обозначим $R_{m,j}$ прямоугольник $A_{m,j_1} \times \dots \times A_{m,j_n}$. Эти прямоугольники образуют разбиение X^n , которое порождает σ -алгебру $\mathcal{X}_m^n$. Положим теперь $\xi_m^{(n)} = (\xi_{1,m}, \dots, \xi_{n,m})$ и рассмотрим регулярное условное в.р. ξ при заданном $\xi_m^{(n)}$,

$$x \mapsto P(\cdot | \xi_m^{(n)})(x) \quad (x \in X^\infty),$$

считая при этом, не теряя существенной общности, что $\mu^{(n)}(R_{m,j}) > 0$ при всех j . Имеем п.н.

$$\begin{aligned} & P(\tilde{p} \in A | \xi_m^{(n)})(x) \\ &= \sum_j \mathbf{1}_{R_{m,j}}(x^{(n)}) \frac{\int_A p^n(R_{m,j}) \mathcal{P}(dp)}{\mu^{(n)}(R_{m,j})} \quad (A \in \mathcal{B}(M), x \in X^\infty), \end{aligned}$$

где, как обычно, $x^{(n)}$ при $x = (x_1, x_2, \dots)$ означает $(x_1, \dots, x_n)$. Отметим, что это условное в.р. для каждого x зависит лишь от $x^{(n)}$, и покажем, что при выполнении (4.1)–(4.2) оно сходится к $\mathcal{P}(\cdot; x^{(n)})$ п.н.

Предложение 2. При выполнении условий (4.1)–(4.2) существует множество $\mathcal{N}$ из $\mathcal{B}(X^n)$ такое, что $\mu^{(n)}(\mathcal{N}) = 0$ и

$$d(P(\tilde{p} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x), \mathcal{P}(\cdot; x^{(n)})) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty$$

для всех x из X^∞ с $x^{(n)} \in \mathcal{N}^c$. (Отметим, что разбиения, удовлетворяющие (4.1)–(4.2), существуют в любом сепарабельном метрическом пространстве.)

Доказательство. Поскольку $\xi_m^{(n)}$ порождает σ -алгебру $\{A \times X^\infty: A \in \mathcal{X}_m^n\}$, $\mathcal{X}_m^n \subset \mathcal{X}_{m+1}^n$ ($m = 1, 2, \dots$) и $\bigcup_m \mathcal{X}_m^n$ порождает $\mathcal{B}(X^n)$, имеем

$$P(\tilde{p} \in A | \xi_m^{(n)})(x) \rightarrow \mathcal{P}(A; x^{(n)}) \quad (m \rightarrow +\infty)$$

для всех x таких, что $x^{(n)} \in \mathcal{N}_A^c$, где множество $\mathcal{N}_A$ таково, что $\mu^{(n)}(\mathcal{N}_A) = 0$ (см., например, теорему 35.6 в [4]). Рассмотрим теперь класс $\mathcal{J}$ всех конечных пересечений шаров в M с рациональными радиусами и центрами в точках некоторого счетного плотного подмножества M . Ясно, что $\mu^{(n)}(\bigcup_{A \in \mathcal{J}} \mathcal{N}_A) = 0$ и для любого x с $x^{(n)} \in (\bigcup_{A \in \mathcal{J}} \mathcal{N}_A)^c$ и любого A из $\mathcal{J}$, согласно доказанному выше, имеем $P(\tilde{p} \in A | \xi_m^{(n)})(x) \rightarrow \mathcal{P}(A; x^{(n)})$ при $m \rightarrow +\infty$. Утверждение предложения вытекает теперь из следствия 1 теоремы 2.2 в [3], если положить $\mathcal{N} = \bigcup_{A \in \mathcal{J}} \mathcal{N}_A$.

Предложение 2 утверждает, что $\mathcal{P}(\cdot; x^{(n)})$ можно аппроксимировать посредством $P(\tilde{p} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x)$ для почти всех $x^{(n)}$. В свою очередь, последнее выражение можно аппроксимировать посредством

$$P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in A | \xi_m^{(n)})(x) = \sum_j \mathbf{1}_{R_{m,j}}(x^{(n)}) \frac{\int_A p^n(R_{m,j}) \mathcal{P}_{\varepsilon_m}(dp)}{\int_M p^n(R_{m,j}) \mathcal{P}_{\varepsilon_m}(dp)} \quad (A \in \mathcal{B}(M)).$$

Это обстоятельство имеет важное значение в связи с возможностью аппроксимировать $P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x)$ апостериорными распределениями, отвечающими смесям распределений Дирихле.

Предложение 3. Для любого x из X^∞

$$d(P(\tilde{p} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x), P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x)) \leq \varepsilon_m.$$

Доказательство. То же рассуждение, что было использовано при доказательстве предложения 1, показывает, что

$$d(p_{\varepsilon_m}, p) \leq \varepsilon_m. \quad (4.4)$$

Далее, для любого замкнутого $A \subset M$, поскольку $p_{\varepsilon_m}(R_{m,j}) = p(R_{m,j})$, имеем

$$\int_A p^n(R_{m,j}) \mathcal{P}_{\varepsilon_m}(dp) = \int_{\{p: p_{\varepsilon_m} \in A\}} p^n(R_{m,j}) \mathcal{P}(dp),$$

и поэтому

$$\begin{aligned} P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in A | \xi_m^{(n)})(x) &= \sum_j \mathbf{1}_{R_{m,j}}(x^{(n)}) \frac{\int_{\{p: p_{\varepsilon_m} \in A\}} p^n(R_{m,j}) \mathcal{P}(dp)}{\mu^{(n)}(R_{m,j})} \\ &\leq \sum_j \mathbf{1}_{R_{m,j}}(x^{(n)}) \frac{\int_{A^{\varepsilon_m}} p^n(R_{m,j}) \mathcal{P}(dp)}{\mu^{(n)}(R_{m,j})} \quad [\text{в силу (4.4)}] \\ &= P(\tilde{p} \in A^{\varepsilon_m} | \xi_m^{(n)})(x). \end{aligned}$$

Предложение 3 доказано.

Объединяя предложения 2 и 3, мы получаем, что справедливо утверждение:

При выполнении условий (4.1)–(4.3)

$$P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x) \Rightarrow \mathcal{P}(\cdot; x^{(n)}) \quad \text{при } m \rightarrow +\infty, \text{ } P\text{-п.н.}$$

Однако вопрос о том, как выбрать m , не накладывая никаких дополнительных условий, чтобы расстояние Прохорова между двумя этими распределениями было меньше заданного $\varepsilon > 0$, по-прежнему остается открытым. Мы вернемся к этой и смежным темам в следующем пункте. Оставшаяся часть настоящего пункта посвящена аппроксимации

$P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x)$ посредством апостериорных распределений, отвечающих конечным смесям в.р. Дирихле, подобно тому, как это делалось в специальном случае в разделе 5 нашей работы [13].

Пусть (как в пп. 2 и 3) t_m — гомеоморфизм между $M_{\varepsilon_m} := \{\sum_{i=1}^{k_m} \theta_i \delta_{a_{m,i}} + (1 - |\theta|) \delta_{a_{m,k_m+1}} : \theta \in T_{k_m}\}$ и T_{k_m} . Тогда для любого x из X^∞ с $x^{(n)} \in R_{m,j}$ и для любого A из $\mathcal{B}(M)$ имеем

$$\begin{aligned} P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in A | \xi_m^{(n)})(x) &= \frac{\int_{t_m(A \cap M_{\varepsilon_m})} \theta_1^{n_1} \dots \theta_{k_m}^{n_{k_m}} (1 - |\theta|)^{n_{k_m+1}} dF_{\varepsilon_m}(\theta)}{\int_{T_{k_m}} \theta_1^{n_1} \dots \theta_{k_m}^{n_{k_m}} (1 - |\theta|)^{n_{k_m+1}} dF_{\varepsilon_m}(\theta)} \\ &:= Q^{(\varepsilon_m)}(t_m(A \cap M_{\varepsilon_m}); x^{(n)}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $n_i = \sum_{r=1}^n \delta_{a_{m,i}}(\xi_{r,m}(x))$ ($i = 1, \dots, k_m + 1$). Выражение (4.5) имеет ту же структуру, что и апостериорное распределение, отвечающее ф.р. F , в разделе 5 нашей работы [13] с

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon_m} &\text{ вместо } F, \\ T_{k_m} &\text{ вместо } T_k, \\ (a_{m,1}, \dots, a_{m,k_m+1}) &\text{ вместо } (a_1, \dots, a_{k+1}). \end{aligned}$$

Далее, как в [13], определим

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon_m)}(B; x^{(n)}) &:= \frac{1}{\sum_{\nu} P_{F_{\varepsilon_m}}(\Delta_{\nu}) \gamma_{\nu}} \\ &\times \sum_{\nu} P_{F_{\varepsilon_m}}(\Delta_{\nu}) \gamma_{\nu} \mathcal{D}^{(\lambda+n)}(B; \mu_1 + n_1, \dots, \mu_{k_m} + n_{k_m}) \end{aligned}$$

($B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{k_m})$), где

$$\gamma_{\nu} = \frac{(\mu_1)_{n_1} \dots (\mu_k)_{n_k} (\lambda - |\mu|)_{n_{k+1}}}{(\lambda)_n}$$

и

$$(a)_i = \begin{cases} a(a+1) \dots (a+i-1) & [i = 1, 2, \dots], \quad (a)_0 = 1, \text{ если } a > 0, \\ \delta_0(i), & \text{если } a = 0, \end{cases}$$

и положим

$$\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon_m)}(A; x^{(n)}) := \varphi_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon_m)}(t_m(A \cap M_{\varepsilon_m}); x^{(n)}) \quad (A \in \mathcal{B}(M)).$$

Отметим, что правая часть в последнем выражении может быть записана в виде

$$\begin{aligned} &\varphi_{\lambda,\mu}^{(\varepsilon_m)}(t_m(A \cap M_{\varepsilon_m}); x^{(n)}) \\ &= \frac{1}{\sum_{\nu} P_{F_{\varepsilon_m}}(\Delta_{\nu}) \gamma_{\nu}} \sum_{\nu} P_{F_{\varepsilon_m}}(\Delta_{\nu}) \gamma_{\nu} \mathcal{D} \left(A; \sum_{j=1}^{k_m+1} (n_j + \mu_j) \delta_{a_{m,j}} \right). \end{aligned}$$

Чтобы оценить точность аппроксимации $P(\tilde{p}_{\epsilon_m} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x)$ посредством $\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})$, достаточно теперь перефразировать теорему 3 из [13] и затем рассуждать так же, как при доказательстве теоремы 1.

Положив

$$\begin{aligned} p_n^{(\epsilon_m)}(x^{(n)}) &= \int_{T_{k_m}} \theta_1^{n_1} \dots \theta_{k_m}^{n_{k_m}} (1 - |\theta|)^{n_{k_m}+1} dF_{\epsilon_m}(\theta), \\ N_1^{(\epsilon_m)} &= (2n + k_m) \left\{ \left(1 + \frac{\epsilon^2 p_n^{(\epsilon_m)}(x^{(n)})}{(1 + \epsilon)(2 + \epsilon)} \right)^{1/(k_m+1)} - 1 \right\}^{-1}, \\ \lambda_0^{(\epsilon_m)} &= N^2 \{2g_{k_m}(1 - \epsilon)^2\}^{-1} \ln \frac{2k_m(1 + \epsilon)}{p_n^{(\epsilon)}(x^{(n)})\epsilon}, \end{aligned}$$

где $g_{k_m} = b_{k_m} \wedge (1 - b_{k_m})$, мы убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. Для любых фиксированного натурального m , $\epsilon \in (0, 1)$ и $N > N_1^{(\epsilon_m)}$ справедливо неравенство

$$d(Q^{(\epsilon_m)}(\cdot; x^{(n)}), \varphi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})) \leq \epsilon$$

при всех $\lambda > \lambda_0^{(\epsilon_m)}$.

Далее, при предположениях этой леммы для любого замкнутого $A \subset M$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(A; x^{(n)}) &= \varphi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(t_m(A \cap M_{\epsilon_m}); x^{(n)}) \\ &\leq Q^{(\epsilon_m)}((t_m(A \cap M_{\epsilon_m}))^\epsilon; x^{(n)}) + \epsilon \\ &= P(\tilde{p}_{\epsilon_m} \in t_m^{-1}((t_m(A \cap M_{\epsilon_m}))^\epsilon) | \xi_m^{(n)})(x) + \epsilon \\ &\leq P(\tilde{p}_{\epsilon_m} \in (A \cap M_{\epsilon_m})^{\sqrt{k_m \epsilon}} | \xi_m^{(n)})(x) + \epsilon \quad [\text{в силу } (\zeta)], \end{aligned}$$

откуда

$$d(\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\cdot; x^{(n)}), P(\tilde{p}_{\epsilon_m} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x)) \leq \epsilon \sqrt{k_m}. \quad (4.6)$$

Объединяя теперь предложения 2 и 3 с (4.6), получаем следующий результат:

Теорема 2. Пусть $\tilde{p}_{\epsilon_m}$ есть ϵ_m -вполне ограниченная дискретизация $\tilde{p}$, отвечающая разбиению Π_m . Тогда для любого целого $N > N_1^{(\epsilon_m)}$

$$d(P(\tilde{p} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x), \mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})) \leq \delta + \epsilon_m$$

всякий раз, когда $\lambda > \lambda_0^{(\epsilon_m)}$ и $\epsilon = \delta/\sqrt{k_m}$ в определениях $N_1^{(\epsilon_m)}$ и $\lambda_0^{(\epsilon_m)}$. Более того, если $(\Pi_m)_{m \geq 1}$ удовлетворяет условиям (4.1)–(4.3), то

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} d(\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\cdot; x^{(n)}), \mathcal{P}(\cdot; x^{(n)})) = 0 \quad \mu^{(n)}\text{-п.н.}$$

5. Аппроксимация апостериорного вероятностного распределения: дополнительные замечания. Имеются две проблемы, связанные с осуществлением процесса аппроксимации, описанного в предыдущем пункте. С одной стороны, не всегда легко явно указать эквивалентную вполне ограниченную метризацию X . С другой стороны, даже если такая эквивалентная метризация имеется в наличии, неясно, как найти такое m , чтобы расстояние $d(P(\tilde{p} \in \cdot | \xi_m^{(n)})(x), \mathcal{P}(\cdot; x^{(n)}))$ стало меньше произвольного наперед заданного числа. В связи с этим мы предлагаем в настоящем пункте иной способ дискретизаций, не использующий вполне ограниченную метризацию. При этом мы приводим также дополнительные ограничения, при выполнении которых вторая из указанных выше проблем получает свое решение. С целью упростить обозначения мы ограничиваемся случаем $n = 1$.

Дискретизации, которые мы теперь рассмотрим, зависят, вообще говоря, от наблюдаемого $x_1 (= x^{(1)})$.

Пусть $(\varepsilon_m)_{m \geq 1}$ — последовательность чисел такая, что $\varepsilon_m \downarrow 0$ ($m \rightarrow +\infty$), и предположим, что

$$x_1 \in \text{support}(\mu) \subset X. \quad (\text{A.1})$$

Далее, выберем окрестность A_m точки x_1 такую, что

$$\text{diam}(A_m) \leq \varepsilon_m. \quad (\text{A.2})$$

Тогда $\mu(A_m) > 0$ и существует компактное подмножество K_m пространства X такое, что

$$x_1 \in K_m, \quad \mu(K_m^c) \leq \varepsilon_m^2 \mu(A_m \cap K_m). \quad (\text{A.3})$$

Рассмотрим теперь измеримое разбиение $\{A_{m,2}, \dots, A_{m,k_m}\}$ компактного множества $K_m \cap A_m^c$, для которого

$$\text{diam}(A_{m,j}) \leq \varepsilon_m \quad (j = 2, \dots, k_m), \quad (\text{A.4})$$

положим

$$K_m^c = A_{m,k_m+1}, \quad A_m \cap K_m = A_{m,1}$$

и для каждого p из M определим

$$p_{\varepsilon_m} = \sum_{j=1}^{k_m+1} p(A_{m,j}) \delta_{a_{m,j}}, \quad (\text{5.1})$$

где $a_{m,j}$ принадлежит $A_{m,j}$ ($j = 1, \dots, k_m + 1$).

Дискретизация (5.1) (которую можно было бы назвать (ε, μ, x) -дискретизацией) обладает некоторыми интересными свойствами. В частности, если $C_m := \{p \in M: p(A_{m,k_m+1}) \leq \varepsilon_m\}$, то

$$p \in C_m \Rightarrow d(p, p_{\varepsilon_m}) \leq \varepsilon_m. \quad (\text{5.2})$$

Действительно, для любого замкнутого $B \subset X$ и p из C_m имеем

$$p_{\varepsilon_m}(B) \leq \sum_{\{1 \leq i \leq k_m: a_{m,i} \in B\}} p(A_{m,i}) + \varepsilon_m \leq p(B^{\varepsilon_m}) + \varepsilon_m.$$

Следовательно, для любого замкнутого $A \subset M$:

$$\begin{aligned} P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in A \mid \xi_m^{(1)})(x) &= \frac{\int_{\{p_{\varepsilon_m} \in A\}} p(A_{m,1}) \mathcal{P}(dp)}{\mu(A_{m,1})} \\ &= \frac{1}{\mu(A_{m,1})} \left\{ \int_{\{p_{\varepsilon_m} \in A\} \cap C_m} + \int_{\{p_{\varepsilon_m} \in A\} \cap C_m^c} \right\} p(A_{m,1}) \mathcal{P}(dp) \\ &\leq P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in A^{\varepsilon_m} \mid \xi_m^{(1)})(x) + \frac{\mathcal{P}(C_m^c)}{\mu(A_{m,1})} \quad [\text{в силу (5.2)}] \\ &\leq P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in A^{\varepsilon_m} \mid \xi_m^{(1)})(x) + \frac{\mu(A_{m,k_m+1})}{\varepsilon_m \mu(A_{m,1})} \quad [\text{по неравенству Маркова}] \\ &\leq P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in A^{\varepsilon_m} \mid \xi_m^{(1)})(x) + \varepsilon_m \quad [\text{в силу (A.3)}]. \end{aligned}$$

Тем самым доказано следующее утверждение:

Предложение 3'. Если x_1 удовлетворяет (A.1), то для дискретизации $\tilde{p}_{\varepsilon_m}$ случайной в.м. $\tilde{p}$, определенной в (5.1) и обладающей свойствами (A.2)–(A.4), справедливо неравенство

$$d(P(\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in \cdot \mid \xi_m^{(1)})(x), P(\tilde{p} \in \cdot \mid \xi_m^{(1)})(x)) \leq \varepsilon_m.$$

Предложение 3', по существу, совпадает с предложением 3, но в нем нет никаких ограничений на метризацию X . Следовательно, первая часть теоремы 2 остается справедливой и для разбиений, использованных при определении p_{ε_m} в (5.1). Для таких разбиений, если они удовлетворяют также условиям (4.1)–(4.2) (их нетрудно построить), справедлива и вторая часть теоремы 2.

В связи с нерешенной проблемой оценки $\mathcal{P}(\cdot; x_1)$ посредством $P(\tilde{p} \in \cdot \mid \xi_m^{(1)})(x)$, рассмотрим специальный случай, когда выполняются следующие условия.

(B.1) Существует множество $H \in \mathcal{B}(M)$, доминированное σ -конечной мерой ρ на $(X, \mathcal{B}(X))$, такое, что $\mathcal{P}(H) = 1$, причем плотность (относительно ρ) каждой меры p из H имеет эквивалентную копию $f_p(x)$, для которой отображение $(x, p) \mapsto f_p(x)$ является $\mathcal{B}(X) \otimes (\mathcal{B}(M) \cap H)$ -измеримым.

(B.2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное измеримое разбиение Π_m такое, что при $x_1 \in A_{m,j}$

$$I_{m,j} := \sup_{x \in A_{m,j}} \int_H |f_p(x) - f_p(x_1)| \mathcal{P}(dp) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_H f_p(x_1) \mathcal{P}(dp) < +\infty.$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. При выполнении (В.1)–(В.2) выполняется неравенство

$$\sup_{B \in \mathcal{B}(M)} \left| \mathcal{P}(B; x_1) - P(\tilde{p} \in B \mid \xi_m^{(1)}(x)) \right| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Действительно, для любого множества B из $\mathcal{B}(M) \cap H$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\rho(A_{m,j})} \int_B p(A_{m,j}) \mathcal{P}(dp) - \int_B f_p(x_1) \mathcal{P}(dp) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\rho(A_{m,j})} \int_{A_{m,j}} \int_B \{f_p(x) - f_p(x_1)\} \mathcal{P}(dp) \rho(dx) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_H f_p(x_1) \mathcal{P}(dp), \end{aligned}$$

откуда, после элементарных вычислений,

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{P}(B; x_1) - P(\tilde{p} \in B \mid \xi_m^{(1)}(x)) \right| \\ &= \left| \frac{\int_B f_p(x_1) \mathcal{P}(dp)}{\int_H f_p(x_1) \mathcal{P}(dp)} - \frac{\int_B p(A_{m,j}) \mathcal{P}(dp)}{\int_H p(A_{m,j}) \mathcal{P}(dp)} \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Предложение 4 доказано.

Условие (В.1) выполняется почти во всех стандартных параметрических моделях. Условие (В.2) удовлетворяется, при выполнении (4.3), при всех больших m , если, например, семейство $\{f_p(\cdot): p \in H\}$ равномерно непрерывно в x_1 . Более того, из теоремы 2 следует

Предложение 5. Если условия (В.1)–(В.2) выполняются одновременно либо с (4.3), либо с (А.1)–(А.4), и если N, λ удовлетворяют условиям, указанным в теореме 2, то

$$d(\mathcal{P}_{\lambda,m}^{(\varepsilon_m)}(\cdot; x^{(1)}), \mathcal{P}(\cdot; x^{(1)})) \leq \varepsilon + \delta + \varepsilon_m.$$

В нижеследующих примерах иллюстрируется предложение 5.

Пример 1. Пусть X есть множество всех неотрицательных целых чисел $\mathbf{R}^+$. Рассмотрим множество $H \subset M$ всех абсолютно непрерывных по мере Лебега (обозначаемой в этом примере ρ) мер, имеющих гамма-плотности $a^\gamma e^{-ax} x^{\gamma-1} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x) / \Gamma(\gamma)$ ($x \in \mathbf{R}^+$, $a > 0$, $\gamma > 0$). Включение $H \in \mathcal{B}(M)$ легко следует, например, из того, что $H = \cup_{n \geq 1} H_n$, где $H_n = \{p \in H: (a, \gamma) \in R_n\}$, $R_n = [1/n, n]^2$, и замкнутости H_n в M (последнее легко вытекает из теоремы непрерывности Леви). Предположим, что $\mathcal{P}(H) = 1$. Поскольку для любого p из H $\gamma = m_1(p)^2 \{m_2(p) - m_1(p)^2\}$, $a = m_1(p) / \{m_2(p) - m_1(p)^2\}$, где $m_k(p) = \int_X x^k p(dx)$ ($k = 1, 2$), то функция

$$f_p(x) := \frac{a^\gamma}{\Gamma(\gamma)} e^{-ax} x^{\gamma-1} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x) \quad (x \in \mathbf{R}^+, p \in H)$$

является $\mathcal{B}(X) \otimes (\mathcal{B}(M) \cap H)$ -измеримой. Таким образом, условие (В.1) выполнено. Далее, существует абсолютная постоянная c , для которой

$$|f_p(x) - f_p(x_1)| \leq c\gamma(x \wedge x_1)^{-2}|x - x_1| \quad (x, x_1 > 0). \quad (5.3)$$

Предположим, что $x_1 > 0$, и рассмотрим такие разбиения X , что: $A_{m,1}$ есть окрестность x_1 с $a_1 = \inf\{x: x \in A_{m,1}\} > 0$ и $\text{diam}(A_{m,1}) \leq \varepsilon_m$, где $\varepsilon_m \downarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$; A_{m,k_m+1} есть дополнение компактного интервала $K_m \supset A_{m,1}$, для которого

$$\mu(A_{m,k_m+1}) \leq \varepsilon_m^2(A_{m,1});$$

$\{A_{m,j}: j = 2, \dots, k_m\}$ есть разбиение множества $K_m \cap A_{m,1}^c$ такое, что $\text{diam}(A_{m,j}) \leq \varepsilon_m$ ($j = 2, \dots, k_m$).

При этом условие (В.2) оказывается выполненным, если

$$\int_H \gamma \mathcal{P}(dp) < +\infty, \quad \int_H f_p(x_1) \mathcal{P}(dp) < +\infty$$

и если m настолько велико, что

$$ca_1^{-2}\varepsilon_m \int_H \gamma \mathcal{P}(dp) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_H f_p(x_1) \mathcal{P}(dp),$$

поскольку, согласно (5.3)

$$I_{m,1} \leq ca_1^{-2}\varepsilon_m \int_H \gamma \mathcal{P}(dp)$$

и, по построению, $x_1 \in A_{m,1}$.

Наконец, предложение 5 здесь справедливо, поскольку рассматриваемые разбиения удовлетворяют условиям (А.1)–(А.4).

Пример 2. Пусть $X = \mathbf{R}^k$, и пусть H состоит из всех невырожденных гауссовских в.м. Плотность (соответственно, характеристическую функцию) такой в.м. со средним μ и ковариационной матрицей V мы обозначим $\varphi(x; \mu, V)$ (соответственно, $\psi(t; \mu, V)$). Рассуждая как в примере 1, нетрудно показать, что $H \in \mathcal{B}(M)$. Более того, функция $(x, p) \mapsto \varphi(x; \mu(p), V(p))$, $(x, p) \in X \times H$, измерима, как это требуется в (В.1).

Далее, применяя формулу обращения для ψ , можем написать при всех x и x_1 из $\mathbf{R}^k$

$$\begin{aligned} |\varphi(x; \mu, V) - \varphi(x_1; \mu, V)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbf{R}^k} |\exp\{i\langle x - x_1, t \rangle\} - 1| |\psi(t; \mu, V)| dt \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^k} \|x - x_1\| h(V), \end{aligned}$$

где

$$h(V) = \int \|t\| e^{-(Vt,t)/2} dt \leq (2\pi)^{k/2} \left(\sum_1^k \lambda_i^{-1} \right)^{(k+1)/2}$$

и λ_i суть собственные значения V .

Возьмем в качестве разбиения X произведение k разбиений того типа, которые использовались в примере 1: $A_{m,1} = A_{m,1}^{(1)} \times \dots \times A_{m,1}^{(k)}$ с $\text{diam}(A_{m,1}^{(j)}) \leq \varepsilon_m / \sqrt{k}$, $x_1 \in A_{m,1}$ и т.д. Тогда, если m настолько велико, что

$$(2\pi)^{-k} \varepsilon_m \int_H h(V) \mathcal{P}(dp) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_H \varphi(x_1; \mu, V) \mathcal{P}(dp),$$

условия (B.1)–(B.2) выполняются, равно как и (A.1)–(A.4).

Пример 3. Пусть X — множество всех точечных мер на $[0, T]$, $T > 0$, т.е. множество всех борелевских мер μ на $\mathcal{B}([0, T])$, для которых $\mu(A) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ для любого борелевского множества A . Наделим X метрикой Леви L ; см., например, [7, раздел X.13]. С этой метрикой X есть польское пространство. Возьмем в качестве H класс распределений P_λ всех ординарных пуассоновских процессов на $[0, T]$ с интенсивностью $\lambda > 0$. Рассуждение, подобное использованному в предыдущих примерах, примененное к конечномерным распределениям, вместе с хорошо известной теоремой о сходимости по распределению точечных процессов (см., например, теорему 1.21 в [10]), показывает, что $H \in \mathcal{B}(M)$. Для любого $\lambda > 0$ распределение P_λ абсолютно непрерывно относительно P_1 и

$$f_{P_\lambda}(x) := \frac{dP_\lambda}{dP_1}(x) = \exp\{T(1 - \lambda) - x_T \ln \lambda\} \quad (x \in X),$$

где $x_T := x([0, T])$; см. теорему 2.31 в [10]. Предположим теперь, что выполнено условие (A.1), и рассмотрим разбиение X , построенное в соответствии с (A.2)–(A.4) относительно метрики Леви. Тогда $x^{(1)} \in A_{m,1}$ и

$$\sup_{x \in A_{m,1}} |f_{P_\lambda}(x) - f_{P_\lambda}(x_1)| = \sup_{x \in A_{m,1}} \lambda^{x_T^{(1)}} \exp\{(1 - \lambda)T\} |1 - \lambda^{x_T - x_T^{(1)}}|. \quad (5.4)$$

Более того, поскольку $|x_T - x_T^{(1)}| \leq L(x, x^{(1)})$, левая часть в (5.4) равна нулю при $\varepsilon_m < 1$. Отсюда вытекает, что условия (B.1)–(B.2) выполнены для любого разбиения пространства X , построенного согласно (A.2)–(A.4), всякий раз, когда $\varepsilon_m < 1$.

В заключение настоящего пункта сделаем несколько замечаний об аппроксимации предсказательного распределения $P(\xi_{n+j} \in A | \xi^{(n)} = x)$ и апостериорного в.р. функционала $\int \psi(x) \tilde{p}(dx)$ соответствующими в.р., отвечающими $\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})$, предполагая, что

$$d(\mathcal{P}(\cdot; x^{(n)}), \mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})) \leq \varepsilon. \quad (5.5)$$

Аппроксимация предсказательного вероятностного распределения. Для всякого y из $\mathbf{R}$ положим

$$\begin{aligned} G^A(y; x^{(n)}) &= \mathcal{P}(\{p \in M: p(A) \leq y\}; x^{(n)}), \\ G_{\lambda, \mu}^A(y; x^{(n)}) &= \mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\{p \in M: p(A) \leq y\} \cap M_{\epsilon_m}; x^{(n)}), \\ &= \mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(t_m^{-1}(B_y); x^{(n)}), \end{aligned}$$

где $B_y := \{\theta \in T_{k_m}: \sum_{i=1}^{k_m} \theta_i (\delta_{a_m, i}(A) - \delta_{a_m, k_m+1}(A)) \leq y - \delta_{a_m, k_m+1}(A)\}$. Тогда

$$\begin{aligned} G^A(y; x^{(n)}) &\leq \mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}((t_m^{-1}(B_y))^{\epsilon}; x^{(n)}) + \epsilon \quad [\text{в силу (5.5)}] \\ &= \varphi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(t_m((t_m^{-1}(B_y))^{\epsilon}); x^{(n)}) + \epsilon \\ &\leq \varphi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(B_y^{2\epsilon}; x^{(n)}) + \epsilon \quad [\text{в силу } \zeta] \\ &\leq \varphi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(B_{y+2\epsilon\sqrt{k_m}}; x^{(n)}) + \epsilon \quad [\text{поскольку } B_y^{2\epsilon} \subset B_{y+2\epsilon\sqrt{k_m}}] \\ &= G_{\lambda, \mu}^A(y + 2\epsilon\sqrt{k_m}; x^{(n)}) + \epsilon, \end{aligned}$$

и

$$1 - G^A(y; x^{(n)}) \leq 1 - G_{\lambda, \mu}^A(y - 2\epsilon\sqrt{k_m}; x^{(n)}) + \epsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P(\xi_{n+j} \in A \mid \xi^{(n)} = x^{(n)}) &= \int_0^1 \{1 - G^A(y; x^{(n)})\} dy \\ &\leq \Phi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\xi_{n+j} \in A \mid \xi^{(n)} = x^{(n)}) + \epsilon(1 + 2\sqrt{k_m}), \\ P(\xi_{n+j} \in A \mid \xi^{(n)} = x^{(n)}) &\geq \Phi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\xi_{n+j} \in A \mid \xi^{(n)} = x^{(n)}) - \epsilon(1 + 2\sqrt{k_m}). \end{aligned}$$

Из сделанных выше замечаний вытекает следующее утверждение.

Предложение 6. Если условие (5.5) выполнено для некоторого $\epsilon > 0$, то

$$\begin{aligned} \sup_{A \in \mathcal{B}(M)} \left| P(\xi_{n+j} \in A \mid \xi^{(n)} = x^{(n)}) - \Phi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\xi_{n+j} \in A \mid \xi^{(n)} = x^{(n)}) \right| \\ \leq \epsilon(1 + 2\sqrt{k_m}) \quad (j \in \mathbf{N}), \end{aligned}$$

где (ср. раздел 6 в [13])

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\xi_{n+j} \in A \mid \xi^{(n)} = x^{(n)}) \\ = \frac{1}{\sum_{\nu} P_{F_{\epsilon_m}}(\Delta_{\nu}) \gamma_{\nu}} \sum_{\nu} P_{F_{\epsilon_m}}(\Delta_{\nu}) \gamma_{\nu} \frac{\sum_{j=1}^{k_m+1} (n_j + \mu_j) \delta_{a_m, j}(A)}{\lambda + n} \end{aligned}$$

и μ_j , n_j и т.д. те же, что в определении $\varphi_{\lambda, \mu}^{(\epsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})$ в п. 4.

Аппроксимация апостериорного вероятностного распределения функционала $\int \psi(x) \tilde{p}(dx)$. Предположим, что $\mathcal{P}(\int |\psi| d\tilde{p} < +\infty) = 1$ и что условие (5.5) выполнено. Обозначим $H(\cdot; x^{(n)})$ и $H_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})$ ф.р. функционала $\int \psi d\tilde{p}$, отвечающие мерам $\mathcal{P}(\cdot; x^{(n)})$ и $\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})$ соответственно. Рассуждение, подобное доказательству предложения 6, показывает, что

$$\begin{aligned} H_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon_m)}(y - \varepsilon \sqrt{k_m} \|d_\psi\| - 0; x^{(n)}) - \varepsilon &\leq H(y; x^{(n)}) \\ &\leq H_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon_m)}(y + \varepsilon \sqrt{k_m} \|d_\psi\|; x^{(n)}) + \varepsilon \quad (y \in \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\|d_\psi\| = (\psi(a_{m,1}) - \psi(a_{m,k_m+1}), \dots, \psi(a_{m,k_m}) - \psi(a_{m,k_m+1}))$.

Как отмечалось в [13], точное выражение для $H_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})$ легко можно получить, используя основной результат из [5], [6].

Неравенства (5.6) дают оценку сверху для расстояния Леви между $H(\cdot; x^{(n)})$ и $H_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon_m)}(\cdot; x^{(n)})$.

6. Обсуждение результатов. Наши результаты могут быть использованы при выборе априорного распределения в байесовском непараметрическом статистическом анализе. Покажем, как может быть использована теорема 1.

Без существенного ограничения общности при практическом применении байесовского анализа можно считать, что класс $\mathcal{C}$ в.м. μ на $\mathcal{B}(X)$, которые являются «естественными» кандидатами, чтобы представлять в.р. каждого наблюдения, является *плотным*. Из этого предположения вытекает, что накопленное знание изучаемого феномена позволяет поставить в соответствие каждому $\varepsilon > 0$ компактное подмножество $K_{\varepsilon/2}$ пространства X такое, что каждый элемент класса $\mathcal{C}$ наделяет дополнение к $K_{\varepsilon/2}$ вероятностью, не превосходящей $\varepsilon^2/4$. В статистической практике в качестве X выбираются (и это обычно оправдано соображениями математического удобства) некоторые стандартные выборочные пространства, включающие в себя множество всех возможных реализаций каждого наблюдения. Более того, часто предыдущее предположение выполняется с $\varepsilon = 0$, и в этом случае X само может быть выбрано компактным. В свете сделанных замечаний основное допущение теоремы 1 о существовании (ε, μ) - или ε -вполне ограниченных дискретизаций представляется вполне согласующимся с природой реальных проблем. В частности, указанное предположение влечет, что можно ограничиться рассмотрением лишь априорных распределений $\mathcal{P}$, для которых $\mu = \int_M p d\mathcal{P} \in \mathcal{C}$. При этом ограничении можно предложить, на основе теоремы 1, следующий метод для выбора априорного распределения. Первый шаг состоит в разбиении $K_{\varepsilon/2}$ на подмножества $A_1, \dots, A_k$, удовлетворяющие соответствующим условиям, чтобы получить $(\varepsilon/2, \mu)$ -

или $\epsilon/2$ -вполне ограниченную дискретизацию. Далее, после построения разбиения X , можно продолжить как в разделе 6 в [13], принимая во внимание, что вместо $(\tilde{p}(a_1), \dots, \tilde{p}(a_k))$ мы теперь имеем $(\tilde{p}(A_1), \dots, \tilde{p}(A_k))$. Более того, субъективная оценка вероятности $P_{F_{\epsilon/2}}(\Delta_\nu)$ (в обозначениях раздела 6 в [13] это π_ν) должна быть согласована с допущением, что мера μ обязана принадлежать $\mathcal{C}$. Конечный результат этой схемы выбора есть смесь

$$\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon/2)} = \sum_{\nu} \pi_{\nu} \mathcal{D}(E; \alpha_{\mu(\nu)}) \quad (E \in \mathcal{B}(M)),$$

для которой $d(\mathcal{P}, \mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\epsilon)}) \leq \epsilon$, когда N и λ удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме 1; в.р. μ величины ξ_1 , порожденное мерой $\mathcal{P}$, принадлежит $\mathcal{C}$; $\mathcal{P}(\{p \in M: (p(A_1), \dots, p(A_k)) \in \Delta_\nu\}) = \pi_\nu$ ($\nu \in I$).

Предложенная схема имеет два достоинства: с одной стороны, в ней фиксирована естественная область — семейство $\{\Delta_\nu: \nu \in I\}$ — для субъективной оценки априорных вероятностей, и, с другой стороны, — она приводит к апостериорной вероятности в форме, достаточно удобной для математической обработки. Ясно, что при этом возможны практические трудности, связанные с большим числом необходимых оценок, когда число элементов в I велико. Нижеследующие замечания показывают, как предложенная схема может применяться, когда имеющееся значительное число наблюдений позволяет построить m частотных распределений на основе реализаций m конечных непересекающихся подпоследовательностей бесконечной последовательности $(\xi_n)_{n \geq 1}$ возможных наблюдений. Отметим, что используемые «исторические» частотные распределения не обязательно должны быть эмпирическими распределениями: в действительности они могут быть «гладкими» в.р., подогнанными к наблюдаемым данным. В подобных ситуациях мы можем согласиться, что в.р., приписываемое $\tilde{p}$, должно быть близким к $\mathcal{P}^* := \sum_{i=1}^m c_i \delta_{R_i}$, где $R_1, \dots, R_m$ представляют имеющиеся «исторические» распределения, R_i основывается на l_i наблюдениях и $c_i \simeq l_i / \sum_{j=1}^m l_j$ для $i = 1, \dots, m$.

Определим $K_{\epsilon/2}$ и $\{A_1, \dots, A_k\}$, как это было сделано выше в настоящем пункте, и предположим, не ограничивая общности, что

$$\theta^{(i)}(A_1, \dots, A_k) \neq \theta^{(j)}(A_1, \dots, A_k) \quad \text{при } i \neq j,$$

где

$$\theta^{(i)}(A_1, \dots, A_k) = (R_i(A_1), \dots, R_i(A_k))$$

(для этого достаточно, чтобы $R_i \neq R_j$ при $i \neq j$ и чтобы ϵ было достаточно мало). Выберем теперь целое $N > 2k/\epsilon$ (см. теорему 1) столь большим, чтобы каждая ячейка Δ_ν содержала не более одного вектора $\theta^{(i)}$. Тогда если Δ_ν содержит $\theta^{(i)}$, то $P_{F_{\epsilon/2}}(\Delta_\nu) = c_i$ и, по теореме 1,

$d(\mathcal{P}^*, \mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon/2)}) \leq \varepsilon$, где

$$\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon/2)}(\cdot) = \sum_{i=1}^m c_i \mathcal{D}(\cdot; \alpha^{(i)}); \quad \alpha^{(i)} = \sum_{j=1}^{k+1} \mu_j^{(i)} \delta_{a_j};$$

$$\mu_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{если } R_i(A_j) = 0, \\ \lambda \left\{ r_j^{(i)} - \frac{b_k}{N} \right\}, & \text{если } R_i(A_j) > 0, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k, r_j^{(i)} = \min\{n/N: n/N \geq R_i(A_j), n \in \mathbf{N}\}$ и λ удовлетворяет (3.2) с ε вместо $\varepsilon/2$; $\mu_{k+1}^{(i)} = \lambda - \sum_{j=1}^k \mu_j^{(i)}$.

Отметим, что число параметров, значения которых нужно выбирать при определении $\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon/2)}$, не превосходит m . Более того, при подходящем выборе ε меры $\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon/2)}$ и $\mathcal{P}^*$ достаточно близки, чтобы использовать $\mathcal{P}_{\lambda, \mu}^{(\varepsilon/2)}$ как удобную аппроксимацию любого априорного распределения, основанного на «объективной» информации, содержащейся в $R_1, \dots, R_m$.

Некоторые результаты и рассуждения из п. 3 могут быть использованы для аппроксимации $\mathcal{P}^*$ смесями вида

$$\mathcal{D}^{(\lambda, R)}(\cdot) := \sum_{i=1}^m c_i \mathcal{D}(\cdot; \lambda R_i).$$

Преимущество этого типа аппроксимации состоит в том, что для нее не нужно оценивать вероятности $R_i(A_j)$. Для построения такой аппроксимации отметим, что если $\mathcal{P}_\varepsilon^*$ (соответственно $\mathcal{D}_\varepsilon^{(\lambda, R)}$) есть в.р., отвечающее $\tilde{p}_\varepsilon$ в предположении, что в.р., отвечающее $\tilde{p}$, есть $\mathcal{P}^*$ (соответственно $\mathcal{D}^{(\lambda, R)}$), то, по предложению 1,

$$d(\mathcal{P}^*, \mathcal{P}_\varepsilon^*) \leq \varepsilon, \quad d(\mathcal{D}^{(\lambda, R)}, \mathcal{D}_\varepsilon^{(\lambda, R)}) \leq \varepsilon. \quad (6.1)$$

Далее, пусть t означает то же, что в п. 2, и пусть $P_\varepsilon^* = \mathcal{P}_\varepsilon^{*t-1}$, $P_\varepsilon^{(\lambda, R)} = \mathcal{D}_\varepsilon^{(\lambda, R)t-1}$, т.е. $P_\varepsilon^* = \sum_{i=1}^m c_i \delta_{R_{ei}}$, $P_\varepsilon^{(\lambda, R)} = \sum_{i=1}^m c_i \mathcal{D}^{(\lambda)}(\cdot; \lambda R_{ei})$, где $R_{ei} = (R_i(A_1), \dots, R_i(A_k))$ и $(A_1, \dots, A_{k+1})$ есть разбиение X из определения дискретизации $\tilde{p}_\varepsilon$. Отметим теперь, что для любого шара $S_\rho(R_{ei})$ в $\mathbf{R}^k$ с центром в R_{ei} и радиусом ρ и для любого случайного вектора Y_i с в.р. $\mathcal{D}^{(\lambda)}(\cdot; \lambda R_{ei})$ по неравенству Маркова

$$\mathcal{D}^{(\lambda)}((S_\rho(R_{ei}))^c; \lambda R_{ei}) \leq \frac{1}{\rho^2} \mathbf{E}(\|Y_i - R_{ei}\|^2) \leq \frac{k}{4\rho^2(\lambda + 1)}. \quad (6.2)$$

Следовательно, для любого E из $\mathcal{B}(\mathbf{R}^k)$ имеем

$$P_\varepsilon^{(\lambda, R)}(E) \leq \sum_{i=1}^m c_i \mathcal{D}^{(\lambda)}(E \cap S_\rho(R_{ei}); \lambda R_{ei}) + \sum_{i=1}^m c_i \mathcal{D}^{(\lambda)}((S_\rho(R_{ei}))^c; \lambda R_{ei})$$

$$\leq P_\varepsilon^*(E^\rho) + \frac{k}{4\rho^2(\lambda + 1)}.$$

Используя это неравенство и рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, в предположении, что

$$\rho \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}, \quad \lambda + 1 \geq \frac{k}{4\rho^2\varepsilon}, \quad (6.3)$$

получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varepsilon^{(\lambda, R)}(H) &\leq \mathcal{P}_\varepsilon^*((H \cap M_\varepsilon)^{\rho\sqrt{k}}) + \frac{k}{4\rho^2(\lambda + 1)} \quad (H \in \mathcal{B}(M)) \\ &\leq \mathcal{P}_\varepsilon^*(H^\varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, (6.3) влечет $d(\mathcal{P}_\varepsilon^*, \mathcal{D}_\varepsilon^{(\lambda, R)}) \leq \varepsilon$, и, комбинируя это с (6.1), имеем

$$d(\mathcal{P}^*, \mathcal{D}^{(\lambda, R)}) \leq 3\varepsilon.$$

С $\rho = \varepsilon/\sqrt{k}$ последнее неравенство справедливо при всех $\lambda > k^2/4\varepsilon^3 - 1$. Ясно, что эта нижняя грань для λ может быть уменьшена, если в (6.2) вместо неравенства Маркова использовать более точное неравенство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aldous D. J. Exchangeability and related topics. — Lecture Notes in Math., 1985, v. 1117, p. 1–198.
2. Andreev A., Arjas E. A note on histogram approximation in Bayesian density estimation. — Bayesian Statistics, v. 5. Ed. by J. M. Bernardo et al. Oxford: Oxford Univ. Press, 1996, p. 487–490.
3. Буллингли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
4. Billingsley P. Probability and Measure. New York: Wiley, 1995, 593 p.
5. Cifarelli D. M., Regazzini E. Distribution functions of means of a Dirichlet process. — Ann. Statist., 1990, v. 18, № 1, p. 429–442 (Correction in Ann. Statist., 1994, v. 22, № 3, p. 1633–1634).
6. Cifarelli D. M., Regazzini E. Some remarks on the distribution functions of means of a Dirichlet process. — Technical Report 93.4. Milan: CNR-IAMI, 1993, 42 p.
7. Doob J. L. Measure Theory. New York: Springer-Verlag, 1994, 210 p.
8. Dudley R. M. Real Analysis and Probability. Pacific Grove, CA: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1989, 436 p.
9. Ferguson T. S. A Bayesian analysis of some nonparametric problems. — Ann. Statist., 1973, v. 1, № 2, p. 209–230.
10. Karr A. F. Point Processes and their Statistical Inference. New York: Marcel Dekker, 1991, 490 p.
11. Krasker W. S. A note on selecting parametric models in Bayesian inference. — Ann. Statist., 1984, v. 12, № 2, p. 751–757.
12. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
13. Regazzini E., Sazonov V. V. Approximation of laws of multinomial parameters by mixtures of Dirichlet distributions with applications to Bayesian inference. — Acta Appl. Math., 1999, v. 58, № 1–3, p. 247–264.

Поступила в редакцию
26.XI.1998